Zárthelyi dolgozat

A zh 5.+6. feladata 2026/27-ben is vizsgaanyag, de előreláthatólag zh utáni anyag, vizsgafelkészüléshez ajánljuk.

1. Az A, B és C eseményekről tudjuk, hogy A és B közül legalább az egyik mindig bekövetkezik, A és C függetlenek, valamint $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0{,}6$ és $\mathbb{P}(C) = 0{,}1$. Válaszoljuk meg (indoklással!) az alábbi kérdéseket.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy A és C is (egyszerre) bekövetkezik?

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy A és B is (egyszerre) bekövetkezik?

   (c) Mennyi $\mathbb{P}(B|A)$?

   (d) Mennyi a valószínűsége, hogy sem A, sem C nem következik be?

2. Az I épület portáján 2 db kék, 3 db zöld, 1 db fekete és 2 db piros filctoll található. Valszám gyakorlat előtt véletlenszerűen (azonos valószínűséggel) kiválasztunk egyet a filctollak közül, amivel a gyakorlaton írni fogunk a táblára. Tudjuk, hogy egy kék filctoll $\frac{2}{5}$, egy zöld $\frac{1}{4}$, egy fekete $\frac{1}{5}$, egy piros pedig $\frac{1}{10}$ valószínűséggel fogy ki a gyakorlat végére.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy zöld filctollat választunk és az kifogy a gyakorlat végére?

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy a választott filctoll (akármilyen színű legyen is az) kifogy a gyakorlat végére?

   (c) Feltéve, hogy a választott filctoll kifogyott a gyakorlat végére, mi a valószínűsége, hogy piros színű volt?

3. Egy villamosvonalon mindennap egymástól függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel fordul elő üzemzavar.

   (a) 20 napon keresztül mindennap megfigyeljük, hogy aznap előfordult-e üzemzavar a vonalon. Jelölje X azon napok számát a 20 nap közül, amikor előfordult üzemzavar. Adjuk meg X várható értékét és szórását, valamint a $\mathbb{P}(X > 2)$ valószínűséget.

   (b) Egy adott naptól kezdve – nevezzük ezt az 1. napnak – mindennap megfigyeljük, hogy volt-e üzemzavar a vonalon, egészen addig, amíg az első üzemzavart nem tapasztaljuk. Mennyi a valószínűsége, hogy ez az első üzemzavar pontosan a 3. napon fog bekövetkezni? És feltéve, hogy az első három nap egyikén sem volt üzemzavar, mi a valószínűsége, hogy az első öt nap egyikén sem tapasztalunk üzemzavart?

4. Egy kalapba beteszünk egy cédulát, amelyikre a 3-as számot írtuk, és egy olyat, amelyikre a 4-est. Egy másik kalapba pedig egy olyan cédulát teszünk, amelyikre a 2-es számot írtuk, és egy olyat, amelyikre a 3-ast. Véletlenszerűen kihúzunk mindkét kalapból egy-egy számot. Definiáljuk az X és Y valószínűségi változókat a következőképpen: legyen az X valószínűségi változó értéke 2, ha az első kalapból a 4-es számot húztuk ki, különben pedig legyen X értéke 1, Y értéke pedig legyen azon kalapok száma, ahonnan 3-as számot húztunk. (Például ha az első kalapból a 3-as számot húztuk, a másodikból pedig a 2-est, akkor $X = 1$ és $Y = 1$.)

   (a) Határozzuk meg X és Y együttes eloszlását (azaz $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$ értékét minden olyan k-ra és ℓ-re, amire ez a valószínűség pozitív) táblázatos formában.

   (b) Határozzuk meg X és Y peremeloszlásait is.

   (c) Független-e X és Y?

   (d) Határozzuk meg az X^3 (figyelem, harmadik hatvány!) valószínűségi változó várható értékét.

5. Egy X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} ax, & \text{ha } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol a egy alkalmasan választott valós konstans.

(a) Határozzuk meg a értékét.

(b) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

(c) Határozzuk meg X várható értékét.

6. * A $(0; 2)$ nyílt intervallumon találomra (egyenletes eloszlással) választunk egy y véletlen számot. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ síkon azt a derékszögű háromszöget, amely csúcspontjainak koordinátái: $(0, 0)$, $(1, 0)$ és $(0, y)$. Jelölje X ezen háromszög átfogójának hosszúságát (vagyis az $(1, 0)$ és a $(0, y)$ csúcspontok távolságát).

(a) Mi a valószínűsége, hogy X kisebb, mint 2?

(b) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

(c) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét.

(d) Határozzuk meg az $Z := \dfrac{2\sqrt{X^2-1}}{X}$ valószínűségi változó várható értékét. (Z eloszlását nem kötelező meghatározni.)

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$F_X(t)$	$p_X(k)$, $f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor Bernoulli	$\mathbb{1}_A$ $\mathrm{B}(p)$	$\{0, 1\}$		$p_X(0)=1-p$, $p_X(1)=p$ $(p = \mathbb{P}(A))$	p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{Bin}(n; p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$		$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0, 1, 2, \ldots\}$		$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1, 2, \ldots\}$		$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t \in (a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t \in (a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0; \infty)$	$1-e^{-\lambda t}$ (ha $t \in (0;\infty)$)	$\lambda e^{-\lambda t}$ (ha $t \in (0;\infty)$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Tudnivalók: A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. Hivatkozni csak az előadáson elhangzottakra lehet. A zárthelyi első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Pótló zárthelyi dolgozat

A pótzh 5.+6. feladata 2026/27-ben is vizsgaanyag, de előreláthatólag zh utáni anyag, vizsgafelkészüléshez ajánljuk.

1. A $(0;2)$ intervallumon találomra (egyenletes eloszlással) választunk egy valós számot, és ettől függetlenül az $(1;3)$ intervallumon találomra választunk egy másik valós számot. Mennyi a valószínűsége, hogy az $(1;3)$ intervallumon választott szám a nagyobb, de legfeljebb kétszer akkora, mint a $(0;2)$ intervallumon választott szám?

2. Egy kötelezően választható tárgy zárthelyi dolgozatát két teremben írják a hallgatók: az IB027-ben és az IB028-ban. A zh-t az IB027-ben 45 magyaros és 15 németes, az IB028-ban pedig 80 magyaros és 40 angolos hallgató írja. Véletlenszerűen (azonos valószínűséggel) kiválasztunk egy hallgatót, aki a dolgozatot írja.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a választott hallgató magyaros?

   (b) Feltéve, hogy a választott hallgató magyaros, mennyi a valószínűsége, hogy az IB028-ban írja a dolgozatát?

   (c) Függetlenek-e a következő események (és miért): {a választott hallgató nem magyaros} és {a választott hallgató az IB027-ben írja a dolgozatát}?

3. Megvizsgáljuk, hogy egy burgonyaföld egy kis darabján hány krumplibogár található. Az itt található krumplibogarak száma jó közelítéssel Poisson-eloszlású és annak a valószínűsége, hogy pontosan két krumplibogarat találunk, $2e^{-2}$-vel egyenlő. Jelölje X a földdarabon található krumplibogarak számát.

   (a) Mi az eloszlás paramétere (λ)?

   (b) Mi a valószínűsége, hogy legalább egy krumplibogarat találunk a földdarabon?

   (c) Határozzuk meg a $2X-3$ valószínűségi változó várható értékét és a $-4X-7$ valószínűségi változó szórásnégyzetét.

4. Feldobunk két olyan szabályos pénzérmét, amiknek az egyik oldalára 1-es, a másik oldalára 0-s számot írtunk. Jelölje U az első, V a második érme felső oldalán látható számot a dobás után. Legyen $X = U + V$ és $Y = U - V$.

   (a) Adjuk meg indoklással X és Y együttes eloszlását (azaz $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$ értékét minden olyan k-ra és ℓ-re, amire ez a valószínűség pozitív) táblázatos formában.

   (b) Határozzuk meg X és Y peremeloszlásait is.

   (c) Igaz-e, hogy $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$?

   (d) Független-e X és Y?

5. Egy ceruzaelem élettartama folytonos, örökifjú eloszlást követ, és tudjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy az elem két hónapnál kevesebb idő után fogy ki, $1 - e^{-4}$-gyel egyenlő. Jelölje X az elem élettartamát (hónapban mérve).

   (a) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényének értékét az $x = 3$ helyen.

   (b) Határozzuk meg X várható értékét és szórását.

   (c) Feltéve, hogy a ceruzaelem élettartama nyolc hónapnál nagyobb, mennyi annak a valószínűsége, hogy (az első nyolc hónapot is beleszámítva) tizenhárom hónapnál is nagyobb lesz az élettartama?

6. * Legyen X egyenletes eloszlású a $(-1;1)$ intervallumon és legyen $Y = X^4$. Határozzuk meg Y eloszlás- és sűrűségfüggvényét és várható értékét.

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$F_X(t)$	$p_X(k)$, $f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor Bernoulli	$\mathbb{1}_A$ $\mathrm{B}(p)$	$\{0,1\}$		$p_X(0)=1-p$, $p_X(1)=p$ $(p=\mathbb{P}(A))$	p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{Bin}(n;p)$	$\{0,1,\dots,n\}$		$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,2,\dots\}$		$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,\dots\}$		$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0;\infty)$	$1-e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\lambda e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Tudnivalók: A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. Hivatkozni csak az előadáson elhangzottakra lehet. A zárthelyi első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Vizsgadolgozat

2026/27-ben nem vizsgaanyag az 1b. és a 6. feladat.

1. Legyenek X és Y valószínűségi változók pozitív és véges szórással.

   (a) Hogyan jelöljük X és Y korrelációját és hogyan definiáljuk ezt a korrelációt X és Y kovarianciája és szórásai segítségével?

   (b) Milyen β és α valós számok esetén nevezzük a $\beta X + \alpha$ valószínűségi változót az Y valószínűségi változó X-re vett lineáris regressziójának (vagyis milyen β-ra és α-ra lesz az $\mathbb{E}((Y - (\beta X + \alpha))^2)$ várható érték minimális)?
   β és α képletének megadásakor az előadásról ismert jelöléseket magyarázat nélkül fel szabad használni. $\mathbb{E}((Y - (\beta X + \alpha))^2)$ képletét nem kell megadni.

2. Manyi néni, a 9.C osztály osztályfőnöke az osztályba járó 36 tanulónak vásárolt a téli szünet előtti utolsó osztályfőnöki órára egy-egy szaloncukrot. A szaloncukrok tömegét független, azonos eloszlású, folytonos valószínűségi változók írják le, 2 dkg várható értékkel és 0,1 dkg szórással. Jelölje X a 36 szaloncukor tömegének összegét.

   (a) Mennyi X várható értéke és szórásnégyzete?

   (b) Határozzuk meg a $-2X + 42$ és a $3X + 2025$ valószínűségi változók kovarianciáját.

   (c) Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy a 36 szaloncukor összes tömege 70 dekagrammnál nagyobb, de 74 dekagrammnál kisebb lesz.

3. Minél több szilveszteri trombitát árulnak a piacon, annál rosszabb minőségűek a trombiták. Ha $n \in \mathbb{N}$ darab trombita kapható a piacon, minden trombita a többitől függetlenül $\frac{3}{n}$ valószínűséggel megfelelő minőségű.

   (a) Tegyük fel, hogy $n = 10$. Mi a valószínűsége, hogy a 10-ből legalább 3 trombita megfelelő minőségű? (A valószínűség pontos értékét adjuk meg.) Mennyi a megfelelő minőségű trombiták számának várható értéke és szórása?

   (b) Nagy n esetén közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy az n trombitából legfeljebb egy lesz megfelelő minőségű. (A valószínűség pontos értékét itt nem kell meghatározni.)

4. Legyen X egy szabályos kockadobás eredménye, Y pedig egy X-től független, geometriai eloszlású valószínűségi változó, amelyre $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1)$.
   Megjegyzés: $\mathbb{E}(X)$ értékét indoklás nélkül is felhasználhatjuk.

   (a) Melyik valószínűség a nagyobb: $\mathbb{P}(X > 2)$ vagy $\mathbb{P}(Y > 2)$?

   (b) Mennyi $\mathbb{P}(X \leq 2, Y < 3)$?

   (c) Mennyi $\mathbb{P}(X \leq 2 | Y < 3)$?

   (d) Határozzuk meg XY várható értékét és $2Y - 2$ szórásnégyzetét.

5. A következő dunai árvízig hátralévő idő mennyiségét (napokban mérve) jelöljük X-szel. Tegyük fel, hogy X folytonos, örökifjú eloszlást követ, pontosan 365 nap várható értékkel.

   (a) Mennyi X szórásnégyzete és miért?

   (b) Mennyi X^2 várható értéke?

   (c) Minek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy lesz 2026-ban dunai árvíz, vagy annak, hogy nem lesz? (2026 nem szökőév.)

   (d) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(91{,}25 < X < 182{,}5)$ valószínűséget. (A 91,25 és a 182,5 is napokban értendő.)

6. * Legyen X egyenletes eloszlású a $(0;1)$ intervallumon és X ismeretében legyen Y egyenletes eloszlású a $(0;e^X)$ intervallumon (ahol $e \approx 2{,}71\ldots$).

   (a) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y < e^{1/2})$ valószínűséget.

   (b) Feltéve, hogy Y kisebb, mint $e^{1/2}$, mi a valószínűsége, hogy X kisebb, mint $\frac{1}{2}$?

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$F_X(t)$	$p_X(k)$, $f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor Bernoulli	$\mathbb{1}_A$ $\mathrm{B}(p)$	$\{0,1\}$		$p_X(0)=1-p$, $p_X(1)=p$ $(p=\mathbb{P}(A))$	p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{Bin}(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$		$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,2,\ldots\}$		$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,\ldots\}$		$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0;\infty)$	$1-e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\lambda e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$\mathrm{N}(\mu;\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. Hivatkozni csak az előadáson elhangzottakra lehet. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Vizsgadolgozat

2026/27-ben nem vizsgaanyag a 6. feladat.

1. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező.

   (a) Ha $A, B \in \mathcal{F}$ események, mikor mondjuk azt definíció szerint, hogy A és B függetlenek?

   (b) Ha $X, Y \colon \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók, mikor mondjuk azt definíció szerint, hogy X és Y függetlenek?

   (c) Milyen feltételek teljesülése esetén nevezünk egy $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ sorozatot teljes eseményrendszernek, ahol $n \geq 2$?

2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza, ahol a c és d pozitív valós számok értékét úgy kell megválasztani, hogy $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1$ teljesüljön.

Y \ X	0	2
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	c	d
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

   (a) Határozzuk meg c és d értékét.

   (b) Független-e X és Y?

   (c) Határozzuk meg az $X + Y$ valószínűségi változó szórásnégyzetét.

   Ha az (a) részt nem sikerül megoldani, a (b) és a (c) részt paraméteresen is megoldhatjuk. Ugyanez vonatkozik a 4-es feladatra is.

3. Az egyetem nagy előadóiban található táblák mozgatógombjai egy adott pillanatban egymástól függetlenül 1/8 valószínűséggel üzemképtelenek.

   (a) Tegyük fel, hogy a HŐ jelű épületben 10 ilyen mozgatógomb van. Mennyi a valószínűsége, hogy ezen 10 gomb közül legalább három üzemképtelen? (A valószínűség pontos értékét adjuk meg.)

   (b) Tegyük fel, hogy a JÉG jelű épületben 100 ilyen gomb van. Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy a 100 gomb közül legalább 10, de legfeljebb 15 darab üzemképtelen. (A valószínűség pontos értékét itt nem kell meghatározni.)

4. Az (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 < x < c \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

   ahol $c > 0$ egy alkalmasan választott konstans.

   (a) Határozzuk meg c értékét.

   (b) Határozzuk meg X és Y kovarianciáját (X és Y várható értékeinek meghatározására járnak részpontok).

   (c) Egyenletes eloszlású-e Y a $(0; 1)$ intervallumon?

5. Szilveszterre veszünk 8 doboz kocsonyát. A kocsonyák dekagrammban mért tömegeiből álló vektort az $(X_1, \ldots, X_8)$ fae. minta írja le, ahol a független mintaelemek egységesen ismeretlen μ dekagramm várható értékkel és 2 dekagramm szórással normális eloszlásúak. A vásárolt kocsonyákat megmérve az alábbi $(x_1, \ldots, x_8)$ realizációt kaptuk:

$$x_1 = 49 \qquad x_2 = 52 \qquad x_3 = 48 \qquad x_4 = 46 \qquad x_5 = 50 \qquad x_6 = 49 \qquad x_7 = 51 \qquad x_8 = 47.$$

   (a) Adjunk a minta alapján 96%(=0,96) szintű konfidenciaintervallumot a μ paraméterre.

   (b) Döntsük el alkalmasan választott $\varepsilon = 0{,}02$ terjedelmű próbával, hogy a kapott realizáció alapján megegyezik-e 50 dekagrammal egy kocsonya tömegének várható értéke. Adjuk meg H_0-t, H_1-et, a próbastatisztika értékét, azt, hogy mi alapján döntünk, és magát a döntést is.

   (c) Jelölje F_8^* a minta empirikus eloszlásfüggvényét az adott realizáció esetén. Mennyi $F_8^*(50{,}5)$ és $F_8^*(52)$?

6. * Legyenek U és V független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Az X és Y valószínűségi változókról tudjuk, hogy $X = aU+bV+c$ és $Y = dU+eV+f$ alkalmasan választott a, b, c, d, e, f valós számokra, valamint Y regressziós egyenese X-re $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \frac{1}{2}x + 3\}$ és $\mathbb{E}(X|Y) = \frac{3}{2}Y - 1$. Tudjuk azt is, hogy X és Y szórása is pozitív.

   (a) Mi X regressziós egyenese Y-ra (és miért)?

   (b) Határozzuk meg X és Y várható értékét.

   (c) Határozzuk meg c és f értékét.

   (d) Adjuk meg az $\mathbb{E}(\sin(X)Y|X)$ regressziót.

   (*Segítség*: Az (a), (b) és (d) rész megoldásához a, b, c, d, e, f értékét nem kell ismerni.)

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. Hivatkozni csak az előadáson elhangzottakra lehet. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Vizsgadolgozat

2026/27-ben nem vizsgaanyag az 1c. feladat ii. része.

1. (a) Legyen X valószínűségi változó és $x \in \mathbb{R}$. Mit jelent X eloszlásfüggvényének x pontbeli értéke, azaz $F_X(x)$ egy valószínűséggel kifejezve?

   (b) Legyenek X és Y véges szórású valószínűségi változók. Hogyan határozhatjuk meg a $\mathrm{cov}(X,Y)$ kovarianciát a két valószínűségi változó várható értéke és a szorzatuk várható értéke segítségével?

   (c) Legyen (X,Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó, jelölje együttes sűrűségfüggvényét $f_{X,Y}$, X perem-sűrűségfüggvényét (marginális sűrűségfüggvényét) pedig f_X.

   i. Hogyan határozhatjuk meg $f_X(x)$ értékét az $f_{X,Y}$ együttes sűrűségfüggvény ismeretében?

   ii. Ha $f_X(x) > 0$ és y egy valós szám, hogyan definiáljuk $f_{Y|X}(y|x)$-et (ahol $f_{Y|X}$ az Y-nak X-re vett feltételes sűrűségfüggvénye)?
   Az $f_X(x) = 0$ esetet nem kérdezzük, és itt nem kell újra leírni a választ az i. kérdésre.

2. Egy medve téli álmot alszik. Az adott tél során valamikor, egy véletlenszerűen (december első napjának kezdete és február utolsó napjának vége között) választott időpontban felébred. Tudjuk, hogy a medve élőhelyén decemberben 30%, januárban 40%, februárban pedig 35% eséllyel havas a táj. Tekintsük a következő eseményeket:

$$H := \{\text{a táj havas, amikor a medve felébred}\} \qquad D := \{\text{a medve decemberben ébred fel}\}$$
$$J := \{\text{a medve januárban ébred fel}\} \qquad F := \{\text{a medve februárban ébred fel}\}.$$

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a táj havas, amikor a medve felébred? Függ-e a válasz attól, hogy a február 28 vagy 29 napos?

   (b) Tegyük fel most, hogy a február 28 napos. Amikor a medve felébred, nem tudja, hogy milyen hónap van. Feltéve, hogy azt látja, hogy a táj havas, mennyi a valószínűsége, hogy decemberben ébredt fel?

   (c) Tegyük fel ismét, hogy a február 28 napos. Független-e az F és a H esemény?

3. Az $X_1, \ldots, X_{40}$ folytonos valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak, közös sűrűségfüggvényük

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x, & \text{ha } 2 < x < 3, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   (a) Határozzuk meg X_1 várható értékét és szórásnégyzetét.

   (b) Közelítsük alkalmas approximációval a $\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_{40} > 100)$ valószínűséget.

   Pótfeladat: ha az (a)-ban nem sikerült kielégítő eredményt elérni, a (b)-t megoldhatjuk úgy is, hogy feltesszük, hogy $\mathbb{E}(X_1) = 2{,}5300$ és $\mathbb{D}^2(X_1) = 0{,}49$ (ezek egyébként nem a helyes értékek).

4. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, ahol X Poisson-eloszlású $\lambda = 3$ paraméterrel, Y pedig szintén diszkrét, a következő eloszlással: $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(Y = 3) = \frac{1}{3}$ és $\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{1}{6}$.

   (a) Határozzuk meg X, X^2, Y és Y^2 várható értékét.

   (b) Adjuk meg (indoklással) az $\mathbb{E}(Y^2\cos(X) + 2026X^2Y + 138X + 1|X)$ regressziót.

5. Egy kisállat-kereskedésben olyan hörcsögöket árulnak, amik a boltos állítása szerint várható értékben legfeljebb 20 cm testhosszúságúra nőnek. Megkértünk 7 hörcsögtulajdonost, akik itt vásárolták háziállatukat, hogy mérjék meg már felnőtt hörcsögeik testhosszúságát. Az alábbi $(x_1, \ldots, x_7)$ realizáció adódott (centiméterben mérve):

   $x_1 = 19{,}1 \qquad x_2 = 21{,}0 \qquad x_3 = 24{,}2 \qquad x_4 = 17{,}8 \qquad x_5 = 20{,}0 \qquad x_6 = 22{,}9 \qquad x_7 = 22{,}0.$

   Feltételezzük, hogy a hörcsögök testhosszúságai független, normális eloszlású valószínűségi változókkal modellezhetőek, ismeretlen várható értékkel és 2 cm szórással.

   (a) Döntsük el alkalmasan választott $\varepsilon = 0{,}03$ terjedelmű próbával, hogy igaz-e a boltos állítása. Adjuk meg H_0-t, H_1-et, a próbastatisztika értékét, azt, hogy mi alapján döntünk, és magát a döntést is.

   (b) Mekkora a próba p-értéke?

6. * Az (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó értékkészlete a

$$\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 < x < 2, 0 < y < x - 1\}$$

   háromszög, együttes eloszlásfüggvénye pedig

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 \text{ vagy } y \leq 0, \\ 2(x-1)y - y^2, & \text{ha } 1 < x < 2 \text{ és } 0 < y < x - 1, \\ (x-1)^2, & \text{ha } 1 < x < 2 \text{ és } y \geq x - 1, \\ 2y - y^2, & \text{ha } x \geq 2 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 1, & \text{ha } x \geq 2 \text{ és } y \geq 1. \end{cases}$$

   (a) Határozzuk meg X, illetve Y (marginális) eloszlásfüggvényét.

   (b) Határozzuk meg (X, Y) együttes sűrűségfüggvényét.

   (c) Kétdimenziós egyenletes eloszlású-e (X, Y) a Δ háromszögön?

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. Hivatkozni csak az előadáson elhangzottakra lehet. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Vizsgadolgozat

2026/27-ben nem vizsgaanyag a 3b. és a 6. feladat.

1. (a) Írjuk fel a Poincaré-formulát három eseményre. Idén szitaformulának hívjuk.

   (b) Milyen esetben nevezünk egy valószínűségi változót egyszerűnek?

   (c) Legyen X valószínűségi változó, jelölje eloszlásfüggvényét F_X. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie F_X-nek ahhoz, hogy az előadáson elhangzott állítás garantálja, hogy X folytonos valószínűségi változó és az $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$,

$$f(x) = \begin{cases} F_X'(x), & \text{ha } F_X \text{ deriválható } x\text{-ben,} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

   függvény sűrűségfüggvénye X-nek?

2. Egy bizonyos fajta kaparós sorsjeggyel 60% valószínűséggel nem nyer semmit a tulajdonosa (azaz a nyeremény 0 forint), 39% valószínűséggel 1000 forintot nyer és 1% valószínűséggel 61 000 forintot nyer. Veszünk 100 ilyen sorsjegyet. Feltételezzük, hogy az egyes sorsjegyek nyereményei egymástól függetlenek.

   (a) Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét (a valószínűség pontos értékének meghatározása nélkül), hogy a 100 sorsjegyből legalább 42 darabbal nyerünk. (Nyertesnek számít egy sorsjegy, ha rajta a nyeremény pozitív.)

   (b) Mennyi a 100 sorsjeggyel szerzett nyeremények összegének várható értéke és szórásnégyzete?

3. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, ahol X egyenletes eloszlású a $(-2,4)$ intervallumon és Y exponenciális eloszlású $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterrel.

   (a) Határozzuk meg $U := 2X - 1$ és $V := -3X - Y + 1$ kovarianciáját és korrelációját.

   (b) Mi V regressziós egyenese U-ra?

   Segítség: a feladat integrálás nélkül is megoldható (a tanult azonosságok és a kiadott táblázat segítségével). Részpontok járnak U és V várható értéke és szórása meghatározására.

4. Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg először nem dobunk 5-nél kisebb számot, majd egy szabályos pénzérmét is feldobunk pontosan annyiszor, ahányszor a kockával dobnunk kellett. Jelölje X a kockadobások és Y a pénzérmével dobott fejek számát.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a kockával 3-nál kevesebbszer dobunk?

   (b) Mennyi $\mathbb{P}(Y < 2 | X = 10)$ és $\mathbb{E}(Y | X = 10)$?

   (c) Határozzuk meg az $\mathbb{E}(Y|X)$ regressziót.

5. Legyen $(X_1, \ldots, X_8)$ egy nyolcelemű fae. minta, ahol független mintaelemek eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2, \\ (x-2)^2, & \text{ha } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$$

A mintára az alábbi $(x_1, \ldots, x_8)$ realizációt kaptuk:

$$x_1 = 2{,}11 \quad x_2 = 2{,}83 \quad x_3 = 2{,}17 \quad x_4 = 2{,}72 \quad x_5 = 2{,}17 \quad x_6 = 2{,}89 \quad x_7 = 2{,}83 \quad x_8 = 2{,}28.$$

(a) Adjuk meg (indoklással) a minta empirikus mediánját és korrigált empirikus szórását az adott realizáció esetén, valamint a rendezett minta x_5^* elemét.

(b) Ábrázoljuk a minta empirikus eloszlásfüggvényét az adott realizáció esetén (nem baj, ha nem arányos, de látszódjon, hogy hol mekkora értéket vesz fel – ott is, ahol nem folytonos).

(c) Mennyi az adott realizáció esetén az empirikus eloszlásfüggvény értéke az $x = 2{,}17$ helyen? Kisebb-e ez, mint az empirikus eloszlásfüggvénynek ezen a helyen vett várható értéke (és miért)?

6. * Legyen (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó, ahol X (marginális) eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ x^3, & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$$

és X ismeretében Y normális eloszlású $\mu = X^2$ és $\sigma^2 = 1$ paraméterekkel. Határozzuk meg Y várható értékét és szórását.

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. Hivatkozni csak az előadáson elhangzottakra lehet. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Zárthelyi dolgozat

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Az A, B és C eseményekről tudjuk, hogy A és B közül legalább az egyik mindig bekövetkezik, A és C függetlenek, valamint $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0{,}6$ és $\mathbb{P}(C) = 0{,}1$. Válaszoljuk meg (indoklással!) az alábbi kérdéseket.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy A és C is (egyszerre) bekövetkezik?

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy A és B is (egyszerre) bekövetkezik?

   (c) Mennyi $\mathbb{P}(B|A)$?

   (d) Mennyi a valószínűsége, hogy sem A, sem C nem következik be?

   Megoldás.
   (a) (4 pont)
   (1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap C)$ (azt soha nem muszáj odaírni, hogy „a keresett valószínűség”, csak derüljön ki, hogy ezt számolja)
   (1 pont) $= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C)$
   (1 pont) $= 0{,}06$ (közönséges tört alakban is jó),
   (1 pont) mert függetlenek.

   (b) (7 pont)
   (1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap B)$.
   (1 pont) A Poincaré-formula szerint (szitaformula szintén OK, de meg kell nevezni)
   (2 pont) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,
   (1 pont) átrendezve $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$. (Az előzővel összevonható, de csak ha helyesen szerepel, különben nem jár részpont.)
   (1 pont) Mivel A és B közül legalább az egyik esemény mindig bekövetkezik, ezért $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$.
   (1 pont) Így $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}6 - 1 = 0{,}2$ (ez OK részletszámítások nélkül is, $\frac{1}{5}$ alakban is).

   (c) (3 pont)
   (1 pont) (Definíció szerint – ezt nem kell odaírni) $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\,\mathbb{P}(A)$

(1 pont) = 0,2/0,6
(1 pont) = $\frac{1}{3}$ (tizedestört alakban is OK).

(d) (6 pont)
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{C})$.

Innen *1. megoldás.*
(2 pont) Mivel A és C függetlenek, ezért $\overline{A}$ és $\overline{C}$ is.
(1 pont) Tehát $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(\overline{A})\,\mathbb{P}(\overline{C})$
(1 pont) $= (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(C))$
(1 pont) $= 0{,}4 \cdot 0{,}9 = 0{,}36$ (ez OK részletszámítások nélkül is, közönséges tört alakban is).

2. megoldás.
(1 pont) $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup C})$.
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(A \cup C)$.
(0 pont) Ismét a Poincaré-formula szerint
(1 pont) $\mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C)$
(1 pont) $= 0{,}6 + 0{,}1 - 0{,}06 = 0{,}64$,
(1 pont) tehát a keresett valószínűség 0,36.

2. Az I épület portáján 2 db kék, 3 db zöld, 1 db fekete és 2 db piros filctoll található. Valszám gyakorlat előtt véletlenszerűen (azonos valószínűséggel) kiválasztunk egyet a filctollak közül, amivel a gyakorlaton írni fogunk a táblára. Tudjuk, hogy egy kék filctoll $\frac{2}{5}$, egy zöld $\frac{1}{4}$, egy fekete $\frac{1}{5}$, egy piros pedig $\frac{1}{10}$ valószínűséggel fogy ki a gyakorlat végére.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy zöld filctollat választunk és az kifogy a gyakorlat végére?

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy a választott filctoll (akármilyen színű legyen is az) kifogy a gyakorlat végére?

   (c) Feltéve, hogy a választott filctoll kifogyott a gyakorlat végére, mi a valószínűsége, hogy piros színű volt?

Megoldás.
Jelölje K, Z, F, P rendre azt az eseményt, hogy kék, zöld, fekete, illetve piros tollat választunk, B pedig azt az eseményt, hogy a választott toll kifogy. (Persze nem baj, ha ezeket nem nevezi el és úgy használja a tételeket.)
(a) (5 pont)
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(Z \cap B)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(Z)\,\mathbb{P}(B|Z)$ (ha ez megvan, akkor az előző pontot is meg lehet adni)
(1+1 pont) $= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$ (nem kell jobban indokolni, de $\mathbb{P}(Z)$ azért ennyi, mert 10 tollból 3 zöld és a valószínűségi mező klasszikus)
(0 pont) $= \frac{3}{32} (= 0{,}09375)$,
(1 pont) ahol az első egyenlőségnél a szorzási szabályt használtuk (nem kell a szorzási szabályra hivatkozni, ha a feltételes valószínűség definíciójából levezeti a szorzási szabálynak megfelelő képletet).
(b) (8 pont)
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(B)$.
(1 pont) A teljes valószínűség tétele (elég: TVT) szerint
(1 pont) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(K)\,\mathbb{P}(B|K) + \mathbb{P}(Z)\,\mathbb{P}(B|Z) + \mathbb{P}(F)\,\mathbb{P}(B|F) + \mathbb{P}(P)\,\mathbb{P}(B|P)$
(2 pont) $= \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{10}$ (az (a)-hoz hasonlóan; nem kell indokolni)
(1 pont) $= \frac{16+15+4+4}{160} = \frac{39}{160} (= 0{,}24375)$. (OK további részletszámolások nélkül is, ha megvan, hogy honnan jön.)
(1 pont) A TVT-t azért használhatjuk, mert a K, Z, F, P események teljes eseményrendszert

alkotnak,
(1 pont) mivel páronként kizáróak és az uniójuk a teljes eseménytér (ha ez megvan, akkor az előző pont is jár; több indoklás nem kell, mert nyilvánvalóan igaz a kijelentés, egyszerre csak egyfajta színű filctollat húzhatunk és egyfajtát mindig kihúzunk).
Itt is igaz, hogy ha levezeti a TVT-t (akár csak az itt szükséges konkrét formáját) a feltételes valószínűség definíciójából, akkor az elég indoklásnak és nem kell hivatkozni semmi másra.
(c) (7 pont)
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(P|B)$.
(1 pont) Bayes-tétellel (szintén jó: Bayes-formula, vagy bármi, amiben benne van a Bayes. Az egyszerű Bayes-tétel nem jó, de ha utána jó képlet jön, akkor arra is megadjuk a pontot)
(2 pont) $\mathbb{P}(P|B) = \frac{\mathbb{P}(B|P)\,\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|P)\,\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(K)\,\mathbb{P}(B|K)+\mathbb{P}(Z)\,\mathbb{P}(B|Z)+\mathbb{P}(F)\,\mathbb{P}(B|F)+\mathbb{P}(P)\,\mathbb{P}(B|P)}$
(a két alakból elég az egyik. Az első alak esetén a Bayes-tétel helyett jó a szorzási szabályra is hivatkozni, illetve arra, hogy $\mathbb{P}(B)$-t már kiszámoltuk. Ha a szorzási szabályra már egyszer hivatkozott az (a)-ban, akkor nem is kell még egyszer.)
(1+1 pont) $= \frac{\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{39}{160}}$
(1 pont) $= \frac{4}{39} (\approx 0{,}1026)$.

3. Egy villamosvonalon mindennap egymástól függetlenül $\dfrac{1}{10}$ valószínűséggel fordul elő üzemzavar.

   (a) 20 napon keresztül mindennap megfigyeljük, hogy aznap előfordult-e üzemzavar a vonalon. Jelölje X azon napok számát a 20 nap közül, amikor előfordult üzemzavar. Adjuk meg X várható értékét és szórását, valamint a $\mathbb{P}(X > 2)$ valószínűséget.

   (b) Egy adott naptól kezdve – nevezzük ezt az 1. napnak – mindennap megfigyeljük, hogy volt-e üzemzavar a vonalon, egészen addig, amíg az első üzemzavart nem tapasztaljuk. Mennyi a valószínűsége, hogy ez az első üzemzavar pontosan a 3. napon fog bekövetkezni? És feltéve, hogy az első három nap egyikén sem volt üzemzavar, mi a valószínűsége, hogy az első öt nap egyikén sem tapasztalunk üzemzavart?

Megoldás.
(a) (10 pont)
(1 pont) X binomiális eloszlású
(1+1 pont) $n = 20$ és $p = \frac{1}{10}$ paraméterrel. (Elég: $X \sim \mathrm{Bin}(20; \frac{1}{10})$. (Nem kell indokolni, de az indoklás a szokásos: n kísérletet végzünk, amelyek egymástól függetlenül p valószínűséggel sikeresek, ahol a siker itt az üzemzavart jelenti, és X a sikerek száma. Nem baj, ha nem használja az n és a p jelöléseket, ha később kiderül, hogy helyesen használja a paramétereket.).
(1 pont) Ezért $\mathbb{E}(X) = np = 2$
(1 pont) és $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$
(1 pont) $= \sqrt{np(1-p)}$ (ha ez megvan, akár konkrét n-nel és p-vel behelyettesítve, akkor az előző pont is OK)
(1 pont) $= \sqrt{1{,}8} \approx 1{,}3416$.
(1 pont) $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2)$
(1 pont) $= 1 - (1-0{,}1)^{20} - 20 \cdot 0{,}1 \cdot (1-0{,}1)^{19} - \underbrace{\binom{20}{2}}_{=190} 0{,}1^2 \cdot (1-0{,}1)^{18}$ (n-nel és p-vel is OK, behelyettesítve is OK; itt azt használtuk, hogy $\binom{20}{0} = 1, \binom{20}{1} = 20$)
(1 pont) $\approx 0{,}3231$.
(b) (10 pont)
(1 pont) Jelölje Y azon nap sorszámát, amikor először fordul elő üzemzavar. Ekkor Y geometriai eloszlású
(1 pont) $p = \frac{1}{10}$ paraméterrel (indokolni itt sem kell, elég: $Y \sim \mathrm{Geo}(\frac{1}{10})$).

(1 pont) Az első keresett valószínűség $\mathbb{P}(Y = 3)$
(1 pont) $= (1 - 0{,}1)^{3-1}0{,}1$ (p-vel is OK)
(1 pont) $= 0{,}081$.
(1 pont) A másik keresett (feltételes) valószínűség $\mathbb{P}(Y > 5|Y > 3)$,
(1 pont) ami a geometriai eloszlás örökifjúsága (elég: örökifjúság) miatt
(1 pont) $\mathbb{P}(Y > 2)$-vel egyenlő,
(1 pont) és $\mathbb{P}(Y > 2) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2) = 1 - 0{,}1 - 0{,}9 \cdot 0{,}1$
(1 pont) $= 0{,}81$.
Ha pl. $\mathbb{P}(Y \geq 4|Y \geq 2)$-t ír, az is jó (bár ebben az esetben nehezebb lesz az örökifjúságot jól használni).

4. Egy kalapba beteszünk egy cédulát, amelyikre a 3-as számot írtuk, és egy olyat, amelyikre a 4-est. Egy másik kalapba pedig egy olyan cédulát teszünk, amelyikre a 2-es számot írtuk, és egy olyat, amelyikre a 3-ast. Véletlenszerűen kihúzunk mindkét kalapból egy-egy számot. Definiáljuk az X és Y valószínűségi változókat a következőképpen: legyen az X valószínűségi változó értéke 2, ha az első kalapból a 4-es számot húztuk ki, különben pedig legyen X értéke 1, Y értéke pedig legyen azon kalapok száma, ahonnan 3-as számot húztunk. (Például ha az első kalapból a 3-as számot húztuk, a másodikból pedig a 2-est, akkor $X = 1$ és $Y = 1$.)

   (a) Határozzuk meg X és Y együttes eloszlását (azaz $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$ értékét minden olyan k-ra és ℓ-re, amire ez a valószínűség pozitív) táblázatos formában.

   (b) Határozzuk meg X és Y peremeloszlásait is.

   (c) Független-e X és Y?

   (d) Határozzuk meg az X^3 (figyelem, harmadik hatvány!) valószínűségi változó várható értékét.

Megoldás.

