

# Altér, generátorrendszer, lineáris függetlenség

## BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 1

### 6. gyakorlat

2025.

#### Lineáris kombináció.

Legyen  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$  és  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ . A  $\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k$  vektort a  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  vektorok  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

#### Generált altér.

Legyen  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ . A

$$\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle := \{ \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \}$$

halmazt a  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  vektorok által generált altérnek nevezzük.

#### Lineáris függetlenség.

A  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$  vektorrendszerrel azt mondjuk, hogy lineárisan független, ha

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0} \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0;$$

ellenkező esetben lineárisan összefüggő vektorrendszerrel beszélünk.

#### Az újonnan érkező vektor lemmája.

Ha az  $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_k$  rendszer lineárisan független, de az  $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_k, \underline{f}_{k+1}$  rendszer lineárisan összefüggő, akkor  $\underline{f}_{k+1} \in \langle \underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_k \rangle$  (vagyis  $\underline{f}_{k+1}$  kifejezhető az  $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_k$  lineáris kombinációjaként).

1. Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

(a)  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$

(b)  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$

(c)  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$

2. Az  $\mathbb{R}^4$  mely vektorai fejezhető ki az  $(1, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 1)$  vektorokból?

3. Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

(a)  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$

(b)  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{e}$

(c)  $\underline{u}, \underline{e}$

(d)  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{e}$

4. Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek és határozzuk meg az általuk generált altér egyenletét.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

5. A  $p$  valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek-e az alábbi,  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ p \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

6. Generátorrendszert alkotnak-e az alábbi,  $\mathbb{R}^3$ -beli vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7. Legyen  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineárisan független vektorrendszer egy tetszőleges vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az  $\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \underline{c}, \underline{b} + \underline{c}$  vektorrendszer is lineárisan független.

8. Az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$  vektorok lineárisan függetlenek. Következik-e ebből, hogy a  $3\underline{a} - \underline{b}, 2\underline{a} + \underline{c}$  és  $4\underline{b} - 3\underline{c}$  vektorok is mindig lineárisan függetlenek?

9. Legyenek  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  tetszőleges  $\mathbb{R}^n$ -beli vektorok (valamely  $n$  pozitív egész számra) és legyen  $\underline{u} = \underline{a} + \underline{b}, \underline{v} = \underline{b} - \underline{c}$  és  $\underline{w} = \underline{c} + 2\underline{a}$ . Igazak-e az alábbi állítások?

(a) Ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineárisan független, akkor  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$  is lineárisan független.

(b) Ha  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  is lineárisan független.

10. Tegyük fel, hogy az  $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_m$  vektorok között pontosan egy olyan van, ami kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Mutassuk meg, hogy ekkor ez a vektor csakis a nullvektor lehet.

11. Az  $\mathbb{R}^n$ -beli  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  vektorokról tudjuk, hogy az összegük a nullvektor. Bizonyítsuk be, hogy

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{k-1} \rangle = \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_k \rangle.$$

12. Az  $\mathbb{R}^n$ -beli  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$  vektorokról tudjuk, hogy  $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$  és  $\underline{a} \notin \langle \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ . Döntsük el, hogy az alábbi állítások mindegyikéről, hogy biztosan igazak, biztosan hamisak, vagy lehetnek igazak és hamisak is ( $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  és  $\underline{d}$  választásától függően).

(a)  $\underline{d} \in \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle$

(b)  $\underline{b} \in \langle \underline{c}, \underline{d} \rangle$

13. Tegyük fel, hogy az ( $\mathbb{R}^n$ -beli)  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{10}$  vektorok lineárisan összefüggők, de közülük bármely 9-et kiválasztva lineárisan független vektorrendszert kapunk. Mutassuk meg, hogy a  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{10}$  vektorok bármely  $\underline{0}$ -t adó lineáris kombinációjában vagy mindegyik együttható 0 vagy egyik együttható sem 0. (Azaz: mutassuk meg, hogy  $\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + \lambda_{10} \cdot \underline{v}_{10} = \underline{0}$  esetén  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{10} = 0$  vagy  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_{10} \neq 0$  teljesül.)

14. Az  $\mathbb{R}^n$ -beli  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$  vektorokról tudjuk, hogy az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  vektorok lineárisan függetlenek, de az  $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{a} - \underline{b} - 3\underline{d}, \underline{a} + \underline{c} + 5\underline{d}$  vektorok lineárisan összefüggők. Következik-e ebből, hogy  $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ ?