

Együttes eloszlások, valószínűségi változók függetlensége, eloszlásfüggvény, folytonos valószínűségi változók sűrűségfüggvénye

VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS ÉS STATISZTIKA

5. gyakorlat

2025.

Együttes súlyfüggvény.

Az X és Y diszkrét valószínűségi változók együttes súlyfüggvénye $p_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

Diszkrét valószínűségi változók függetlensége.

Azt mondjuk, hogy az X és Y valószínűségi változók függetlenek, ha $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$.

Eloszlásfüggvény.

Egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$.

Tétel.

Egy F függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvény, ha

- (i) F monoton növekvő,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,
- (iv) F balról folytonos.

Folytonos valószínűségi változó.

Egy X valószínűségi változó folytonos, ha létezik olyan $f \geq 0$ függvény, amelyre

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Ekkor az f függvényt az X sűrűségfüggvényének nevezzük.

Tétel.

Egy f függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvény, ha

- (i) $f \geq 0$,
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

1. Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Jelölje X a dobott számok között a hatosok, Y pedig a páros számok számát.
 - (a) Adjuk meg X és Y együttes súlyfüggvényét.
 - (b) Határozzuk meg X , illetve Y súlyfüggvényét.
 - (c) Rajzoljuk fel X , illetve Y eloszlásfüggvényét.
 - (d) Független-e X és Y ?
 - (e) Határozzuk meg az $\mathbb{E}(X + Y)$ és $\mathbb{E}(XY)$ várható értékeket.
2. Egy (1×3) -as négyzetrács három mezőjét egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel feketére és $1/2$ valószínűséggel fehérre színeztük. Jelölje X a fehér mezők számát, Y pedig azt, hogy hány mezőből áll a legnagyobb összefüggő fekete terület. (Például ha a mezőket rendre feketére, fehérre és feketére színezzük, akkor X és Y értéke is 1.)
 - (a) Határozzuk meg X és Y együttes súlyfüggvényét.
 - (b) Határozzuk meg X , illetve Y súlyfüggvényét.
 - (c) Határozzuk meg $\mathbb{E}(XY)$ értékét.
3. Legyenek X és Y független geometriai eloszlású valószínűségi változók $p = 2/3$ paraméterrel.
 - (a) Határozzuk meg X és Y együttes súlyfüggvényét.
 - (b) Határozzuk meg az $\mathbb{E}(X + Y)$ és $\mathbb{E}(XY)$ várható értékeket.
 - (c) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X = 2 \mid Y = 5)$ valószínűséget.
4. Az alábbi $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények mindegyikéről döntsük el, hogy eloszlásfüggvények-e.

$$(a) F(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

$$(c) F(x) = 1 - e^{-x^2}$$

$$(b) F(x) = e^{-e^{-x}},$$

$$(d) F(x) = \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2}$$

5. (a) Határozzuk meg α értékét, ha tudjuk, hogy $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy sűrűségfüggvény.

(b) Adjuk meg az $F(x)$ eloszlásfüggvényt.

(c) Határozzuk meg az eloszlás mediánját, azaz azt az x számot, amire az $f(x)$ sűrűségfüggvényű X valószínűségi változóra $\mathbb{P}(X < x) = 1/2$ teljesül.

$$(i) f(x) = \begin{cases} \alpha(2x - x^2), & \text{ha } 0 < x < 2, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} \alpha \cos \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

6. Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & \text{ha } x > 1, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $c > 0$ egy megfelelően választott konstans.

(a) Határozzuk meg c értékét.

(b) Definiáljuk az Y diszkrét valószínűségi változót a következőképpen:

$$Y = \begin{cases} 3, & \text{ha } X < 3, \\ 0, & \text{ha } 3 \leq X < 4, \\ 4, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg Y súlyfüggvényét.

(c) Határozzuk meg Y várható értékét és szórását.

7. A $[0, 1]$ intervallumon találmra kiválasztunk egy pontot. Jelölje X a kiválasztott pont távolságát 0,3-tól. Határozzuk meg X eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

8. A síkon a $(0, 0)$, $(0, 1)$ és $(1, 1)$ csúcspontokkal rendelkező háromszög belsejében találmra kiválasztunk egy (X, Y) pontot.

(a) Határozzuk meg X eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

(b) Határozzuk meg Y eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

9. A $[0, 1]$ intervallumban kijelölünk véletlenszerűen három pontot. Jelölje Y ezek közül a középsőt. Határozzuk meg Y eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

10. Az $(1/2, 0)$ és $(1, 0)$ pontok közötti szakaszon találmra választunk egy A pontot, és ettől függetlenül, szintén találmra választunk egy B pontot az origó és a $(0, 1)$ pont közötti szakaszon. Jelölje X az ABO szög tangensét. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

IMSc-pontos feladat.

5. (a) Adjunk példát olyan valószínűségi változóra, amelynek az eloszlásfüggvénye nem folytonos, és az sem teljesül rá, hogy véges sok pont kivételével differenciálható.

(b) Tekintsük az alábbi $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1, \\ \frac{1}{x^k}, & \text{ha } k < x \leq k+1 \text{ valamely } k \in \mathbb{Z}_+ \text{ számra.} \end{cases}$$

(i) Mutassuk meg, hogy a $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ integrál véges.

(ii) Jelölje α a fenti integrál értékét, és legyen tetszőleg $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) = \frac{1}{\alpha} g(x)$, illetve $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Mutassuk meg, hogy f egy sűrűségfüggvény, de F megszámlálhatóan végtelen sok pontban nem differenciálható.