Y \ X	1	2	p_Y
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
p_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(1)

Pontozás:
(a) (6 pont)
(6 pont) Tökéletes együttes eloszlás táblázat.
Ha nem tökéletes: minden helyes nem 0 értékre 1–1 pont jár.
Ha a táblázatban negatív vagy 1-nél nagyobb valószínűség is előfordul, akkor az (a)-ra egyből 0 pont!
Ha a táblázatban szereplő valószínűségek összege nem 1, akkor összesen max. 3 pont.
(b) (5 pont)
(3 pont) Y súlyfüggvényének értékeit a megfelelő sorok összegzésével kapjuk (nem kell indokolni) – ezt nem kell kijelenteni, csak alkalmazni. Ha csak kijelenti, de nem számolja végig, arra 1 pont.
(2 pont) X súlyfüggvényének értékeit a megfelelő oszlopok összegzésével kapjuk.
Ha X és Y szerepét összekeveri, akkor az (a)-ra max. 4, a (b)-re max. 2 pont. Szabad a táblázatot transzponálva is felrajzolni, de akkor annak megfelelően kell a peremeloszlásokat is kiszámolni.
Az (a)-beli hibák továbbgörgetéséért itt nem kell újra pontot levonni, de negatív vagy 1-nél nagyobb valószínűségekre itt sem jár pont, és ha valamelyik peremeloszlásnál az összeg nem 1,

akkor arra a peremeloszlásra max. 1 pont.
(c) (4 pont)
Önmagában annak a kijelentésére, hogy nem függetlenek, indoklás nélkül nem jár pont.
(1 pont) Nem függetlenek, mert... (valami indoklás, ami nem is helyes, de el lehet hinni, hogy komolyan gondolta)
(1 pont*) a függetlenséghez az kellene, hogy minden $k \in \mathrm{Ran}(X)$-re és $\ell \in \mathrm{Ran}(Y)$-ra $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = \ell)$ teljesüljön.
(1 pont) Talál egy olyan (k, ℓ) párt, ahol $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \neq \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = \ell)$ (ez az előző lépéssel összevonható).
(1 pont) Meggyőződik arról, hogy ezek tényleg nem egyenlőek, pl. odaírja, hogy mennyi ebben a konkrét esetben a megfelelő $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$ és $\mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = \ell)$ értéke (nem kell nagyon részletezni). Adott esetben az is elég, hogy az együttes valószínűség 0, a marginálisok szorzata meg nem 0.
*_Megjegyzés_: Mivel itt csak azt kell belátni, hogy *nem* függetlenek, ehhez elég, ha mutat egy ellenpéldát, és leírja, hogy ezekre a metszet valószínűsége nem a valószínűségek szorzata. Így ha minden más megvan, akkor jár a (c)-re a maximális pontszám akkor is, ha nem mondja ki, hogy a függetlenséghez ennek minden k-ra és ℓ-re teljesülnie kellene.
(d) (5 pont)
(0 pont) A transzformált várható értékére vonatkozó képlet szerint
(3 pont) $\mathbb{E}(X^3) = 1^3\,\mathbb{P}(X = 1) + 2^3\,\mathbb{P}(X = 2)$
(nem kell ennél általánosabb képletből kiindulni. Ha csak valami ennél általánosabb képletet ad meg, pl. $g(X)$ várható értéke van benne vagy $\mathrm{Ran}(X)$, amit aztán nem jól konkretizál, akkor max. 2 pont. De ha nincs általánosabb képlet és a konkrét rossz, akkor nem jár részpont, pl. ha az értékek helyett a valószínűségeket emeli köbre.)
(1 pont) $= \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2}$
(1 pont) $= \frac{9}{2} (= 4{,}5)$.

5. Egy X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} ax, & \text{ha } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol a egy alkalmasan választott valós konstans.

(a) Határozzuk meg a értékét.

(b) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

(c) Határozzuk meg X várható értékét.

Megoldás.
(a) (7 pont)
(1 pont) Ahhoz, hogy f_X sűrűségfüggvény legyen, az kell, hogy f_X nemnegatív legyen (tehát a legyen nemnegatív – a megoldásból látni fogjuk, hogy ez teljesül. Nem baj, ha ezt csak egyszer említi, de legalább egyszer gondoljon rá)
(1 pont) és teljesüljön, hogy $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x$
(2 pont) $= \int_1^2 ax\mathrm{d}x$ (az előzővel összevonható)
(1 pont) $= [ax^2/2]_{x=1}^2$
(1 pont) $= a(2^2/2 - 1^2/2) = \frac{3}{2}a$,
(1 pont) tehát $a = \frac{2}{3}$.
(b) (7 pont)
(1 pont) Ha $x \leq 1$, akkor $F_X(x) = 0$. (Nem kell indokolni, de ez azért van, mert $\mathrm{Ran}(X) = (1, 2)$ alsó határáig 0 az eloszlásfüggvény értéke, mert $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$.)

(1 pont) Ha $x \geq 2$, akkor $F_X(x) = 1$.
(1 pont) Ha $1 < x < 2$, akkor $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$
(2 pont) $= \int_1^x \frac{2}{3}t\mathrm{d}t$ (az előzővel összevonható)
(1 pont) $= [\frac{1}{3}t^2]_{t=1}^{x}$
(1 pont) $= \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}$.
(c) (6 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$
(2 pont) $= \int_1^2 \frac{2}{3}x^2\mathrm{d}x$
(1 pont) $= [\frac{2}{9}x^3]_1^2$
(2 pont) $= \frac{2}{9}\cdot 8 - \frac{2}{9}\cdot 1 = \frac{14}{9}$.

6. * A $(0;2)$ nyílt intervallumon találomra (egyenletes eloszlással) választunk egy y véletlen számot. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ síkon azt a derékszögű háromszöget, amely csúcspontjainak koordinátái: $(0,0)$, $(1,0)$ és $(0,y)$. Jelölje X ezen háromszög átfogójának hosszúságát (vagyis az $(1,0)$ és a $(0,y)$ csúcspontok távolságát).

   (a) Mi a valószínűsége, hogy X kisebb, mint 2?

   (b) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

   (c) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét.

   (d) Határozzuk meg az $Z := \dfrac{2\sqrt{X^2-1}}{X}$ valószínűségi változó várható értékét. (Z eloszlását nem kötelező meghatározni.)

Megoldás.
(a) (6 pont)
(1 pont) $X^2 = 1^2 + y^2$ a Pitagorasz-tétel szerint (nem kell levonni pontot, ha nem hivatkozik a Pitagorasz-tételre).
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X < 2)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(1+y^2 < 2^2) = \mathbb{P}(y < \sqrt{3})$ (nem kell abszolút érték, mivel y csak pozitív értékeket vehet fel – de ha megvan az értékkészlet, akkor ezt már nem kell külön indokolni)
(1 pont) $= \frac{\text{kedvező hosszúság}}{\text{összes hosszúság}}$ (valahogy hivatkozik az [egydimenziós] geometriai valószínűségi mezőre, vagy arra, hogy y egyenletes eloszlású; az nem baj, ha nem írja oda, hogy geometriai. Hivatkozásnak elfogadunk egy jó ábrát is.)
(1+1 pont) $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$ (ebből 1 pont a kedvező és 1 az összes hosszúságra, az eredményt elég csak a képlettel vagy csak numerikus formában megadni).
(b) (6 pont)
(1 pont) $\mathrm{Ran}(X) = (1;\sqrt{5})$ (az (a) alapján; elég, ha ez később, implicit módon derül ki).
(1 pont) Az eloszlásfüggvény értéke az x pontban (ahol $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges) $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$.
(1 pont) Így $F_X(x) = 0$, ha $x \leq 1$
(1 pont) és $F_X(x) = 1$, ha $x \geq \sqrt{5}$.
(2 pont) $1 < x < \sqrt{5}$ esetén ugyanaz a számolás, mint az (a)-ban $x = 2$ esetén, azt adja, hogy $\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(1 + y^2 < x^2) = \mathbb{P}(y < \sqrt{x^2-1}) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2}$. (Itt indoklásnak jó az is, ha végigszámolja, – de nem kell újra a geometriai val. mezős indoklás – és jó az is, ha azt mondja, hogy ez analóg az (a)-val, csak x más. Ha semmi indoklás nincs, akkor max. 1 pont.)
Az (a)-(b)-ben, ha hiányzik a formális megoldás, de van egy jó és előremutató, nem hiányos ábra, amiből kiderül, hogy mi X és hogyan lehet y segítségével kiszámolni a hosszúságát, arra lehet adni 1 pontot. Ha az is kiderül az ábrából, hogy hol van rajta az $\{X < 2\}$ vagy $\{X < x\}$ esemény, akkor még 1 pontot.
(c) (4 pont)
(1 pont) Ha $1 < x < \sqrt{5}$, akkor $f_X(x) = F_X'(x)$

(2 pont) $= \frac{2x}{2 \cdot 2\sqrt{x^2-1}}$ ($= \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}}$. Ha csak egy kis hiba van, például hiányzik egy 2-es vagy 1/2-es szorzó, akkor a 2 pontból 1-et meg lehet adni. Ha elfelejt beszorozni a belső függvény deriváltjával, akkor nem.).
(1 pont) $f_X(x) = 0$, ha $x \leq 1$ vagy $\sqrt{5} \leq x$. (Nem kell külön indokolni. Ha $x < 1$ vagy $x > 5$, akkor itt is igaz, hogy $f_X(x) = F'_X(x)$.)
(d) (4 pont)
(0 pont) A transzformált várható értékére vonatkozó képlet szerint
(1 pont) $\mathbb{E}(Z)\Big(= \mathbb{E}(\frac{2\sqrt{X^2-1}}{X})\Big) = \int_{\infty}^{\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} f_X(x) \mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_1^{\sqrt{5}} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x$ (az előzővel összevonható)
(1 pont) $= \int_1^{\sqrt{5}} 1 \mathrm{d}x$
(1 pont) $= [x]_1^{\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1 \approx 1{,}236$ (nem baj, ha nem hangsúlyozza külön a primitív függvényt, és elég csak a képlettel vagy csak numerikus formában megadni).

Tudnivalók: A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. Hivatkozni csak az előadáson elhangzottakra lehet. A zárthelyi első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Pótló zárthelyi dolgozat

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. A $(0;2)$ intervallumon találomra (egyenletes eloszlással) választunk egy valós számot, és ettől függetlenül az $(1;3)$ intervallumon találomra választunk egy másik valós számot. Mennyi a valószínűsége, hogy az $(1;3)$ intervallumon választott szám a nagyobb, de legfeljebb kétszer akkora, mint a $(0;2)$ intervallumon választott szám?
   Megoldás.
   (2 pont) A véletlen kísérlet megfelel egy (x,y) pont választásának az $= (0;2) \times (1;3)$ (azaz az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x < 2, 1 < y < 3\}$) négyzeten. (Ha nyílt helyett zárt vagy félig zárt intervallumokkal dolgozik, az nem baj.)
   (1 pont) Ez az Ω eseménytér.
   (3 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség a kedvező terület és az összes terület (Ω területe) aránya.
   (Elég, ha a területarányokra hivatkozik helyesen, nem kell kimondani, hogy geometriai. Viszont ha csak annyit mond, hogy geometriai, az önmagában a 3 pontból csak 1, és a másik kettőt akkor lehet megadni, ha impliciten kiderül, hogy jó képlettel számol.)
   (2 pont) $T_\Omega = 2 \cdot 2 = 4$. (Legalább ennyi indoklás legyen, különben max. 1 pont.)
   (2 pont) A kedvező terület Ω-nak az $y = x$ és az $y = 2x$ egyenesek közé eső részének területe [mert itt lesz igaz, hogy a második pont, y nagyobb az elsőnél, x-nél, de nem nagyobb annak kétszeresénél. A határokkal itt nem kell foglalkozni, de egyébként az $y = x$ egyenes Ω-beli szakasza nincs benne, az $y = 2x$ egyenesé viszont benne van].
   (4 pont) Jó ábra (a jóság részei: 1 pont arra, hogy az első pontot az x-tengelyen, a másodikat az y-tengelyen ábrázoljuk; 1 pont arra, hogy Ω jó, 2 pont arra, hogy a kedvező terület határai jók – ha csak az egyik határ jó vagy ha pont a kedvezőtlent tekinti kedvezőnek, max. 1 pontot ebből meg lehet adni).
   (5 pont) Kiszámolja indoklással a kedvező területet. Pl.: a kedvezőtlen terület Ω területén belül egy $0{,}5 \cdot 2 = 1$ területű téglalapból (Ω bal szélén, az $y = x$ egyenestől balra), egy $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ területű derékszögű egyenlőszárú háromszögből (az említett téglalap és az $y = 2x$ egyenletű egyenes között, befogói az $x = 1/2$ és az $y = 3$ egyenletű egyenesekre esnek, ezek hossza 2, illetve 1) és egy $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ területű derékszögű egyenlőszárú háromszögből (Ω-nak az $y = x$ egyenletű egyenestől

jobbra eső részéből) áll. [Itt a számolásokat nem kell részletezni, 1–1 pont részenként.]
Összesen tehát $T_{\text{kedvező}} = 4 - T_{\text{kedvezőtlen}} = 1{,}5$. (Erre 1+1 pont.)
Természetesen lehet máshogy is számolni, pl. az $y = x$ egyenest az $y = 3$ egyenesig meghosszabbítani és az így keletkező trapéznak a területéből (2), amelynek a párhuzamos oldalai az x tengellyel párhuzamosak, kivonni az Ω-n kívül eső kis derékszögű háromszög területét (0,5).
(1 pont) Így tehát a keresett valószínűség $\frac{15}{4} = \frac{3}{8} = 0{,}375$ (bármilyen alakban jó).

Megjegyzés: Mivel a geometriai valószínűségi mezős feladatok megoldásait a gyakorlatokon is ritkán írtuk fel ennyire részletesen, ebben a feladatban azokra a lépésekre is jár a pont, amiket a hallgató nem írt fel expliciten, de a későbbi megoldásból egyértelműen kiderül, hogy jól használta őket. Pl. ha kihagyja az első lépést, de utána a megfelelő módon rajzol ábrát/számol területeket, akkor ez a 2 pont is jár, vagy ha nem írja fel, hogy mi Ω, de később világos, hogy jól határozza meg a területét (és ezt legalább minimálisan megindokolja), akkor arra is jár pont stb. stb. Ha nincs ábra, de a szövegből/számításokból kiderül, hogy a megfelelő síkidomok területét számolja, akkor az ábrára is adjunk pontot. Ha azonban a későbbi lépés, ami a hiányzó jó, de expliciten nem szereplő lépést használná, hibás, akkor sajnos a hiányzó lépésre sem lehet pontot adni. A geometriai valószínűségi mezőt nem kötelező megnevezni, de ha nem nevezi meg, akkor a kedvező terület/összes terület képletre mindenképpen hivatkozni kell. Ha nincs ábra vagy hiányos, akkor abban az esetben adhatóak meg az ábrára járó pontok, ha a kedvező területről részenként külön-külön megmondja, hogy mik azok és mennyi a területük. Hibás számolás esetén azonban az ábra adott részére adandó pontszám is elvész.

2. Egy kötelezően választható tárgy zárthelyi dolgozatát két teremben írják a hallgatók: az IB027-ben és az IB028-ban. A zh-t az IB027-ben 45 magyaros és 15 németes, az IB028-ban pedig 80 magyaros és 40 angolos hallgató írja. Véletlenszerűen (azonos valószínűséggel) kiválasztunk egy hallgatót, aki a dolgozatot írja.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a választott hallgató magyaros?

   (b) Feltéve, hogy a választott hallgató magyaros, mennyi a valószínűsége, hogy az IB028-ban írja a dolgozatát?

   (c) Függetlenek-e a következő események (és miért): {a választott hallgató nem magyaros} és {a választott hallgató az IB027-ben írja a dolgozatát}?

Megoldás.
(a) (6 pont)
(0 pont) Jelölje M azt az eseményt, hogy a választott hallgató magyaros, A azt, hogy angolos és N azt, hogy németes. Jelölje továbbá D azt az eseményt, hogy a hallgató az IB027-ben írja a dolgozatát, és E azt, hogy az IB028-ban.
(0 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(M)$.
1. (ajánlott) megoldás.
(1 pont) A D és az E események egymás komplementerei, vagy: teljes eseményrendszert alkotnak. (Ezt kivételesen nem kell megindokolni, mert nem jár olyan sok pont a feladatra, de nyilvánvaló, hogy egy esemény és komplementere kizáróak és uniójuk az egész eseménytér.)
(1 pont) Ezért a teljes valószínűség tétele (elég: TVT) szerint
(1 pont) $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(D)\,\mathbb{P}(M|D) + \mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(M|E)$
(2 pont) $= \frac{60}{180} \cdot \frac{45}{60} + \frac{120}{180} \cdot \frac{80}{120}$
(1 pont) $125/180 = 25/36 (\approx 0{,}6944)$.
2. megoldás.
(2 pont) A valószínűségi mező klasszikus, ezért kedvező/összes eset képlettel számolható a keresett valószínűség. (Elég csak a klasszikus val. mezőre hivatkozni, ha később impliciten kiderül,

hogy jó képlettel számol. Ha nem derül ki, akkor max. 1 pont a kettőből. Ha csak azt mondja, hogy kedvező/összes, és az is kiderül, hogy kedvező micsoda és összes micsoda, az is elég.)
(2 pont) A két teremben összesen 125 magyaros hallgató van az összesen 180 hallgatóból.
(1 pont) Így a keresett valószínűség $125/180 = 25/36 (\approx 0{,}6944)$.
(1 pont) *Ha ezután a (b)-t az 1. megoldással oldja meg, ez az 1 pont arra jár, hogy ott kimondja, hogy a D és az E események egymás komplementerei/teljes eseményrendszert alkotnak (indokolni itt sem kell). Ha a (b)-t a 2. megoldással oldja meg és ott minden indoklás helyes és teljes (számítási hibák lehetnek), akkor is jár ez az 1 pont, különben nem.*

(b) (6 pont)
(1 pont) A keresett (feltételes) valószínűség $\mathbb{P}(E|M)$.

Innen *1. (ajánlott) megoldás.*
(1 pont) ((Egyszerű)) Bayes-tétellel
(1 pont) $\mathbb{P}(E|M) = \frac{\mathbb{P}(M|E)\,\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(M)}$
(a $\mathbb{P}(M)$ helyett természetesen jó a TVT-ben szereplő, (a)-ban kiszámolt alak, illetve $\mathbb{P}(M)$ jó akkor is, ha az (a)-ban a 2. megoldást választotta).
(1 pont) Tudja, hogy a számláló $\frac{120}{180} \cdot \frac{80}{120}$ (ha már az (a)-ban is felírta ezt a szorzatot, elég annyi, hogy $\frac{4}{9}$).
(1 pont) Tudja, hogy a nevező $\frac{25}{36}$ (az (a) alapján).
(1 pont) Tehát a keresett valószínűség $\frac{4/9}{25/36} = \frac{16}{25}$.
2. megoldás.
(1 pont) $\mathbb{P}(E|M) = \frac{\mathbb{P}(E \cap M)}{\mathbb{P}(M)}$ (definíció szerint).
(1 pont) $E \cap M$ azon kimenetelek halmaza, ahol a választott hallgató magyaros és az IB028-ban ül.
(1 pont) Ennek a halmaznak 80 eleme van.
(1 pont) Tehát $\mathbb{P}(E \cap M) = \frac{80}{180} = \frac{4}{9}$. Ez a pont csak akkor jár, ha már legalább egyszer hivatkozott a klasszikus val. mezőre vagy kedvező esetek száma/összes eset száma képletre. (Az előzővel viszont ebben az esetben összevonható.)
(1 pont) Így (az (a) alapján) a keresett valószínűség $\frac{4/9}{25/36} = \frac{16}{25}$.

(c) (8 pont)
1. megoldás.
(0 pont) Az előbbi jelöléssel a vizsgálandó eseményeink $\overline{M}$ és D.
(1 pont) Ha függetlenek lennének, az azt jelentené, hogy $\mathbb{P}(\overline{M} \cap D) = \mathbb{P}(\overline{M})\,\mathbb{P}(D)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(D) = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$. (Nem kell kiírni, hogy kedvező/összes, mert csak 1 pont jár rá.)
(1 pont) $\mathbb{P}(\overline{M}) = 1 - \mathbb{P}(M)$
(1 pont) $= 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.
(1 pont) $\overline{M} \cap D$ azon kimenetelek halmaza, ahol a választott hallgató az IB027-ben ül és nem magyaros.
(1 pont) Ennek a halmaznak 15 eleme van,
(1 pont) tehát $\mathbb{P}(\overline{M} \cap D) = \frac{15}{180} = \frac{1}{12}$.
Az előző 3 pont helyett ugyanez szorzási szabállyal is jó.
(1 pont) Mivel $\frac{1}{12} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{36}$, nem függetlenek. (Kellő indoklás esetén ez a (c) legelső pontjával összevonható.)
2. megoldás.
(2 pont) Ha $\overline{M}$ és D függetlenek, akkor M és D is függetlenek. Belátjuk, hogy M és D nem függetlenek, amiből következik, hogy $\overline{M}$ és D sem azok.
(1 pont) Tudja, hogy M és D függetlensége azt jelenti, hogy $\mathbb{P}(M \cap D) = \mathbb{P}(M)\,\mathbb{P}(D)$ (mindegy, hogy ez a megoldás során pontosan hol, de szerepeljen).
(0 pont) $\mathbb{P}(M) = \frac{25}{36}$ az (a) alapján.
(1 pont) $\mathbb{P}(D) = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$. (Nem kell kiírni, hogy kedvező/összes, mert csak 1 pont jár rá.)

(1 pont) $M \cap D$ azon kimenetelek halmaza, ahol a választott hallgató az IB027-ben ül és magyaros.
(1 pont) Ennek a halmaznak 45 eleme van,
(1 pont) tehát $\mathbb{P}(M \cap D) = \frac{45}{180} = \frac{1}{4}$.
Az előző 3 pont helyett ugyanez szorzási szabállyal is jó.
(1 pont) Mivel $\frac{1}{4} \neq \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{3}$, nem függetlenek.

3. Megvizsgáljuk, hogy egy burgonyaföld egy kis darabján hány krumplibogár található. Az itt található krumplibogarak száma jó közelítéssel Poisson-eloszlású és annak a valószínűsége, hogy pontosan két krumplibogarat találunk, $2e^{-2}$-vel egyenlő. Jelölje X a földdarabon található krumplibogarak számát.

   (a) Mi az eloszlás paramétere (λ)?

   (b) Mi a valószínűsége, hogy legalább egy krumplibogarat találunk a földdarabon?

   (c) Határozzuk meg a $2X-3$ valószínűségi változó várható értékét és a $-4X-7$ valószínűségi változó szórásnégyzetét.

   Megoldás.
   (a) (4 pont)
   (1 pont) A feladat szövege szerint $2e^{-2} = \mathbb{P}(X = 2)$
   (2 pont) $= \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$. (Ha 2 helyett 2!-t ír, arra 1 pont mindenképpen jár, és ha később impliciten kiderül, hogy $2! = 2$, akkor rendben van.)
   (1 pont) Tehát $\lambda = 2$ ((ez tényleg jó, mert $2^2/2 = 2$)).
   Megjegyzés. Könnyen látható, hogy a $\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda} = 2e^{-2}$ egyenletnek nincs más pozitív valós megoldása (útmutatás: deriváljuk a két oldal különbségét λ szerint).
   (b) (6 pont)
   (1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \geq 1)$
   (1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X < 1)$
   (1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X = 0)$ (az előzővel összevonható)
   (2 pont) $= 1 - e^{-\lambda}$ (persze meg lehet szorozni az $e^{-\lambda}$-t λ^0-nal és leosztani 0!-sal; erre alapból 1 pont jár és még 1 akkor, ha tud velük mit kezdeni)
   (1 pont) $= 1 - e^{-2} \approx 0{,}8647$ (kell a numerikus eredmény ezért a pontért).
   (c) (10 pont)
   Nem kell a várható érték és szórásnégyzet tulajdonságait megnevezni, csak megmutatni, hogy mely tulajdonságokat használjuk a konkrét esetben.
   (2 pont) $\mathbb{E}(2X - 3) = 2\,\mathbb{E}(X) - 3$ (lehet több lépésben is; azt nem kell megindokolni, hogy a konstans 3 várható értéke 3)
   (1 pont) $= 2\lambda - 3$
   (1 pont) $= 2 \cdot 2 - 3 = 1$.
   (Az előzővel összevonható; ha minden korábbi lépés jó volt, nem baj, ha nem írja oda a 2 helyett λ-val, mivel a Poisson-eloszlás várható értéke benne van a táblázatban.)
   (2 pont) $\mathbb{D}^2(-4X - 7) = \mathbb{D}^2(-4X)$
   (2 pont) $= 16\,\mathbb{D}^2(X)$ (az előzővel összevonható)
   (1 pont) $= 16\lambda$
   (1 pont) $= 32$. (Az előzővel összevonható a várható értékhez hasonlóan.)

4. Feldobunk két olyan szabályos pénzérmét, amiknek az egyik oldalára 1-es, a másik oldalára 0-s számot írtunk. Jelölje U az első, V a második érme felső oldalán látható számot a dobás után. Legyen $X = U + V$ és $Y = U - V$.

   (a) Adjuk meg indoklással X és Y együttes eloszlását (azaz $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$ értékét minden olyan k-ra és ℓ-re, amire ez a valószínűség pozitív) táblázatos formában.

(b) Határozzuk meg X és Y peremeloszlásait is.

(c) Igaz-e, hogy $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$?

(d) Független-e X és Y?

Megoldás.

Y \ X	0	1	2	p_Y
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
p_X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	(1)

(a) (9 pont)
Együttes eloszlás táblázat:
(4 pont) Az 1/4-ekre (darabonként 1 pont).
(1 pont) Arra, hogy nincs más nem 0 elem a táblázatban. (Ez elég impliciten is.)
Részpontok csak akkor járnak, ha nincs a táblázatban sem negatív, sem 1-nél nagyobb valószínűség. Ugyanez igaz a peremeloszlásokra.
Indoklás:
(1 pont) Ha $U = V = 0$, akkor $X = Y = 0$.
(1 pont) Ha $U = V = 1$, akkor $X = 2$ és $Y = 0$.
(1 pont) Ha $U = 0$ és $V = 1$, akkor $X = 1$ és $Y = -1$.
(1 pont) Ha $U = 1$ és $V = 0$, akkor $X = Y = 1$.
(b) (3 pont)
(1 pont) p_X-nél az oszlopösszegeknek megfelelő értékek szerepelnek.
(1 pont) p_Y-nál a sorösszegeknek megfelelő értékek szerepelnek.
(1 pont) p_X és p_Y értékeinek összege is 1.
(c) (5 pont)
1. megoldás $\mathbb{E}(XY)$ *kiszámítására (eloszlástranszformáció-szerű képlettel)*:
(2 pont) $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k\in\mathrm{Ran}(X)} \sum_{\ell\in\mathrm{Ran}(Y)} k\ell\,\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \frac{1}{4}\cdot(-1) + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 = 0$.
(Nem kell a formális képlet, ha legalább annyira részletezi, hogy kiderüljön, hogy a cellákbeli X-érték és Y-érték szorzatát súlyozza a cellához tartozó valószínűségekkel és ezeket adja össze. Különben max. 1 pont.)
2. megoldás $\mathbb{E}(XY)$ *kiszámítására (meghatározzuk* XY *eloszlását)*:
(2 pont) $\mathrm{Ran}(XY) = \{-1, 0, 1\}$, $\mathbb{P}(XY = -1) = \mathbb{P}(XY = 1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(XY = 0) = \frac{1}{2}$ (nem kell jobban indokolni, csak a táblázatból kiolvasni), tehát $\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{4}\cdot(-1)\Big(+ \frac{1}{2}\cdot 0\Big) + \frac{1}{4}\cdot 1 = 0$.
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 = 1$ (a nullás tag elhagyható).
Ha megvan, hogy $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) = 0$ és emiatt $\mathbb{E}(X)$ értékét nem kell kiszámolnia a kérdés megválaszolásához, akkor jár az 1 pont $\mathbb{E}(X)$-re.
(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 = 0$ (a nullás tag elhagyható).
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$, igaz az állítás.

