

Számelmélet
BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 1
1. gyakorlat
2025.

Definíció.

Legyenek $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ tetszőlegesen. Azt mondjuk, hogy a kongruens b -vel modulo m , ha a és b azonos maradékot ad m -mel osztva. Ennek a jele $a \equiv b \pmod{m}$.

Állítás.

Legyenek $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ tetszőlegesen. Ekkor $a \equiv b \pmod{m}$ pontosan akkor teljesül, ha $m \mid b - a$.

Néhány azonosság.

Tetszőleges a, b valós számok és $n > 1$ egész szám esetén

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Tetszőleges a, b valós számok és $n > 1$ páratlan szám esetén

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Pozitív osztók száma.

Legyen az $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ szám kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Ekkor az n pozitív osztóinak a száma $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$.

1. Igazak-e az alábbi állítások?

- | | |
|---|--|
| (a) $100 \equiv 43 \pmod{19}$ | (h) $4321^2 \equiv 1234^2 \pmod{5555}$ |
| (b) $70 \equiv 92 \pmod{6}$ | (i) $42^3 \equiv 25^3 \pmod{17}$ |
| (c) $1234567 \equiv 7654321 \pmod{9}$ | (j) $81 \cdot 10^{23} \equiv 43 \cdot 10^{23} \pmod{19}$ |
| (d) $13 \equiv -13 \pmod{5}$ | (k) $22^{33} + 24 \equiv 25 \pmod{11^{12}}$ |
| (e) $50 \equiv -17 \pmod{11}$ | (l) $123_{\textcircled{7}} \equiv 123_{\textcircled{8}} \pmod{18}$ |
| (f) $-4 \equiv 22 \pmod{13}$ | (m) $110110101_{\textcircled{2}} \equiv 1000101101_{\textcircled{2}} \pmod{8}$ |
| (g) $21^{1000} \equiv 0 \pmod{7^{100}}$ | |

2. Az x egész számra $x \equiv 7 \pmod{555}$ teljesül. Igazak-e az alábbi állítások?

- | | |
|-----------------------------------|---|
| (a) $x \equiv 7 \pmod{111}$ | (e) $3x \equiv 21 \pmod{1665}$ |
| (b) $x \equiv 7 \pmod{1665}$ | (f) $x^2 \equiv 49 \pmod{555}$ |
| (c) $x + 10 \equiv 17 \pmod{555}$ | (g) $x^{100} \equiv 7^{100} \pmod{555}$ |
| (d) $3x \equiv 21 \pmod{555}$ | (h) $2^x \equiv 2^7 \pmod{555}$ |

3. Mely pozitív egész m számokra teljesülnek az alábbi állítások?

- | | |
|---------------------------------|--|
| (a) $149 \equiv 139 \pmod{m}$ | (c) $13 \equiv 613 \pmod{m}$ és $23 \equiv 617 \pmod{m}$ |
| (b) $2021 \equiv 2022 \pmod{m}$ | (d) $7m + 61 \equiv 4m + 76 \pmod{m}$ |

4. Melyik az a legnagyobb m modulus, amelyre a $42x \equiv 2015 \pmod{m}$ kongruenciának megoldása az $x = 3$?

5. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e minden n egész számra.
 - (a) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{13}$, akkor $n \equiv \pm 1 \pmod{13}$.
 - (b) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv \pm 1 \pmod{39}$.
 - (c) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv \pm 1 \pmod{13}$.
6. Írjuk fel az alábbi feltételeket egy-egy kongruencia segítségével.
 - (a) Egy szám 78-szorosa 6 maradékot ad 98-cal osztva.
 - (b) Egy szám 109-cel vett osztási maradéka 5-tel kisebb, mint a szám 18-szorosának a 109-cel vett osztási maradéka.
 - (c) Az n egész számra $43n - 1$ utolsó két számjegye megegyezik $2n + 2$ utolsó két számjegyével.
 - (d) Egy szám hexadecimális alakjának utolsó jegye E.
 - (e) Egy szám 7-es számrendszerbeli alakjának utolsó két számjegye 11.
7. Írjuk fel egy kongruenciarendszerrel az alábbiakat.
 - (a) Egy százlábú meg akarja számolni a lábait: ha 13-asával számolja a lábait, akkor 3 marad ki, ha 17-esével számolja, akkor viszont 10 marad ki.
 - (b) Egy helyi cukrászda előre csomagolt díszdobozokban, akciósan értékesíti a karácsony előttről megmaradt szaloncukrot. Amikor tizenkettesével próbálják dobozolni a cukrokat, akkor hét cukor megmarad. Amikor viszont ehelyett ötvenes megapakkokkal próbálkoznak, akkor az utolsó dobozba épp eggyel kevesebb jut a szükségesnél.
8.
 - (a) Hány pozitív osztója van a 27000-nek?
 - (b) Hány olyan pozitív osztója van a 27000-nek, ami osztható 3-mal?
 - (c) Hány olyan pozitív osztója van a 27000-nek, ami négyzetszám?
 - (d) Határozzuk meg a 27000 és az 16200 közös pozitív osztóinak a számát.
9. Hány olyan egész szám van 1 és 1000 között, aminek ugyanannyi páros osztója van, mint páratlan?
10. Bizonyítsuk be, hogy ha az $n > 1$ számnak 2005 pozitív osztója van, akkor n nem lehet egy egész szám ötödik hatványa.
11. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre $p + 10$ és $p + 14$ is prím?
12. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $n \geq 1$ egészre $2^n - 1$ prím, akkor n is prím.
13. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $n \geq 1$ egészre $2^n + 1$ prím, akkor n 2-hatvány.
14. Egy faluban száz család él, 1-től 100-ig számozott házakban. A Mikulás megérkezik a krampuszaival a faluba.
 - (a) Az első krampusz minden házba visz egy ajándékot, a második krampusz csak minden második házba visz a jándékot (azaz az elsőbe nem, a másodikba igen, stb.), a harmadik krampusz minden harmadik házba és így tovább, végül az utolsó krampusz már csak az utolsó házba. Hány család kap páratlan sok ajándékot?
 - (b) A következő évben az első krampusz minden házba visz egy ajándékot, a második krampusz minden második házba visz két ajándékot, a harmadik krampusz minden harmadik házba visz három ajándékot és így tovább, végül az századik krampusz a századik házba visz száz ajándékot. Ezúttal hány család kap páratlan sok ajándékot?
15. Melyek az $n^4 + 4$ alakú prímekek (azaz melyek azok a p prímszámok, amelyekhez található olyan n egész szám, hogy $p = n^4 + 4$)?