

Térbeli koordinátageometria
BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 1
5. gyakorlat
2025.

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere.

Adott $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ és $P \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. A P ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenes egyenletrendszere.

Adott $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ és $P \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Ha $a, b, c \neq 0$, akkor a P ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Ha például $c = 0$, akkor az egyenes egyenletrendszere

$$\left. \begin{aligned} \frac{x - x_0}{a} &= \frac{y - y_0}{b} \\ z &= z_0 \end{aligned} \right\}.$$

A sík egyenlete.

Adott $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ és $P \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. A P ponton átmenő, $\underline{n}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0.$$

Altér.

A $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ részhalmazt az $\mathbb{R}^n$ egy alterének nevezzük, ha V zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve.

1. Tartalmazza-e az $R(1; 3; 4)$ pontot az a sík, amelyet a $P(1; 7; -1)$ és a $Q(11; 9; -5)$ pontokat összekötő egyenes a P -ben merőlegesen dőf?

2. Határozzuk meg az $S: 2x - 3y + 4z = 3$ sík és a következő egyenesek metszetét.

$$(a) \left. \begin{aligned} x &= 11 + 2t \\ y &= -t \\ z &= 29 + 5t \end{aligned} \right\} \quad (b) \frac{x - 2}{6} = \frac{y + 1}{8} = \frac{z + 1}{3}$$

3. Határozzuk meg az $x + y + z = 5$ és a $2x - y - 2z = 3$ egyenletű síkok metszetét.

4. Az e egyenesről tudjuk, hogy merőlegesen dőfi az $x + 2y + 3z = 6$ egyenletű síkot az $(1; 1; 1)$ pontban, az f egyenesről pedig, hogy átmegy az $(5; 2; -1)$ ponton és a $(13; 4; -5)$ ponton. Döntsük el, hogy e -nek és f -nek van-e közös pontja.

5. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékére lesz az

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{4} = \frac{z}{3} \quad \text{és az} \quad \frac{x - 3}{2} = \frac{y - p}{3} = \frac{z}{4}$$

egyenletrendszerű egyeneseknek közös pontja.

6. A p valós paraméter minden lehetséges értékére döntsük el, hogy az alábbi egyenletrendszerű e és f egyenesek

(a) párhuzamosak-e;

(b) merőlegesek-e.

$$e: \frac{2-x}{4} = \frac{y-7}{p} = \frac{z-6}{3}, \quad f: \frac{x+9}{2} = 2y = \frac{5-2z}{3}$$

7. Párhuzamos-e az

$$\frac{5x+3}{10} = \frac{4-y}{5} = \frac{5-2z}{2}$$

egyenletrendszerű egyenes a $6x+y+7z=91$, illetve az $5x+2y=79$ egyenletű síkok metszéspontjával?

8. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, ami tartalmazza az e egyenest és nincs közös pontja az f egyenessel, ahol e és f egyenletrendszerei az alábbiak.

$$e: \frac{x-1}{2} = 5-y, \quad z=2; \quad f: \frac{x}{7} = \frac{1-2y}{12} = 8-z$$

9. Egy szabályos téglatest alakú láda sík felületű, lejtős talajon áll. A láda $A(1;4;2)$ csúcsa a talajon van, az ezzel szomszédos $B(4;2;1)$ csúcsa viszont nincs a talajon. Metszi-e a talaj síkja a z -tengelyt? Ha igen, hol?

10. Határozzuk meg az

$$x-4 = \frac{y+5}{4} = \frac{2-z}{3}$$

egyenletrendszerű e egyenes minden olyan P pontját, amelyre a P -t a $Q(7;12;4)$ ponttal összekötő f egyenes merőleges e -re.

11. Határozzuk meg a p paraméter értékét és írjuk fel az S sík egyenletét, ha tudjuk, hogy S tartalmazza az $A(1;2;2)$ és $B(3;4;1)$ pontokat és merőleges arra az e egyenesre, aminek az egyenletrendszere

$$\frac{2x-7}{12} = \frac{8-y}{5} = \frac{z}{p}.$$

12. Van-e az $A(-1;-2;1)$, $B(3;1;3)$ és $C(7;6;3)$ pontokat tartalmazó síknak olyan pontja, amely az y -tengelyre esik? Ha igen, melyik?

13. Átmegy-e az origón az az S sík, amely tartalmazza a $P(2;-1;4)$ pontot és az $\frac{x-1}{4} = \frac{1-y}{5} = \frac{z-3}{6}$ egyenletrendszerű e egyenest?

14. Határozzuk meg a térben az $\frac{x+3}{5} = \frac{y+1}{9} = z$ egyenletrendszerű e és az $\frac{x}{4} = \frac{y+8}{6}$, $z=7$ egyenletrendszerű f egyenesek normáltranszverzálisának az egyenletrendszerét – vagyis azét az n egyenesét, amely e -t és f -et is merőlegesen metszi.

15. Döntsük el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

$$(a) \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) \middle| x_3 = 0 \right\}$$

$$(b) \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) \middle| x_2 = 1 \right\}$$

16. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$ -ben azok a vektorok, melyek koordinátái (felülről lefelé)

(a) számtani sorozatot alkotnak;

(b) mértani sorozatot alkotnak?