(d) (3 pont)
(1 pont) Nem függetlenek, mert van olyan x, y, amire $\mathbb{P}(X = x, Y = y) \neq \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y)$.
(2 pont) Választ egy ilyen (x, y) párt és a táblázat alapján bemutatja, hogy mennyi $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$, $\mathbb{P}(X = x)$ és $\mathbb{P}(Y = y)$. (Itt egyébként bármely $x \in \mathrm{Ran}(X)$ és $y \in \mathrm{Ran}(Y)$ jó megoldás lesz.)
Ha azt írja, hogy $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ miatt függetlenek, a (d)-re azonnal 0 pont!

5. Egy ceruzaelem élettartama folytonos, örökifjú eloszlást követ, és tudjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy az elem két hónapnál kevesebb idő után fogy ki, $1 - e^{-4}$-gyel egyenlő. Jelölje X az elem élettartamát (hónapban mérve).

(a) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényének értékét az $x = 3$ helyen.

(b) Határozzuk meg X várható értékét és szórását.

(c) Feltéve, hogy a ceruzaelem élettartama nyolc hónapnál nagyobb, mennyi annak a valószínűsége, hogy (az első nyolc hónapot is beleszámítva) tizenhárom hónapnál is nagyobb lesz az élettartama?

Megoldás.
(a) (7 pont)
(2 pont) Folytonos és örökifjú eloszlás csak exponenciális lehet (és ennek a paraméterét kell meghatározni).
Ha ezt nem írja le, de azt igen, hogy exponenciális eloszlással kell dolgozni (vagy láthatóan azzal dolgozik), akkor a 2 pontból 1 jár.
(1 pont) A feladat szövege szerint $1 - e^{-4} = \mathbb{P}(X < 2)$
(1 pont) $= 1 - e^{-2\lambda}$.
(1 pont) Tehát $\lambda = 2$.
(1 pont) $f_X(3) = 2e^{-2\cdot 3}$ (nem kell λ-val és t-vel felírni, ott a táblázat)
(1 pont) $=2e^{-6} \approx 0{,}0050$.
(b) (5 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
(1 pont) $= \frac{1}{2}$.
(1 pont) $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$
(1 pont) $= \sqrt{1/\lambda^2}$
(1 pont) $= \sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$. (Ha a szórásra egyből azt írja, hogy $1/\lambda$, azt is elfogadjuk.)
(c) (8 pont)
(2 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X > 13|X > 8)$.
(1 pont) Az eloszlás örökifjúsága miatt
(1 pont) ez $\mathbb{P}(X > 13 - 8) = \mathbb{P}(X > 5)$-tel egyenlő (elég a $\mathbb{P}(X > 5)$).
(1 pont) $\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5)$
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X < 5)$, mert X (vagy F_X) folytonos,
(1 pont) $= 1 - (1 - e^{-2\cdot 5}) = e^{-10}$
(1 pont) $\approx 4{,}540 \cdot 10^{-5}$ (bármilyen alakban jó kellő mértékben kerekítve).
Ha valahol $\geq$ lesz a $>$ helyett, az abban az esetben nem baj, ha nem könnyebbedik tőle a feladat, vagyis ha még mindig kell a folytonosságra hivatkozni. Ha könnyebbedik, akkor max. 7 pont.
Jó megoldás úgy számolni, hogy $\mathbb{P}(X > 5) = \int_5^\infty f_X(x)\mathrm{d}x$, ekkor nem kell a folytonosságra hivatkozni.
Szintén jó megoldás az örökifjúság helyett a feltételes valószínűség definícióját használni, ez kicsit több munka. Ekkor az örökifjúság helyett arra jár 1 pont, hogy $\mathbb{P}(\{X > 13\} \cap \{X > 8\}) = \mathbb{P}(X > 13)$. Ezután mindkét valószínűséget ugyanúgy ki kell számolni (elég először az egyiket és utána a másikat), majd a végén leosztani az egyiket a másikkal.

6. * Legyen X egyenletes eloszlású a $(-1; 1)$ intervallumon és legyen $Y = X^4$. Határozzuk meg Y eloszlás- és sűrűségfüggvényét és várható értékét.
Megoldás.
(0 pont) Először Y eloszlásfüggvényét határozzuk meg és utána abból deriválással a sűrűségfüggvényét.

Eloszlásfüggvény és tartozékai, 9 pont:
(1 pont) $x \in \mathbb{R}$ esetén $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x)$.
(1 pont) $\mathrm{Ran}(Y) = (0, 1)$ (nem kell indokolni, csak kimondani; ha később impliciten derül ki,

hogy itt nem 0 a sűrűségfüggvény/nem 0 és nem 1 az eloszlásfüggvény, az is jó. Nyilván azért igaz, mert $\{x^4 \colon x \in (-1;1)\} = (0;1)$. Ha nyílt vagy félig zárt intervallumot ír, az sem baj).
(1 pont) Ezért $F_Y(x) = 0$, ha $x \leq 0$ ($x < 0$-val is OK*)
(1 pont) és $F_Y(x) = 1$, ha $x \geq 1$ ($x > 1$-gyal is OK*).
*A határpontokat bármelyik szakaszba be lehet sorolni, de ha nem sorolja be mindet valahova, azért összesen 1 pontot le lehet vonni.
(0 pont) Végül, ha $0 < x < 1$, akkor $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x) = \mathbb{P}(X^4 < x)$
(2 pont) $= \mathbb{P}(-x^{1/4} < X < x^{1/4})$
(1 pont) $= x^{1/4}$ ($= \sqrt[4]{x}$ is jó természetesen).
(2 pont) Valami indoklás az előző egyenlőségre. Pl.: ez $F_X(x^{1/4}) - F_X(-x^{1/4})$ és tudja/kiolvassa a táblázatból, hogy X-nek mint egyenletes eloszlású val. változónak az eloszlásfüggvénye $F_X(x) = \frac{x+1}{2}$, tehát $F_X(x^{1/4}) - F_X(-x^{1/4}) = \frac{x^{1/4}-1+1+x^{1/4}}{2} = x^{1/4}$. Vagy: $= \mathbb{P}(-x^{1/4} < X < x^{1/4})$ az egydimenziós geometriai valószínűségi mező képletével számítható ki, ahol a kedvező hosszúság $2x^{1/4}$ és az összes hosszúság 2.

Sűrűségfüggvény, 5 pont:
(1 pont) Legyen $x \in \mathbb{R}$. Ha F_Y differenciálható x-ben, akkor $f_Y(x) = F_Y'(x)$. (Ezért az 1 pontért elég, ha azt leírja, hogy $f_Y(x) = F_Y'(x)$.)
(0 pont) Ha pedig F_Y nem differenciálható x-ben, akkor $f_Y(x)$-et nullának választjuk, amit azért tehetünk meg, mert F_Y folytonos és véges sok pont kivételével differenciálható. Ha ezt nem írja oda, azért nem vonunk le pontot, viszont a következő 2 pontért kell az is, hogy a határpontok jó szakaszban legyenek – vagy ha $f_Y(1)$-et vagy $f_Y(0)$-t nem 0-ként definiálja, akkor indokolja is meg, hogy mindegy, hogy ezekben a pontokban mennyi az értéke.
(2 pont) Tehát $f_Y(x) = 0$, ha $x \leq 0$ vagy $x \geq 1$ (1–1 pont a két szakaszra),
(2 pont) és ha $0 < x < 1$, akkor $f_Y(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$.

Várható érték, 6 pont:
1. megoldás: Y sűrűségfüggvényét már ismerjük, ebből definíció szerint kiszámítjuk Y várható értékét.
(2 pont) $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Y(x) \mathrm{d}x$
(2 pont) $= \int_0^1 x \cdot \frac{1}{4}x^{-3/4} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{4}x^{1/4} \mathrm{d}x$ (az előzővel összevonható)
(1 pont) $= [\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}x^{5/4}]_{x=0}^{1}$
(1 pont) $= \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$. (Itt már elég a végeredmény.)
2. megoldás: a transzformált várható értékére vonatkozó képlettel.
(2 pont) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_X(x) \mathrm{d}x$
(2 pont) $= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^4 \mathrm{d}x$
(1 pont) $= [\frac{1}{2}\frac{x^5}{5}]_{-1}^{1}$
(1 pont) $= \frac{1}{10} - (-\frac{1}{10}) = \frac{1}{5}$. (Itt is elég a végeredmény.)

Vizsgadolgozat

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Legyenek X és Y valószínűségi változók pozitív és véges szórással.

   (a) Hogyan jelöljük X és Y korrelációját és hogyan definiáljuk ezt a korrelációt X és Y kovarianciája és szórásai segítségével?

   (b) Milyen β és α valós számok esetén nevezzük a $\beta X + \alpha$ valószínűségi változót az Y valószínűségi változó X-re vett lineáris regressziójának (vagyis milyen β-ra és α-ra lesz az $\mathbb{E}((Y - (\beta X + \alpha))^2)$ várható érték minimális)?
   β és α képletének megadásakor az előadásról ismert jelöléseket magyarázat nélkül fel szabad használni. $\mathbb{E}((Y - (\beta X + \alpha))^2)$ képletét nem kell megadni.

Megoldás.
(a) (9 pont)
(3 pont) Jelölés: $\operatorname{corr}(X, Y)$.
Részpontszám legfeljebb egészen minimális szintaktikai hiba esetén adható, kétes esetben a javító dönt.
(6 pont) Kiszámítása: $\operatorname{corr}(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}$.
Részpontszám legfeljebb csak akkor adható, ha a hiba pusztán szintaktikai jellegű.
(b) (11 pont)
(6 pont) $\beta = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)}$
(5 pont) és $\alpha = \mathbb{E}(Y) - \beta\,\mathbb{E}(X)$ a fenti β-val (természetesen jó még egyszer a képlettel leírva is).

2. Manyi néni, a 9.C osztály osztályfőnöke az osztályba járó 36 tanulónak vásárolt a téli szünet előtti utolsó osztályfőnöki órára egy-egy szaloncukrot. A szaloncukrok tömegét független, azonos eloszlású, folytonos valószínűségi változók írják le, 2 dkg várható értékkel és 0,1 dkg szórással. Jelölje X a 36 szaloncukor tömegének összegét.

   (a) Mennyi X várható értéke és szórásnégyzete?

   (b) Határozzuk meg a $-2X + 42$ és a $3X + 2025$ valószínűségi változók kovarianciáját.

   (c) Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy a 36 szaloncukor összes tömege 70 dekagrammnál nagyobb, de 74 dekagrammnál kisebb lesz.

Megoldás.
(0 pont) Jelölje $X_1, \dots, X_{36}$ az egyes szaloncukrok tömegét, ekkor $X = X_1 + \dots + X_{36}$.
(a) (6 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_{36})$ (a várható érték linearitása miatt, de annak megnevezéséért itt nem jár pont)
(1 pont) $= 36\,\mathbb{E}(X_1) = 72$ (az előzővel összevonható, ha van valami részszámítás),
(1 pont) mert az X_i-k azonos eloszlásúak.
(1 pont) És mivel az X_i-k függetlenek,
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(X_1) + \dots + \mathbb{D}^2(X_{36})$
(1 pont) $= 36 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}36$ (ismét azért, mert azonos eloszlásúak, de erre már nem jár pont – ha összekeveri a szórást a szórásnégyzettel, akkor ez a pont nem jár!).
(b) (3 pont)
(2 pont) $\operatorname{cov}(-2X + 42, 3X + 2025) = (-2) \cdot 3 \cdot \mathbb{D}^2(X)$ (ebből 1 pont a bilinearitás megfelelő alkalmazására, elég, ha a -6-os szorzó látszik, a bilinearitást megnevezni nem kell; 1 pont arra, hogy X önmagával vett kovarianciája a szórásnégyzete)
(1 pont) $= -6 \cdot 0{,}36 = -2{,}16$.
(c) (11 pont)
(1 pont) Valami indoklást ad arra (elég, ha később), hogy miért lehet a CHT-t használni. Elég annyit mondani, hogy az X_i-k függetlenek és azonos eloszlásúak (nem baj, ha nem írja oda, hogy véges szórással).
(1 pont) A közelítendő valószínűség $\mathbb{P}(70 < X < 74)$. (X_i-k összegével felírva is OK)
(3 pont) Sztenderdizálunk (ezt nem kell odaírni):

$$\mathbb{P}(70 < X < 74) = \mathbb{P}\left(\frac{70 - 36\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{36}\,\mathbb{D}(X_1)} < \frac{X - 36\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{36} \cdot \mathbb{D}(X_1)} < \frac{74 - 36\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{36}\,\mathbb{D}(X_1)}\right)$$

(úgy is jó természetesen, hogy $36\,\mathbb{E}(X_1)$ helyett $\mathbb{E}(X)$-et és $\sqrt{36}\,\mathbb{D}(X_1)$ helyett $\mathbb{D}(X)$-et ír)
(1 pont) $= \mathbb{P}\left(\frac{70-72}{\sqrt{36}\cdot 0{,}1} < \frac{X-72}{\sqrt{36}\cdot 0{,}1} < \frac{74-72}{\sqrt{36}\cdot 0{,}1}\right)$ (az előzővel összevonható, ha ez az alak megvan, vagy valami ezzel ekvivalens)
(2 pont) $\approx \Phi(10/3) - \Phi(-10/3) = 2\Phi(10/3) - 1$ (a két lépés összevonható; nem kell a Φ-jelölés, jó úgy is, hogy az $\frac{X-72}{\sqrt{36}\cdot 0{,}1}$ helyére standard normálist írunk és azzal számolunk tovább)
(1 pont) a centrális határeloszlás-tétel (elég: CHT) miatt.
(1 pont) $\Phi(10/3) \approx \Phi(3{,}33)$
(1 pont) $\approx 2 \cdot 0{,}9996$.
(0 pont) Tehát a közelítésünk $2\Phi(10/3) - 1 \approx 0{,}9992$ a közelítendő valószínűségre.

