

Gyakorlás
VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS ÉS STATISZTIKA
Konzultáció
2025.

1. Legyenek A és B független események, C pedig egy mindkettőjüket kizáró esemény, és legyen $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/3$. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cup C)$ valószínűséget.
2. Egy cégnek két irodája van: a dolgozók fele Prágában, a másik fele Isztambulban dolgozik. A prágai irodában dolgozók egyharmadának a kedvenc itala a kávé, egyharmadának az ásványvíz, egyharmadának pedig a sör. Az isztambuli irodában dolgozók felének a kedvenc itala a kávé, a másik felének a tea. (Minden dolgozónak pontosan egy kedvenc itala van.) Véletlenszerűen kiválasztjuk a cég egyik dolgozóját.
 - (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a dolgozó kedvenc itala a kávé?
 - (b) Feltéve, hogy a dolgozó kedvenc itala a kávé, mi a valószínűsége, hogy Isztambulban dolgozik?
 - (c) Feltéve, hogy a dolgozó kedvenc itala nem a kávé, mi a valószínűsége, hogy a sör az?
3. Aladár és Béla a következő játékot játsszák: mindketten dobnak egy szabályos dobótetraéderrel. Ha a dobott számok összege páros, akkor Aladár kifizeti a dobott számok összegét Bélának, ellenkező esetben Béla fizeti ki a dobott számok összegének c -szeresét Aladárnak. Mekkora válasszák meg c értékét, hogy a játék „igazságos” legyen?
4. Egy kosárba próbálunk bedobni egy papírgalacsint. A találat valószínűsége minden próbálkozásnál $0,2$ a korábbi próbálkozásoktól függetlenül. Ha az első találat után tovább próbálkozunk, akkor várhatóan hányadik dobásra találunk be másodszor?
5. Egy forgalmas útszakaszon minden nap egymástól függetlenül 25% valószínűséggel telik el súlyos baleset nélkül.
 - (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a jövő héten pontosan két olyan nap lesz, amikor 1-nél több súlyos baleset történik?
 - (b) Határozzuk meg az egy hét alatt bekövetkező balesetek számának várható értékét és szórásnégyzetét.
6. Egy könyvtárban a könyveket egy teljes hónapra kölcsönöznek ki a látogatók, és azokat késedelem nélkül visszahozzák. A könyvtár állománya minden hónapban új könyvekkel bővül (miközben a régebbi példányokat nem selejtezik le), azonban a látogatók száma nem változik. Elkezdjük megfigyelni a könyvtár forgalmát hónapról hónapra: a megfigyelés tetszőleges k -adik hónapjában $4k$ könyv volt a könyvtárban,

és mindegyiket egymástól és a korábbi hónapok kölcsönzéseitől függetlenül $1/k$ valószínűséggel kölcsönzik ki az adott hónapban. Alkalmas approximációval közelítsük annak a valószínűségét, hogy a 68. hónapban legalább 3 könyvet kikölcsönöznek.

7. Egy n házaspárból álló baráti társaság minden tagja esernyővel érkezett egy összejövételre. Búcsúzáskor mindenki véletlenszerűen választ majd magának egy esernyőt, amit hazavisz.
 - (a) Várhatóan hányan távoznak a saját esernyőjükkel?
 - (b) Várhatóan hány olyan házaspár lesz, akik egymás esernyőjét viszik el?
8. Egy fagyizóban pár perccel a zárás előtt még négy gombócnyi fagy maradt. Két fiú, Sándor és Tamás, egymástól függetlenül $1/2$ - $1/2$ valószínűséggel odamegy a fagyizóba zárás előtt. Ha csak az egyikük megy oda, akkor 3 gombóc fagyit vesz. Ha mindketten odamennek, akkor testvériesen osztozkodva 2-2 gombóc fagyit vesznek. Jelölje S és T a Sándor, illetve a Tamás által vásárolt fagyigombócok számát.
 - (a) Határozzuk meg a Sándor és a Tamás által vásárolt fagyigombócok számainak együttes súlyfüggvényét.
 - (b) Független-e egymástól a Sándor és a Tamás által vásárolt fagyigombócok száma?
9. Egymástól függetlenül egyenletes valószínűség szerint kiválasztunk egy X és egy Y pontot a $[0, 1]$ intervallumban. Határozzuk meg a $(0; 0)$, $(X; 0)$ és $(0; Y)$ csúcspontokkal rendelkező háromszög területének várható értékét.
10. Egy buszmegállóban várva három járáttal is haza tudnánk menni. Az egyik járat átlagosan 4, a másik átlagosan 5, a harmadik átlagosan 6 percenként jár egymástól függetlenül.
 - (a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy 5 percnél kevesebbet kell várnunk.
 - (b) Feltéve, hogy már 5 perce várunk, mi a valószínűsége annak, hogy még több mint 5 percet kell várnunk?
11. Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_X(x) = \begin{cases} \alpha \sin x, & \text{ha } 0 < x < \pi/2, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

- (a) Határozzuk meg α értékét.
- (b) Adjuk meg az $F_X(x)$ eloszlásfüggvényt.
- (c) Határozzuk meg X szórását.
- (d) Határozzuk meg $|X - \frac{\pi}{4}|$ eloszlásfüggvényét.