

Exponenciális és egyenletes eloszlás, eloszlástranszformációk, folytonos valószínűségi változók várható értéke

VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS ÉS STATISZTIKA

6. gyakorlat

2025.

Eloszlás	Jelölés	Értékkészlet	Eloszlásfüggvény	Sűrűségfüggvény	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Egyenletes	$U(a, b)$	$(a; b)$	$\begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b \\ 1, & \text{ha } x > b \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciális	$\text{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$\begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normális	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ

- Egy képzeletbeli hallgató 2 és 4 óra között egyenletes eloszlás szerint véletlenül választott időpontban adja be a házi feladatát.
 - Határozzuk meg a házibeadás időpontjának várható értékét és szórását.
 - Mennyi a valószínűsége, hogy a hallgató 3 óra 45 perc előtt adja be a házi feladatát?
 - Feltéve, hogy a hallgató 2 óra 30 percig még nem adta be a háziját, mennyi a valószínűsége, hogy 3 óra 45 perc előtt beadja?
- Egy szabályos érmét egyszer feldobva jelölje X a dobott fejek számát. Legyen továbbá Y egy – az érmedobástól függetlenül – egyenletes eloszlás szerint választott pont a $[0;1]$ intervallumban. Határozzuk meg
 - az $\mathbb{E}(XY)$ értékét,
 - a $\mathbb{D}^2(X+Y)$ értékét,
 - az $X+Y$ eloszlásfüggvényét.
- Az $x^2 + y^2 < 1$ körlapon véletlenszerűen (egyenletes eloszlás szerint) választunk egy pontot. Jelölje Z a választott pont távolságát az origótól. Adjuk meg Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.
- Legyen X egyenletes eloszlású valószínűségi változó az $[-1; 1]$ intervallumon, és legyen $Y = (X - 1)^2$.
 - Határozzuk meg Y várható értékét.
 - Határozzuk meg Y eloszlásfüggvényét.
- Tapasztalatok szerint az út hossza, amit egy bizonyos típusú robogó megtesz az első meghibásodásáig exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ez a távolság átlagosan 6000 km. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott robogó
 - kevesebb, mint 4000 km megtétele után meghibásodik;
 - több, mint 6500 km megtétele után hibásodik meg?

Legfeljebb mekkora utat tesz meg az első meghibásodásig a robogók leghamarabb meghibásodó 20%-a?
- Egy adott mosógéptípus átlagosan 2 évig bírja az első meghibásodásig. Ha az első két év során hibátlanul működött a mosógépünk, mi a valószínűsége annak, hogy jövőre sem fog meghibásodni?

7. Legyen $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, valamint legyen $Y = 3X$.
- Határozzuk meg Y eloszlásfüggvényét.
 - Határozzuk meg Y sűrűségfüggvényét.
 - Határozzuk meg Y várható értékét.
8. Egy dobókockagyárban egységnyi élhosszúságú dobókockákat gyártanak. Sajnos ma reggel a gyártósor kezelője rendkívül fáradtan jött be dolgozni, ezért a mai nap folyamán gyártott dobókockák élhossza $\text{Exp}(1)$ eloszlást követ (de minden dobókocka továbbra is egy kocka). Határozzuk meg a ma készült kockák térfogatának várható értékét.
9. Egy bankfiókban az átlagos várakozási idő 15 perc. Három barát egymástól együttesen függetlenül, véletlen időpontokban meglátogatják a bankfiókot. Mi a valószínűsége, hogy hárójuk közül legalább kettőnek legalább fél órát kell várnia?
10. Egyenletes sebességű motorozás közben egy motoros sisakjára 1 km alatt $2/3$ valószínűséggel kenődik fel légy és 5 km alatt $1/3$ valószínűséggel kenődik fel darázs. Mennyi a valószínűsége, hogy az első 10 km-en sem légy, sem darázs nem kenődik fel a motoros sisakjára?
11. Egy benzinkút üzemanyagtartályát hetente teletöltik. A heti fogyasztás (százezer literben mért) sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mekkora tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 1%-nál kisebb valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

12. Legyen X sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

valamint legyen $Y = X\sqrt{X}$.

- Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.
- Határozzuk meg Y eloszlásfüggvényét.
- Határozzuk meg Y sűrűségfüggvényét.
- Határozzuk meg Y várható értékét.

IMSc-pontos feladat.

5. Szimuláljunk az előadáson tanult módszerrel (tetszőleges programnyelven vagy táblázatkezelőben) 100 darab független valószínűségi változót, amelyek eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1, \\ \frac{x^2 - 1}{3}, & \text{ha } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{ha } x \geq 2, \end{cases}$$

Adjuk meg a szimuláció módszerét is (azaz pontosan hogyan kell transzformálni az $U(0;1)$ eloszlású változókat, hogy F_X eloszlásfüggvényűeket kapjunk). Mekkora a különbség a $\mathbb{P}(X < 1,2)$ valószínűség és a kapott 100-elemű mintában az 1,2-nél kisebb elemek relatív gyakorisága között?