3. Minél több szilveszteri trombitát árulnak a piacon, annál rosszabb minőségűek a trombiták. Ha $n \in \mathbb{N}$ darab trombita kapható a piacon, minden trombita a többitől függetlenül $\frac{3}{n}$ valószínűséggel megfelelő minőségű.

   (a) Tegyük fel, hogy $n = 10$. Mi a valószínűsége, hogy a 10-ből legalább 3 trombita megfelelő minőségű? (A valószínűség pontos értékét adjuk meg.) Mennyi a megfelelő minőségű trombiták számának várható értéke és szórása?

   (b) Nagy n esetén közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy az n trombitából legfeljebb egy lesz megfelelő minőségű. (A valószínűség pontos értékét itt nem kell meghatározni.)

(a) (11 pont)
(1 pont) $n = 10$ esetén a megfelelő minőségű trombiták száma – amit nevezzünk X-nek – binomiális eloszlású
(1+1 pont) $(n =)10$ és $(p =)\frac{3}{10}$ valószínűséggel.
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \geq 3)$
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2)$
(1 pont) $= 1-(1-0{,}3)^{10}-10\cdot 0{,}3\cdot(1-0{,}3)^9-\binom{10}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot(1-0{,}3)^2$ (a $\mathbb{P}(X = 0)$-nál természetesen jó a $\binom{10}{0}$-s szorzót is odaírni, a $\mathbb{P}(X = 1)$-nél pedig a 10-es szorzó helyett $\binom{10}{1}$-eset; $\binom{10}{2}$ helyett szabad $\frac{10\cdot 9}{2}$-t írni egyből)
(1 pont) $\approx 1 - 0{,}7^{10} - 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^9 - 45 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8$ (az előzővel összevonható, és ha az előző rendben van és a következő is, akkor nem baj, ha ez kimarad)
(1 pont) $\approx 0{,}6172$.
(1 pont) Így a várható érték $\mathbb{E}(X) = np = 3$
(1 pont) és a szórás $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} = \sqrt{np(1-p)}$
(1 pont) $= \sqrt{2{,}1} \approx 1{,}4491$.
Az np és $np(1-p)$ képletekre külön nem jár pont, ezek benne vannak a táblázatban!
(b) (9 pont)
(1 pont) Jelölje most Y a megfelelő minőségű trombiták számát, akkor a közelítendő valószínűség $\mathbb{P}(Y \leq 1)$.
(4 pont) Mivel a binomiális eloszlás n-és n-től függő $p = p_n$ paraméterére $\lim_{n\to\infty} np_n = 3 =: \lambda$ teljesül, Y-t egy λ paraméterű Z Poisson-eloszlású val. változóval közelíthetjük.
Erre részpontok:

- Ha leírja, hogy Poisson-approximáció kell, az minden további indoklás és λ meghatározása nélkül is ér 1 pontot. (Sőt az is, ha nem azt mondja, hogy approximáció, hanem csak annyit, hogy Poisson-eloszlást használunk, és világos, hogy Y szerepében.)
- Ha azt írja, hogy ez azért igaz, mert n nagy és p kicsi, azért jár még 1 pont, akkor is, ha nem tudja, hogy λ-t hogyan kell meghatározni.
- Ha a határértékre vonatkozó állítás nem szerepel, de tudja, hogy np-nek felel meg λ, arra jár 1 pont, és ha λ-t ez alapján jól meghatározza, arra még 1.
- A teljes pontszám is megadható a határértékre való hivatkozás nélkül, de ebből 1 pont arra jár, hogy leírja, hogy n nagy és p kicsi, nem elég, hogy $np = \lambda$.

(0 pont) Tehát a közelítésünk $\mathbb{P}(Z \leq 1)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(Z = 0) + \mathbb{P}(Z = 1)$
(2 pont) $= e^{-3} + 3e^{-3} = 4e^{-3}$ (nem kell megindokolni, hogy $\lambda^0 = 1$ és $\lambda^1 = \lambda$, meg azt sem, hogy $0! = 1! = 1$)
(1 pont) $= 0{,}1991$.
Ha CHT-t próbál csinálni vagy binomiálissal számolni, akkor legfeljebb az első két pont jár (a második igazából nem is hasznos, de ennyi még belefér).

4. Legyen X egy szabályos kockadobás eredménye, Y pedig egy X-től független, geometriai eloszlású valószínűségi változó, amelyre $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1)$.
Megjegyzés: $\mathbb{E}(X)$ értékét indoklás nélkül is felhasználhatjuk.

   (a) Melyik valószínűség a nagyobb: $\mathbb{P}(X > 2)$ vagy $\mathbb{P}(Y > 2)$?

   (b) Mennyi $\mathbb{P}(X \leq 2, Y < 3)$?

   (c) Mennyi $\mathbb{P}(X \leq 2 | Y < 3)$?

   (d) Határozzuk meg XY várható értékét és $2Y - 2$ szórásnégyzetét.

Megoldás.
(a) (6 pont)
(1 pont) $\mathbb{P}(X > 2) = 4/6 = 2/3$.
(1 pont) valami minimális indoklás erre (elég annyi, hogy 4 kedvező eset van, vagy annyi, hogy mik a kedvező vagy a kedvezőtlen értékek).
(1 pont) Y eloszlásának paramétere (p) 1/6-dal egyenlő (nem kell jobban indokolni).
(2 pont) $\mathbb{P}(Y > 2) = (1 - p)^2 = 25/36$.
Mivel $\mathbb{P}(Y > k) = (1 - p)^k$ elhangzott előadáson, ez így elfogadható további indoklás nélkül, akkor is, ha $(1 - 5/6)^2$-et ír, de ha csak az eredményt közli, akkor max. 1 pont van.
Kiszámítható úgy is, hogy $\mathbb{P}(Y > 2) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2) = 1 - 1/6 - 5/36 = 25/36$ (de ekkor sem jár rá több pont, viszont a 2 ponthoz érdemi indoklás kell).
(1 pont) Tehát $\mathbb{P}(Y > 2)$ a nagyobb.
(b) (5 pont)
(1 pont) Mivel függetlenek,
(1 pont) $\mathbb{P}(X \leq 2, Y < 3) = \mathbb{P}(X \leq 2)\,\mathbb{P}(Y < 3)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(Y < 3) = \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 2)$
(1 pont) $= 1/6 + 5/36 = 11/36$.
Észre lehet azt is venni, hogy $\{Y < 3\}$ ugyanaz az esemény, mint $\{Y \leq 2\}$, aminek a komplementer valószínűségét már az (a)-ban esetleg kiszámoltuk. Ha ott kiszámoltuk, akkor elég a két esemény egyenlőségére és a komplementer valószínűségre hivatkozni.
(1 pont) $\mathbb{P}(X \leq 2) = 2/6 = 1/3$ (itt már nem várunk több indoklást).
(0 pont) Tehát a keresett valószínűség $\frac{11}{108}$.
(c) (2 pont)
1. megoldás:
(1 pont) Mivel függetlenek, (a feltétel elhagyható, tehát)
(1 pont) a keresett valószínűség pont $\mathbb{P}(X \leq 2)$, amiről már kiszámoltuk, hogy 1/3-dal egyenlő.
2. megoldás: kiszámoljuk a feltételes valószínűség definíciója szerint. A metszet valószínűségét a (b)-ben már kiszámoltuk, a feltétel valószínűsége meg $\mathbb{P}(Y < 3)$, amit már szintén kiszámoltunk.
(d) (7 pont)
(1 pont) Mivel függetlenek,
(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = 3{,}5$ (nem kell indoklás),
(1 pont) és $\mathbb{E}(Y) = 1/(1/6) = 6$,
(0 pont) tehát $\mathbb{E}(XY) = 21$.
(2 pont) $\mathbb{D}^2(2Y - 2) = 4\,\mathbb{D}^2(Y)$ (1 pont az additív konstans elhagyására, 1 a konstans szorzó négyzetének kiemelésére)
(1 pont) $= 4 \cdot \frac{1-1/6}{(1/6)^2} = 120$ (csak helyes végeredmény esetén jár pont és legyen legalább valami minimális indoklás is).

5. A következő dunai árvízig hátralévő idő mennyiségét (napokban mérve) jelöljük X-szel. Tegyük fel, hogy X folytonos, örökifjú eloszlást követ, pontosan 365 nap várható értékkel.

   (a) Mennyi X szórásnégyzete és miért?

   (b) Mennyi X^2 várható értéke?

   (c) Minek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy lesz 2026-ban dunai árvíz, vagy annak, hogy nem lesz? (2026 nem szökőév.)

   (d) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(91{,}25 < X < 182{,}5)$ valószínűséget. (A 91,25 és a 182,5 is napokban értendő.)

Megoldás.
(a) (5 pont)
(1 pont) arra, hogy ha az eloszlás folytonos és örökifjú, akkor csak exponenciális lehet.
(2 pont) Jelölje λ az eloszlás paraméterét. Ekkor mivel $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda = 365$, $\lambda = 1/365$,
(1 pont) és így $\mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
(1 pont) = 133 225.
(b) (3 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2$.
(0 pont) $\mathbb{D}^2(X)$-ről már tudjuk, hogy 133 225-tel egyenlő.
(0 pont) $\mathbb{E}(X)$-ről is tudjuk, hogy 365,
(1 pont) így $\mathbb{E}(X)^2$ értéke is 133 225.
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(X^2) = 266\ 450$.
Alternatív módszer: a transzformált várható értékére vonatkozó képlettel kiintegráljuk, kétszer parc. int. Munkaigényes és nem ajánlott megoldás. (c) (5 pont)
(1 pont) Annak a valószínűsége, hogy lesz dunai árvíz 2026-ban: $\mathbb{P}(X < 365)$ [ha $\leq$-t ír $<$ helyett, nem kell levonni pontot, majd máshol jár ilyesmire pont]
(1 pont) $= F_X(365)$
(1 pont) $= 1 - e^{-\frac{1}{365}\cdot 365} = 1 - e^{-1}$. (Összevonható az előzővel: nem kell az eloszlásfüggvényes jelölés, ha van valami értelmes részszámítás.)
(1 pont) Ez a valószínűség nagyobb, mint 1/2 (ezt elhisszük pontos numerikus érték nélkül, mert annyit számológép nélkül is lehet tudni, hogy $e > 2$),
(1 pont) így a komplementer valószínűségnél is nagyobb, vagyis annak a valószínűségénél, hogy nem lesz dunai árvíz 2026-ban, ami pont $1 - \mathbb{P}(X < 365)$.
Alternatív megoldás az előző 2 pontra: kiszámolja annak a valószínűségét, hogy $X \geq 365$, ami e^{-1} (nem is kell jobban indokolni), és megállapítja, hogy ez kisebb, mint $\mathbb{P}(X < 365)$.
(d) (7 pont)
(2 pont) $\mathbb{P}(91{,}25 < X < 182{,}5) = \mathbb{P}(X < 182{,}5) - \mathbb{P}(X \leq 91{,}25)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(X < 182{,}5) - \mathbb{P}(X < 91{,}25)$, mert folytonos (ha hivatkozik a folytonosságra, akkor a köztes lépést el szabad hagyni; ha egyből $<$-vel írja indoklás nélkül, akkor viszont -1 pont)
(2 pont) $= (1 - e^{-\frac{1}{365}\cdot 182{,}5}) - (1 - e^{-\frac{1}{365}\cdot 91{,}25})$
(1 pont) $= e^{-\frac{1}{4}} - e^{-\frac{1}{2}}$
(1 pont) $\approx 0{,}1723$.
Természetesen jó úgy is a megoldás, hogy a sűrűségfüggvényt integráljuk 91,25-től 182,5-ig: ennek megállapítására 2 pont, a sűrűségfüggvény behelyettesítésére 1 pont, a számolásra pedig 3 pont jár. Munkaigényesebb, mint a másik megoldás.

6. * Legyen X egyenletes eloszlású a $(0;1)$ intervallumon és X ismeretében legyen Y egyenletes eloszlású a $(0;e^X)$ intervallumon (ahol $e \approx 2{,}71\ldots$).

   (a) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y < e^{1/2})$ valószínűséget.

   (b) Feltéve, hogy Y kisebb, mint $e^{1/2}$, mi a valószínűsége, hogy X kisebb, mint $\frac{1}{2}$?

   Megoldás. (a) (12 pont)
   (1 pont) A folytonos TVT (teljes valószínűség tétele folytonos esetben) szerint
   (2 pont) $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(Y < e^{1/2}|X = x) f_X(x)\mathrm{d}x$.
   (1 pont) $f_X(x) = 1$, ha $0 < x < 1$ és $f_X(x) = 0$ egyébként.

   Innen 1. megoldás: közvetlenül feltételes eloszlásfüggvénnyel, felt. sűrűségfüggvény nélkül.
   (1 pont) $x \in (0,1)$ esetén $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}|X = x)$ annak a valószínűsége, hogy egy $\mathrm{U}(0;e^X)$ eloszlású valószínűségi változó kisebb lesz, mint $e^{1/2}$.
   (1 pont) Ez pedig egydimenziós valószínűségi mezővel (kedvező hosszúság/összes hosszúság képlettel) számolva, vagy az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényébe helyettesítve [elég, ha az indoklás impliciten szerepel]
   (1 pont) $\frac{e^{1/2}-0}{e^x-0} = e^{1/2}e^{-x}$, ha $1/2 < x < 1$,
   (1 pont) és 1, ha $0 < x \leq 1/2$ (ez bárminemű indoklás nélkül is OK).
   Az $x = 1/2$ pont bármelyik szakaszba besorolható, de valahova mindenképpen be kell sorolni.
   Az $x \notin (0;1)$ esettel nem kell foglalkozni.

