Gyakorlás

Valószínűségszámítás és statisztika

1. konzultáció

2025.

1. Legyenek A és B független események, C pedig egy mindkettőjüket kizáró esemény, és legyen $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/3$. Határozzuk meg a $\mathbb{P}\big(\overline{A} \cap B \cup C\big)$ valószínűséget.

2. Egy cégnek két irodája van: a dolgozók fele Prágában, a másik fele Isztambulban dolgozik. A prágai irodában dolgozók egyharmadának a kedvenc itala a kávé, egyharmadának az ásványvíz, egyharmadának pedig a sör. Az isztambuli irodában dolgozók felének a kedvenc itala a kávé, a másik felének a tea. (Minden dolgozónak pontosan egy kedvenc itala van.) Véletlenszerűen kiválasztjuk a cég egyik dolgozóját.
   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a dolgozó kedvenc itala a kávé?
   (b) Feltéve, hogy a dolgozó kedvenc itala a kávé, mi a valószínűsége, hogy Isztambulban dolgozik?
   (c) Feltéve, hogy a dolgozó kedvenc itala nem a kávé, mi a valószínűsége, hogy a sör az?

3. Aladár és Béla a következő játékot játsszák: mindketten dobnak egy szabályos dobótetraéderrel. Ha a dobott számok összege páros, akkor Aladár kifizeti a dobott számok összegét Bélának, ellenkező esetben Béla fizeti ki a dobott számok összegének c-szeresét Aladárnak. Mekkorára válasszák meg c értékét, hogy a játék „igazságos” legyen?

4. Egy kosárba próbálunk bedobni egy papírgalacsint. A találat valószínűsége minden próbálkozásnál 0,2 a korábbi próbálkozásoktól függetlenül. Ha az első találat után tovább próbálkozunk, akkor várhatóan hányadik dobásra találunk be másodszor?

5. Egy forgalmas útszakaszon minden nap egymástól függetlenül 25% valószínűséggel telik el súlyos baleset nélkül.
   (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a jövő héten pontosan két olyan nap lesz, amikor 1-nél több súlyos baleset történik?
   (b) Határozzuk meg az egy hét alatt bekövetkező balesetek számának várható értékét és szórásnégyzetét.

6. Egy könyvtárban a könyveket egy teljes hónapra kölcsönöznek ki a látogatók, és azokat késedelem nélkül visszahozzák. A könyvtár állománya minden hónapban új könyvekkel bővül (miközben a régebbi példányokat nem selejtezik le), azonban a látogatók száma nem változik. Elkezdtük megfigyelni a könyvtár forgalmát hónapról hónapra: a megfigyelés tetszőleges k-adik hónapjában $4k$ könyv volt a könyvtárban,

és mindegyiket egymástól és a korábbi hónapok kölcsönzéseitől függetlenül $1/k$ valószínűséggel kölcsönzik ki az adott hónapban. Alkalmas approximációval közelítsük annak a valószínűségét, hogy a 68. hónapban legalább 3 könyvet kikölcsönöznek.

7. Egy n házaspárból álló baráti társaság minden tagja esernyővel érkezett egy összejövetelre. Búcsúzáskor mindenki véletlenszerűen választ majd magának egy esernyőt, amit hazavisz.
   (a) Várhatóan hányan távoznak a saját esernyőjükkel?
   (b) Várhatóan hány olyan házaspár lesz, akik egymás esernyőjét viszik el?

8. Egy fagyizóban pár perccel a zárás előtt még négy gombócnyi fagyi maradt. Két fiú, Sándor és Tamás, egymástól függetlenül 1/2-1/2 valószínűséggel odamegy a fagyizóba zárás előtt. Ha csak az egyikük megy oda, akkor 3 gombóc fagyit vesz. Ha mindketten odamennek, akkor testvériesen osztozkodva 2-2 gombóc fagyit vesznek. Jelölje S és T a Sándor, illetve a Tamás által vásárolt fagyigombócok számát.
   (a) Határozzuk meg a Sándor és a Tamás által vásárolt fagyigombócok számainak együttes súlyfüggvényét.
   (b) Független-e egymástól a Sándor és a Tamás által vásárolt fagyigombócok száma?

9. Egymástól függetlenül egyenletes valószínűség szerint kiválasztunk egy X és egy Y pontot a $[0, 1]$ intervallumban. Határozzuk meg a $(0; 0)$, $(X; 0)$ és $(0; Y)$ csúcspontokkal rendelkező háromszög területének várható értékét.

10. Egy buszmegállóban várva három járattal is haza tudnánk menni. Az egyik járat átlagosan 4, a másik átlagosan 5, a harmadik átlagosan 6 percenként jár egymástól függetlenül.
    (a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy 5 percnél kevesebbet kell várnunk.
    (b) Feltéve, hogy már 5 perce várunk, mi a valószínűsége annak, hogy még több mint 5 percet kell várnunk?

11. Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_X(x) = \begin{cases} \alpha \sin x, & \text{ha } 0 < x < \pi/2, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

    (a) Határozzuk meg α értékét.
    (b) Adjuk meg az $F_X(x)$ eloszlásfüggvényt.
    (c) Határozzuk meg X szórását.
    (d) Határozzuk meg $\left|X - \frac{\pi}{4}\right|$ eloszlásfüggvényét.