

Kongruenciák
BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 1
2. gyakorlat
2025.

Tétel.

Legyenek $a, b, c, d, m, k \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $k \geq 1$ tetszőlegesek.

Ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $c \equiv d \pmod{m}$, akkor az alábbiak teljesülnek.

- (i) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
- (ii) $a - c \equiv b - d \pmod{m}$
- (iii) $ac \equiv bd \pmod{m}$
- (iv) $a^k \equiv b^k \pmod{m}$

Tétel.

Legyenek $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ tetszőlegesek, és legyen $d = (c, m)$. Ekkor

$$ac \equiv bc \pmod{m} \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}.$$

Tétel.

Az $ax \equiv b \pmod{m}$ lineáris kongruencia akkor és csak akkor oldható meg, ha $(a, m) \mid b$ teljesül; és ha megoldható, akkor (a, m) darab megoldás van modulo m .

1. Határozzuk meg az összes olyan x egész számot, amelyre az alábbi kongruenciák (külön-külön) teljesülnek.

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| (a) $13x \equiv 1 \pmod{28}$ | (c) $16x \equiv 64 \pmod{56}$ | (e) $8x \equiv 30 \pmod{28}$ |
| (b) $9x \equiv 1 \pmod{88}$ | (d) $66x \equiv 24 \pmod{36}$ | (f) $77x \equiv 251 \pmod{35}$ |

2. Oldjuk meg az alábbi feladatokat.

- (a) Milyen maradékot adhat egy egész szám 98-cal osztva, ha a 78-szorosa 6 maradékot ad 98-cal osztva?
- (b) Egy egész szám 109-cel vett osztási maradéka 5-tel kisebb, mint a szám 18-szorosának a 109-cel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 109-cel osztva?
- (c) Az n pozitív egész számra $43n - 1$ utolsó két számjegye megegyezik $2n + 2$ utolsó két számjegyével. Mi ez a két számjegy?
- (d) Hány olyan egész szám van 1 és 10000 között, aminek az utolsó két számjegye (a tízes számrendszerben) 34 és a hexadecimális alakjának az utolsó jegye E?
- (e) Határozzuk meg az összes olyan háromjegyű, pozitív egész számot, amelynek a 7-es és 8-as számrendszerbeli alakjának az utolsó két számjegye is 11.

3. Oldjuk meg az alábbi feladatokat.

- (a) Egy százlábú meg akarja számolni a lábait. Azt tudja biológiából, hogy minden százlábúnak legfeljebb 344 lába van. Ha 13-asával számolja a lábait, akkor 3 marad ki, ha 17-esével számolja, akkor viszont 10 marad ki. Hánylábú a százlábú?

- (b) Egy helyi cukrászda úgy dönt, hogy előre csomagolt díszdobozokban, akciósan értékesíti a karácsony előtttről megmaradt szaloncukrot, amiknek számáról csak azt tudják, hogy 400 és 600 közötti. Amikor tizenkettesével próbálják dobozolni a cukrokat, akkor hét cukor megmarad. Amikor viszont ehelyett ötvenes megapakkokkal próbálkoznak, akkor az utolsó dobozba épp eggyel kevesebb jut a szükségesnél. Hány szaloncukor marad meg, ha tizenhatosával dobozolják őket?
4. Adjuk meg az összes olyan n egész számot 1 és 2023 között, amire az $\frac{n-2}{21}$ tört és az $\frac{n-5}{166}$ tört értéke is egész szám.
5. Hány olyan szám van 1 és 10000 között, mely osztható 7-tel és 8-cal is, a 22-vel vett osztási maradéka pedig 10?
6. A Nagy Piréz Rendszer harmadik bolygóján ősidők óta minden hónap 29-napos, az év végén visszamaradó 22 napot pedig a messzeföldön híres piréz kumisz mértéktelen fogyasztásával töltik a lakosok. A Piréz Nemzeti Bank mélyreható elemzése azonban nemrég kimutatta, hogy a gazdaság teljesítményére az év végi 22-napos szünet kedvezőtlen hatással van, ezért bevezetik a 32-napos hónapot, így a hónapokból kimaradó napok száma 5-re csökken. Hány napból áll az év a harmadik bolygón, ha tudjuk, hogy a negyedik bolygó éve (ami persze hosszabb a harmadikénál) 1000-napos?
7. Egy egész szám 17-szerese 23 maradékot ad 65-tel osztva. Mennyi maradékot adhat a szám 130-cal osztva?
8. Egy n egész szám 3 maradékot ad 82-vel osztva. Milyen maradékot adhat az n szám 182-vel osztva?
9. Legyenek a, b_1, b_2, m egész számok és $m > 1$. Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül: az állítás biztosan igaz; vagy az állítás biztosan hamis; vagy az állítás lehet igaz és hamis is (a, b_1, b_2, m választásától függően).
- (a) Ha az $ax \equiv b_1 \pmod{m}$ és az $ax \equiv b_2 \pmod{m}$ lineáris kongruenciák megoldhatóak, akkor az $ax \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$ lineáris kongruencia is.
- (b) Ha az $ax \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m}$ lineáris kongruencia megoldható, akkor az $ax \equiv b_1 \pmod{m}$ és az $ax \equiv b_2 \pmod{m}$ lineáris kongruenciák is.
10. Milyen maradékot ad
- (a) a $70^{70} + 68^{68}$ szám 23-mal osztva;
- (b) a 55^{100} szám 48-cal osztva;
- (c) a 1025^{1005} szám 1023-mal osztva;
- (d) a $65^{63^{61}}$ szám 66-tal osztva?
11. Mennyi maradékot ad a $6 \cdot 10^{23}$ szám 9998-cal osztva?
12. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c és d egész számokra
- $$(a + b, c + d) \mid a^{99}c^{100} + b^{99}d^{100}.$$