

Független események, feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel
VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS ÉS STATISZTIKA
2. gyakorlat
2025.

Független események.

Az A és B eseményeket függetleneknek nevezzük, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Állítás.

Ha az A és B események függetlenek, akkor A és $\overline{B}$ is függetlenek.

Együttesen független események.

Az $A_1, \dots, A_n$ eseményeket együttesen függetleneknek nevezzük, ha minden $I \subseteq [n]$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Feltételes valószínűség.

Legyen B egy pozitív valószínűségű esemény. Egy A esemény B -re vett feltételes valószínűsége

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Egyszerű Bayes-tétel.

Legyenek A és B tetszőleges pozitív valószínűségű események. Ekkor

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Teljes eseményrendszer.

A $B_1, \dots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ esetén $B_i \cap B_j = \emptyset$, valamint $\bigcap_{i=1}^n B_i = \Omega$, ahol Ω a teljes eseménytér jelöli.

Teljes valószínűség tétele.

Legyen $B_1, \dots, B_n$ teljes eseményrendszer pozitív valószínűségű eseményekkel. Ekkor tetszőleges A eseményre

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Szorzási szabály.

Legyenek $A_1, \dots, A_n$ pozitív valószínűségű események. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \prod_{i=2}^n \mathbb{P}\left(A_i \left| \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right.\right).$$

1. Feldobunk egy szabályos dobókockát. Legyen A az az esemény, hogy a dobott szám prím, B az az esemény, hogy a dobott szám páros, C pedig az, hogy a dobott szám legfeljebb 4.
 - (a) Függetlenek-e az A és C események?
 - (b) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(A|B)$ valószínűséget.
2. Számoljuk ki annak a feltételes valószínűségét, hogy két szabályos dobókockával dobva mindkét érték páros feltéve, hogy összegük legalább tíz.
3. Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzérmét. Legyen A az az esemény, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Függetlenek-e az A és B események?

4. Tegyük fel, hogy az A , B és C együttesen független eseményekre $\mathbb{P}(A) = 0,3$ és $\mathbb{P}(B) = 0,4$ és $\mathbb{P}(C) = 0,8$ teljesül. Mekkora a valószínűsége, hogy
 - (a) mindhárom esemény egyszerre bekövetkezik;
 - (b) a három esemény közül legalább az egyik bekövetkezik?
5. Tegyük fel, hogy az A és B események közül legalább az egyik mindig bekövetkezik, valamint $\mathbb{P}(A|B) = 0,2$ és $\mathbb{P}(B|A) = 0,5$.
 - (a) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(A)$ és $\mathbb{P}(B)$ és $\mathbb{P}(A | \overline{B})$ valószínűségeket.
 - (b) Függetlenek-e az A és B események?
6. Húzzunk egy lapot egy 52-lapos franciákártya-csomagból; ha a húzott lap pikk, akkor egyszer, egyébként pedig kétszer dobunk fel egy szabályos dobókockát. Mekkora valószínűséggel lesz 6-os dobás?
7. Feldobunk egy szabályos kockát, majd egy szabályos érmét annyiszor, amennyit a kocka mutat.
 - (a) Mennyi a valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk fejet?
 - (b) Feltéve, hogy egyszer sem dobunk fejet, mennyi a valószínűsége, hogy a kockával 6-ost dobtunk?
8. Egy vizsgakérdésre három lehetséges válasz van. Egy hallgató p valószínűséggel tudja a kérdésre a helyes választ (és ekkor a helyes választ is fogja kiválasztani), míg ha nem tudja a választ, úgy egyenlő valószínűséggel választ a három lehetséges válasz közül. Feltéve, hogy helyesen válaszolt a hallgató, mekkora a valószínűsége, hogy tényleg tudta a választ?
9. Egy 52-lapos franciákártya-csomagot véletlenszerűen szétosztunk négy játékos között úgy, hogy minden játékos 13 lapot kap. Mi a valószínűsége, hogy a négy ász négy különböző játékoshoz kerül?
10. Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Három játékhoz kiveszünk taláalomra három-három labdát, de minden játék után visszarakjuk azokat a rekeszbe. (Nyilván egy játék során egy korábban használatlan labda használttá fog válni.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom kivételhez egy új és 2 használt labda kerül a kezünkbe?
11. Egy erdőben kétfajta macskaféle fordul elő nagyon nagy példányszámban: házi macska és vadmacska. A vadmacskák a macskafélék teljes állományának tíz százalékát alkotják. Az összes vadmacska cirmos, továbbá öt házi macskából átlagosan egy példány cirmos.
 - (a) Véletlenszerűen kiválasztva az erdőből egy macskafélét, mi a valószínűsége, hogy az cirmos?
 - (b) Az erdőben véletlenszerűen meglátunk egy cirmost. Mi a valószínűsége, hogy házi macska?
 - (c) Az erdőből véletlenszerűen kiválasztunk egy macskafélét. Jelölje A azt az eseményt, hogy a kiválasztott macskaféle nem cirmos, B pedig azt, hogy a kiválasztott macskaféle házi macska. Független-e A és B ?
12. Feldobunk két szabályos dobókockát, és jelölje k a dobott 6-osok számát. Egy kezdetben üres urnába k darab piros és $2 - k$ darab kék golyót teszünk, majd kétszer húzzunk visszatevéssel. Feltéve, hogy mindkét húzásra piros golyót húztunk, mi k legvalószínűbb értéke?

IMSc-pontos feladat.

2. (a) Két azonos erejű játékos, Ádám és Éva pingpongoznak. Tekintsük az

$$A = \{\text{Ádám négy meccsből pontosan hármat megnyer}\},$$

$$B = \{\text{Éva nyolc meccsből pontosan ötöt megnyer}\}.$$

Melyik esemény valószínűbb?

- (b) Három szabályos dobókockával dobva mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 10-nél nagyobb? (Számolás nélkül is megoldható a feladat.)