

Determináns

BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 1

9. gyakorlat

2025.

Permutáció.

Az n -tagú $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ számsorozatot permutációnak nevezzük, ha az $1, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az n -edfokú permutációk halmazát S_n jelöli.

Inverzió.

A $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ permutációban a π_i és a π_j tagok inverzióban állnak, ha $i < j$, de $\pi_i > \pi_j$. A π permutáció inverziószáma az összes inverzióban álló számpárok száma. Ennek jele $I(\pi)$.

Determináns.

Az $n \times n$ -es A mátrix determinánsának a $\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(i)}$ értéket nevezzük.

Tétel.

Legyen A egy $(n \times n)$ -es mátrix. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

- (i) Ha A felső/alsó háromszögmátrix, akkor $\det(A)$ a főátlóbeli elemek szorzata.
- (ii) Ha A egy sora/oszlopa csupa nulla, akkor $\det(A) = 0$.
- (iii) Ha A egy sorát/oszlopát λ -val végigszorozzuk, akkor a determináns is λ -val szorzódik.
- (iv) Ha A két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.
- (v) Ha A két sora/oszlopa megegyezik, akkor $\det(A) = 0$.
- (vi) Ha A egy sorának/oszlopának λ -szorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz/oszlophoz, akkor a determináns nem változik.

Tétel.

Legyenek A, B, C $(n \times n)$ -es mátrixok és legyen $i \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges. Ha az A, B, C mátrixok az i -edik sorukat leszámítva megegyeznek, valamint a C mátrix sora éppen az A és a B mátrix i -edik sorának a tagonkénti összege, akkor $\det C = \det A + \det B$.

1. Határozzuk meg az alábbi permutációk inverziószámát.

(a) $(1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$

(c) $(21, 22, \dots, 30, 11, 12, \dots, 20, 1, 2, \dots, 10)$

(b) $(n, n-1, \dots, 2, 1)$

2. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét a determináns definíciója szerint.

(a)

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & -2 & -6 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

3. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét.

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 11 & -7 \\ -3 & 9 & -5 & -9 & 5 \\ 4 & -12 & 8 & 13 & -2 \\ 5 & -11 & 10 & -1 & -12 \end{vmatrix}$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

4. Határozzuk meg minden $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén azon $(n \times n)$ -es A mátrix determinánsát, melyben tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén az i -edik sor és a j -edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$(a) \quad (b) \quad a_{ij} = i^2 j^2 + 1; \quad (c)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i \neq j; \end{cases} \quad a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

5. Legyen A egy nem 0-determinánsú, (9×9) -es mátrix, A' pedig az a mátrix, amit A -ból az első sor λ -val való szorzásával kapunk. Mennyi lehet λ értéke, ha tudjuk, hogy $\det(A') = \det(\lambda A)$?

6. A jobbra látható determináns definíció szerinti kiszámításakor

- (a) hány nemnulla szorzat keletkezik;

- (b) milyen előjelet kap az a szorzat, amelynek az egyik tényezője 3?

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

7. Határozzuk meg $(\det A + \det B)$ értékét, ahol A és B az alábbi mátrixok.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

8. Futtassuk a Gauss-eliminációnak a determináns kiszámítására szolgáló változatát az alábbi bemenetre és adjuk meg a determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} -2 & -6 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -9 & -14 & -2 \\ 4 & 13 & 22 & -1 \end{vmatrix}$$

9. A (6×6) -os A mátrix főátlójában és alatta minden elem 1-es, a jobb felső sarkában álló elem 2018, a mátrix összes többi (14 darab) eleme pedig 0. Határozzuk meg A determinánsát.
10. Legyen $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ az $1, 2, \dots, n$ számok egy tetszőleges permutációja. Készítsük el az $(n \times n)$ -es A mátrixot a következőképpen: minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén a mátrix i -edik sorában a $\pi(i)$ -edik helyen és attól jobbra mindenhol álljon 1-es, a $\pi(i)$ -edik helytől balra pedig mindenhol álljon 0. Határozzuk meg A determinánsát.
11. Egy (101×101) -es A mátrixban az i -edik sor és a j -edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij} = \begin{cases} 3^{2004}\text{-nek a } (2i + j)\text{-edik számjegye,} & \text{ha } i \cdot j \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } i \cdot j \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Határozzuk meg A determinánsát.

12. Az alábbi A mátrixra $\det A = 45653$. Mennyi $\det B$ értéke?

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 8 & 3 & 0 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 7 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

13. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0.$$

14. Egy $(n \times n)$ -es mátrix minden eleme 1 vagy -1 . Bizonyítsuk be, hogy a determinánsa osztható 2^{n-1} -nel.
15. Az $(n \times n)$ -es A mátrixra $A + A^2 + A^3 = 0$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor $\det A = 0$ vagy $\det A = 1$.