

Együttes sűrűségfüggvény
VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS ÉS STATISZTIKA
8. gyakorlat
2025.

1. Legyen X egy normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 2 és szórása 3.
 - (a) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(1 \leq X < 3)$ valószínűséget.
 - (b) Határozzuk meg azt a c számot, amire $\mathbb{P}(X \geq c) = 0,7$ teljesül.
2. Egy italautomatához egymástól függetlenül érkeznek vásárlók, átlagosan 10 percenként. Minden vásárló pontosan egy üdítőt vásárol.
 - (a) Alkalmas közelítéssel határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy ha kezdetben 20 doboz üdítő van az automatába, akkor 3 óra múlva még nem ürül ki az automata.
 - (b) Alkalmas közelítést használva becsüljük meg, hogy legalább hány doboz üdítőt kell az automatába tenni, ha azt szeretnénk, hogy 95% legyen a valószínűsége annak, hogy egy nap alatt ne ürüljön ki az automata.
3. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x - \frac{1-e^{-xy}}{y}, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \text{ és } 0 < y \\ 1 - \frac{1-e^{-y}}{y}, & \text{ha } 1 < x \text{ és } 0 < y \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

- (a) Határozzuk meg X és Y együttes sűrűségfüggvényét.
 - (b) Határozzuk meg X , illetve Y perem-eloszlásfüggvényét.
 - (c) Határozzuk meg X , illetve Y perem-sűrűségfüggvényét.
4. Legyenek $X \sim U(0; 3)$ és $Y \sim U(-1; 4)$ független valószínűségi változók. Határozzuk meg az alábbi valószínűségeket.
 - (a) $\mathbb{P}(X < Y)$
 - (b) $\mathbb{P}(XY < 1)$

5. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2(x^3 + y^3), & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

- (a) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X + Y < 1)$ valószínűséget.
 - (b) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X^2 < Y)$ valószínűséget.
 - (c) Határozzuk meg X perem-sűrűségfüggvényét.
 - (d) Határozzuk meg X perem-eloszlásfüggvényét.
 - (e) Határozzuk meg az $\mathbb{E}(X)$ várható értéket.
 - (f) Független-e X és Y ?
6. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} xy + ax + by + c, & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

valamilyen a , b és c valós számok esetén. Milyen a , b és c értékek esetén lesznek X és Y függetlenek?

7. Legyenek $X_1, \dots, X_{100}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2, & \text{ha } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(a) Bizonyítsuk be, hogy f valóban sűrűségfüggvény.

(b) Határozzuk meg X_1 várható értékét és szórását.

(c) Legyen $X = X_1 + \dots + X_{100}$. Közelítsük alkalmas approximációval a $\mathbb{P}(X > 160)$ valószínűséget.

8. Választunk egy (X, Y) vektort az

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}xy, & \text{ha } 0 < x < 2 \text{ és } 0 < y < 2, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

sűrűségfüggvény szerint. Mi annak a valószínűsége, hogy szerkeszthető olyan háromszög, aminek oldalainak hosszai éppen X , Y és 1?

9. Az (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású az x -tengely, az $y = \sin x$ görbe és az $x = \pi/2$ egyenes által határolt véges területen. Határozzuk meg X és Y együttes sűrűségfüggvényét, valamint X , illetve Y perem-sűrűségfüggvényét.