

Várható érték és szórás
VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS ÉS STATISZTIKA
4. gyakorlat
2025.

Várható érték.

Legyen X egy diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$. Ekkor az X várható értéke

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i),$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens; ellenkező esetben X -nek nem létezik várható értéke.

Valószínűségi változó függvényének várható értéke.

Legyen X egy diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, és legyen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Ekkor az $g(X)$ várható értéke

$$\mathbb{E}(g(X)) := \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot \mathbb{P}(X = x_i).$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens; ellenkező esetben $g(X)$ -nek nem létezik várható értéke.

A várható érték linearitása.

Legyenek X és Y valószínűségi változók véges várható értékkel, valamint legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\mathbb{E}(aX + b) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b$$

és

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Szórásnégyzet.

Egy X valószínűségi változó szórásnégyzete

$$\mathbb{D}^2(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2,$$

amennyiben ez létezik.

Szórás.

Egy X valószínűségi változó szórása $\mathbb{D}(X) := \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$, amennyiben ez létezik.

A szórás „nemlinearitása”.

Legyen X egy valószínűségi változó és $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\mathbb{D}^2(aX + b) = a^2 \cdot \mathbb{D}^2(X), \quad \text{azaz} \quad \mathbb{D}(aX + b) = |a| \cdot \mathbb{D}(X)$$

amennyiben ezek léteznek.

A binomiális eloszlás approximációja Poisson-eloszlással.

Legyen $\lambda > 0$ rögzített, és legyen n „nagy”. Ekkor a $\text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$ eloszlás „közelíthető” egy $\text{Poi}(\lambda)$ eloszlással.

Eloszlás	Jelölés	Értékkészlet	$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikátor	$\text{Ind}(p)$	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ és $\mathbb{P}(X = 1) = p$	p	$p(1 - p)$
Binomiális	$\text{Bin}(n, p)$	$\{0, 1, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$
Geometriai	$\text{Geo}(p)$	$\{1, 2, \dots\}$	$(1 - p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1 - p}{p^2}$
Poisson	$\text{Poi}(\lambda)$	$\{0, 1, \dots\}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ

1. Két szabályos dobókockával dobva mi a dobott számok maximumának várható értéke és szórása?

2. Legyen X egy Poisson-eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel, és legyen $Y = 2X + 1$. Adjuk meg Y szórásnégyzetét.
3. Egy X valószínűségi változó várható értéke $\mathbb{E}(X) = 1$ és szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(X) = 5$. Határozzuk meg az alábbi értékeket.
 - (a) $\mathbb{E}(X^2)$,
 - (b) $\mathbb{E}((X + 2)^2)$,
 - (c) $\mathbb{D}^2(3X + 4)$
4. Egy szabályos dobókocka feldobását az első hatosnál kisebb eredményig ismételjük. Jelölje X az ehhez szükséges dobások számát (beleértve az első nem hatos dobást is).
 - (a) Mi a valószínűsége, hogy a kockát legalább háromszor fel kell dobnunk?
 - (b) Határozzuk meg X szórását és X^2 várható értékét.
 - (c) Feltéve, hogy hét dobás után még nem sikerült egyszer sem hatosnál kisebbet dobnunk, mi a valószínűsége, hogy az utána következő két dobásban sem sikerül?
5. Egy érmevel addig dobunk, amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás értéke azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke és szórása?
6. Egy izzógyár mérnökei megfigyelték, hogy minél több izzót gyártanak egy napon, annál kisebb valószínűséggel lesz hibás egy-egy izzó. Ha egy napon $n \geq 1$ darab izzót készítenek, akkor minden izzó egymástól függetlenül $\frac{1}{2n}$ valószínűséggel lesz hibás.
 - (a) Ha egy napon $n = 10$ izzót gyártanak, akkor mennyi az aznap gyártott hibás izzók számának várható értéke és szórásnégyzete?
 - (b) Ha $n = 10$, akkor mi a valószínűsége annak, hogy 4-nél több, de 8-nál kevesebb izzó lesz hibás a 10 izzó közül?
 - (c) Tegyük fel, hogy egy napon n izzót gyártanak, ahol n nagyon nagy. Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy az adott napon pontosan 3 izzó lesz hibás.
7. Egy kari tudományos diákköri konferenciára 150 hallgató jelentkezett a jelentkezési határidőig.
 - (a) A tapasztalatok szerint a jelentkezett hallgatók mindegyike 95% valószínűséggel ad be ténylegesen pályaművet a konferenciára, a többi hallgatótól függetlenül (és csak az adhat be pályaművet, aki jelentkezett). Mi a valószínűsége, hogy a jelentkezett 150 hallgató közül legfeljebb kettő lesz, aki nem ad be pályaművet?
 - (b) Erről a konferenciáról a legsikeresebb hallgatók továbbjutnak az országos tudományos diákköri konferenciára, amelyen nagyon sok hallgató vesz részt, de csak egy nagyon kis részük nyer első díjat. Jelöljük az itt első díjban részesülők számát Y -nal. Tudjuk, hogy Y várható értéke 6 fő. Határozzuk meg Y szórásnégyzetét és a $\mathbb{P}(Y > 2)$ valószínűséget.
8. Egy szabályos dobókockával addig dobunk, amíg a dobott értékek között meg nem jelenik az 1, 2, 3 részsorozat (ebben a sorrendben, de nem feltétlenül egymás után). Mennyi a dobások számának várható értéke?
9. Egy $N \geq 2$ tagú társaságban mindenki felírja a saját nevét egy-egy cetlire, ezeket egy kalapba rakják, majd mindenki véletlenszerűen húz egy cetlit a kalapból (visszatevés nélkül).
 - (a) Az N ember között szerepel Anna és Béla. Mi a valószínűsége, hogy ők egymás nevét húzzák?
 - (b) Mi a várható értéke azon párok számának, akik egymás nevét húzzák?

IMSc-pontos feladat.

4. Legyen X egy Poisson-eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel.
 - (a) Határozzuk meg e^{2025X} várható értékét.
 - (b) Adjunk meg egy olyan f nemnegatív függvényt, amelyre $\mathbb{E}(f(X)) = \infty$.