

BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 1

1 1/2. konzultáció

2025.

1. Mely 1 és 111 közötti egész számok 1111-szerese ad 11 maradékot 2020-szal osztva?
2. Az n pozitív egész utolsó két számjegye a 4-es és az 5-ös számrendszerben is 11. Mi n utolsó két számjegye a 10-es számrendszerben?
3. Milyen maradékot ad 70-nel osztva 4^{74} ?
4. Mutassuk meg, hogy $1010^{1343} - 2$ osztható 2019-cel. (Segítségül: 2019 prímtényező felbontása: $2019 = 3 \cdot 673$.)
5. Legyen $n = 987654321$. Az előadáson tanult megfelelő algoritmus alkalmazásával határozzuk meg $98n + 27$ és $76n + 21$ legnagyobb közös osztóját.
6. Az előadáson tanult megfelelő algoritmus alkalmazásával határozzuk meg 10^{70} maradékát 46-tal osztva.
7. Mely a valós számokra teljesül, hogy az $ax + 2y + 3z = 4$ egyenletű síknak és az

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{4}$$
 egyenletrendszerű egyenesnek nincsen közös pontja?
8. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(1; 3; 4)$ és a $Q(3; 6; 10)$ pontokon és párhuzamos az

$$\frac{x-9}{3} = y+4 = \frac{z}{5}$$
 egyenletrendszerű egyenessel.
9. Az $\mathbb{R}^5$ -beli W halmaz álljon azokból a vektorokból, amelyekben a harmadiktól kezdve mindegyik elem a fölötte álló két elem átlaga. Igaz-e, hogy W altér?
10. Nevezzünk egy vektort félig számtaninak, ha bármely két egymás alatt álló elemének a különbsége legfeljebb két különböző értéket vesz fel. Igaz-e, hogy az $\mathbb{R}^5$ -beli félig számtani sorozatok alteret alkotnak?
11. Legyenek V és W tetszőleges alterek $\mathbb{R}^n$ -ben. Mutassuk meg, hogy ekkor $V \cap W$ is altér $\mathbb{R}^n$ -ben.
12. Határozzuk meg a p valós paraméter minden olyan értékét, melyre az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^4$ vektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorrendszer lineárisan független $\mathbb{R}^n$ -ben. Következik-e ebből, hogy a $2\underline{a}, \underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \underline{c}$ rendszer is lineárisan független?
14. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ az alábbi $\mathbb{R}^4$ -beli vektorok. Határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generált altér összes olyan elemét, aminek az első és harmadik koordinátája azonos, a negyedik koordinátája pedig 5-tel nagyobb a másodikonál.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

15. Legyen V egy altér $\mathbb{R}^n$ -ben, illetve legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ olyan vektorok, amelyekre $\underline{a} \in V$ és $\underline{b} \notin V$ és $\underline{c} \notin V$ teljesül. Döntsük el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy biztosan igazak, biztosan hamisak, vagy lehetnek igazak és hamisak is ($\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ és V választásától függően).

(a) $2\underline{c} \in V$

(b) $\underline{a} + \underline{b} \in V$

(c) $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} \in V$