   2. megoldás az utóbbi 4 pontra: feltételes sűrűségfüggvénnyel.
   (1 pont) Leírja, hogy $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{e^x-0} = e^{-x}$, ha $x \in (0,1)$ és $0 < y < e^x$,
   (0 pont) különben pedig $f_{Y|X}(y|x) = 0$ (ez nem igazán kell a megoldáshoz, ezért nem jár rá pont).
   (1 pont) Innen $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}|X = x) = \int_0^{e^x} f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y = 1$ (nem is kell indoklás ehhez itt sem)
   (1 pont) és $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}|X = x) = \int_0^{e^{1/2}} f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y$ (itt viszont kell az indoklás)
   (1 pont) $= \frac{e^{1/2}}{e^x}$.

   Mindkét megoldás esetén a folytatás:
   (2 pont) Tehát $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}) = \int_0^{1/2} 1\mathrm{d}x + e^{1/2}\int_{1/2}^1 e^{-x} \cdot 1\mathrm{d}x$
   (1 pont) $= \frac{1}{2} + e^{1/2}[-e^{-x}]_{1/2}^1 = \frac{1}{2} + 1 - e^{-1/2}$
   (1 pont) $\approx 0{,}8935$.

   (b) (8 pont)
   (0 pont) A keresett (feltételes) valószínűség $\mathbb{P}(X < 1/2|Y < e^{1/2})$.
   Az informális megoldás érdemi indoklás nélkül itt egyszerűen annyi, hogy

$$\mathbb{P}(X < 1/2|Y < e^{1/2}) = \frac{0{,}5}{0{,}8935} \approx 0{,}5596.$$

   Ha ennyi megvan, arra indoklás nélkül, illetve a dolgok homályos megnevezése esetén is lehet adni 5 pontot. Lentebb részletezzük a teljes megoldás néhány változatát.

   1. megoldás Bayes-tétellel és viszonylag intuitívan, további integrálás nélkül.
   (1 pont) Bayes-tétellel (szintén jó: Bayes-formula, egyszerű Bayes-tétel – ez az 1 pont akkor is jár, ha a Bayest aztán nem sikerül jól implementálni)
   (3 pont) $\mathbb{P}(X < 1/2|Y < e^{1/2}) = \frac{\mathbb{P}(X<1/2)\,\mathbb{P}(Y<e^{1/2}|X<1/2)}{\mathbb{P}(Y<e^{1/2})}$.
   Az utóbbi törtben a nevező a sima TVT-nek megfelelő alakban is jó, ahol $\{X < 1/2\}$-re és annak komplementerére (vagyis $\{X \geq 1/2\}$-re) feltételezünk. Nem jár pont arra, hogy ezek teljes eseményrendszert alkotnak.
   (1 pont) $\mathbb{P}(X < 1/2) = 1/2$ (ezt már fentebb kiintegráltuk, ha nem is hívtuk így, meg amúgy

is lehet tudni fejből és benne van a táblázatban is – nem kell indoklás).
(2 pont) $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}|X < 1/2) = 1$ (ugyanazért, amiért $\mathbb{P}(Y < e^{-1/2}|X = x) = 1$ teljesült minden $x \in (0; 1/2)$ esetén: ha $X < 1/2$, akkor Y a 0 és az $e^X < e^{1/2}$ között vesz fel értékeket – nem kell indoklás).
(0 pont) $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}) = 0{,}8935$ az (a) rész szerint.
(1 pont) Tehát a keresett feltételes valószínűség $\frac{0{,}5}{0{,}8935} \approx 0{,}5596$.

2. megoldás a (b)-re Bayes nélkül, a feltételes valószínűség definíciója szerint.
(2 pont) $\mathbb{P}(X < 1/2|Y < e^{-/2}) = \frac{\mathbb{P}(X<1/2, Y<e^{1/2})}{\mathbb{P}(Y<e^{1/2})}$ (a feltételes valószínűség definíciója szerint).
(4 pont) $\mathbb{P}(X < 1/2, Y < e^{1/2}) = \mathbb{P}(X < 1/2)$, mert ha $X < 1/2$, akkor Y-nak 0 és $e^X < e^{1/2}$ közé kell esnie. (Indoklás nélkül max. 2 pont).
(1 pont) $\mathbb{P}(X < 1/2) = 1/2$ (ezt már fentebb kiintegráltuk, ha nem is hívtuk így, meg amúgy is lehet tudni fejből és benne van a táblázatban is – nem kell indoklás).
(0 pont) $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}) = 0{,}8935$ az (a) rész szerint.
(1 pont) Tehát a keresett feltételes valószínűség $\frac{0{,}5}{0{,}8935} \approx 0{,}5596$.

Megjegyzés:
Ha az 1. megoldásban nem jön rá, hogy $\mathbb{P}(X < 1/2, Y < e^{1/2}) = \mathbb{P}(X < 1/2)$, akkor segíthet még a

$$\mathbb{P}(X < 1/2, Y < e^{1/2}) = \int_0^1 \int_0^{\min\{e^x, e^{1/2}\}} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{e^x} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

szokásos képlet is. Nem is muszáj minimummal felírni, ha megvan, hogy e^x mindig kisebb, mint $e^{1/2}$ (de erre az indoklásra jár 1 pont).
Az (a)-ban kiszámoltak szerint pedig $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = e^{-x}$, ha $0 < x < 1$ és $0 < y < e^x$.
Ez egy kicsit számolósabb megoldás, mint a többi, viszont ötlet egyáltalán nem kell hozzá, csak a feltételes valószínűség definíciója. Ezzel a módszerrel lehet továbbmenni akkor is, ha az 1. megoldást csinálja és nem jön rá, hogy $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}|X < 1/2) = 1$. Ezt a feltételes valószínűséget definíció szerint szétbontjuk és innentől a 2-es megoldásban találjuk magunkat. Amire már az 1. megoldás szerint járt pont, arra nem jár még egyszer.

Vizsgadolgozat

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező.

   (a) Ha $A, B \in \mathcal{F}$ események, mikor mondjuk azt definíció szerint, hogy A és B függetlenek?

   (b) Ha $X, Y \colon \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók, mikor mondjuk azt definíció szerint, hogy X és Y függetlenek?

   (c) Ha $X, Y \colon \Omega \to \mathbb{R}$ független valószínűségi változók, hogyan számíthatjuk ki a szorzatuk várható értékét a két változó várható értékei segítségével (feltéve, hogy mindhárom említett várható érték létezik)?

   Megoldás.
   (a) (5 pont) Ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.
   (b) (7 pont)
   (5 pont) Ha az $\{X < x\}$ és $\{Y < y\}$ események függetlenek
   (2 pont) minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.
   Természetesen meg lehet fogalmazni úgy is, hogy $\mathbb{P}(X < x, Y < y) = \mathbb{P}(X < x)\,\mathbb{P}(Y < y)$, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Eloszlásfüggvény-jelöléssel is OK.
   Ha „$<$” helyett „$\leq$”, „$\geq$” vagy „$>$” szerepel, akkor max. 5 pont a 6-ból, és a kvantorokra jár még max. 2. Ha egyenlőség, akkor max. 2+2 pont. Ha olyan definíciót ír, ami együttesen folytonos esetben ekvivalens a függetlenséggel (pl. $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén), akkor is max. 2+2 pont.
   (c) (8 pont)
   (4 pont) Ha páronként kizáróak (szintén OK: páronként diszjunktak, szintén OK képlettel, ha odaírja, hogy csak a nem egyenlő indexekre vonatkozik – ha nem írja oda, akkor -1 pont. Ha szöveggel írja és nem írja oda, hogy páronként, akkor max. 2 pont)
   (4 pont) és az uniójuk Ω (szintén OK: az uniójuk valószínűsége 1. Ha azt írja, hogy a valószínűségek összege 1, arra max. 3 pont, ha odaírja, hogy páronként kizáróak, és ha nem írja oda, akkor max. 1 pont).
   Részpontok csak minimális szintaktikai hiba esetén járnak.

2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza, ahol a c és d pozitív valós számok értékét úgy kell megválasztani, hogy $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1$ teljesüljön.

Y \ X	0	2
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	c	d
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(a) Határozzuk meg c és d értékét.

(b) Független-e X és Y?

(c) Határozzuk meg az $X + Y$ valószínűségi változó szórásnégyzetét.

Ha az (a) részt nem sikerül megoldani, a (b) és a (c) részt paraméteresen is megoldhatjuk. Ugyanez vonatkozik a 4-es feladatra is.

Megoldás.
(a) (8 pont)
(4 pont) Meghatározzuk a peremeloszlásokat (azaz X és Y perem-súlyfüggvényeit; nem muszáj táblázatosan). X súlyfüggvényét a megfelelő oszlopösszegek, Y-ét pedig a megfelelő sorösszegek adják.

Y \ X	0	2	p_Y
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	c	d	$c+d$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
p_X	$\frac{1}{4}+c$	$\frac{1}{4}+d$	$(\frac{1}{2}+c+d=1)$

Indokolni nem kell, de ha nem hibátlan a táblázat, akkor részpontok csak akkor járnak, ha van valami szöveges indoklás vagy a számolásból látható, hogy alapvetően jól csinálja, csak elszámolja. 1 pont arra, hogy X peremeloszlását hogyan kapjuk, 1 pont arra, hogy Y-ét hogyan, és 1–1 pont arra, hogy tényleg jól ki is számolja ezeket.
(1 pont) $1 = \mathbb{E}(X) = 2 \cdot (\frac{1}{4} + d) = \frac{1}{2} + 2d$.
(2 pont) $1 = \mathbb{E}(Y) = 1 \cdot (c + d) + 2 \cdot \frac{1}{4} = c + d + \frac{1}{2}$.
(0 pont) Innen $c + d = \frac{1}{2}$ és $c + d = 2d$.
(1 pont) Tehát $c = d = \frac{1}{4}$.

(b) (5 pont)
(1 pont) Akkor lesznek függetlenek, ha $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y)$ teljesül (súlyfüggvény-jelöléssel is OK)
(1 pont) minden $x \in \mathrm{Ran}(X)$ és $y \in \mathrm{Ran}(Y)$ esetén.
(1 pont) Behelyettesítve az (a)-ban kapott értékeket, az alábbi táblázatot kapjuk:

Y \ X	0	2	p_Y
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
p_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(1)

(1 pont) Valami minimális indoklást ír, akár konkrét számokkal, amiből (elég, ha impliciten) kiderül, hogy tudja, hogy $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ a $p_X(x)$-hez tartozó oszlop és a $p_Y(y)$-hoz tartozó sor kereszteződésénél látható valószínűség.
(1 pont) A feltétel minden x és y esetén teljesül (ahol x lehet 0 vagy 2, y pedig 0, 1 vagy 2 –

ezt nem kell odaírni), tehát függetlenek.
Paraméteres számolás esetén az (a)-beli táblázat alapján az a válasz jön ki, hogy ha $c = d = \frac{1}{4}$, akkor függetlenek, különben meg nem.

(c) (7 pont)
(1 pont) Mivel függetlenek,
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X+Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y)$.
(1 pont) Tudja, hogy $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, és hasonlóan Y-ra.
(0 pont) $\mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(Y)^2 = 1$ az (a)-beli feltétel alapján.
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = (0^2 \cdot \frac{1}{2} +) 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 2$.
(0 pont) Tehát $\mathbb{D}^2(X) = 1$.
(2 pont) $\mathbb{E}(Y^2) = (0^2 \cdot \frac{1}{4} +) 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$.
(0 pont) Tehát $\mathbb{D}^2(Y) = \frac{1}{2}$.
Ehelyett azt is lehet, hogy 1 pontért észreveszi, hogy Y binomiális eloszlású $n = 2$ és $p = \frac{1}{2}$ paraméterrel (nem kell indokolni), és ez alapján további 1 pontért: a szórásnégyzete $np(1-p) = \frac{1}{2}$.
(1 pont) Tehát $\mathbb{D}^2(X+Y) = \frac{3}{2}$ (ez az 1 pont jár az összes részletszámításra a második momentumok kiszámolásán kívül, beleértve X és Y szórásnégyzetének meghatározását).

Paraméteres számolás esetén $\mathbb{E}(X^2) = 1 + 4d$, $\mathbb{E}(Y^2) = c + d + 1$.
Viszont ha nem jött rá a (b)-ben, hogy függetlenek (akár azért, mert c és d értékét rosszul határozta meg az (a)-ban), akkor a (c)-t elvileg a $\mathbb{D}^2(X+Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y)$ képlettel kell megoldani. 1 pont jár erre a képletre, és sajnos csak 1 pont a kovariancia meghatározására, ami csak akkor jár, ha tényleg sikeresen és kellő indoklással meghatározza – kell hozzá, hogy $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ és $\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 2 = 1$. Ebben az esetben nehezebbé vált a feladat.
Ha viszont nem ezt a képletet használja, hanem azt akarja használni, hogy $\mathbb{D}^2(X+Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y)$, az nem jó, ezért ekkor a (c)-ből az első 2 pont nem jár, a többit viszont megszerezheti, mivel azok kellenének a helyes megoldáshoz is. Ebből az első 2 pontból 1-et csak akkor lehet szerezni, ha tudja, hogy függetlenek, de nem hivatkozik erre a képlet alkalmazásánál.
Természetesen meg szabad határozni $X+Y$ eloszlását is (konvolúciós képlettel vagy akár kézzel) és az alapján a szórásnégyzetét, erre is meg lehet kapni a 7 pontot.

3. Az egyetem nagy előadóiban található táblák mozgatógombjai egy adott pillanatban egymástól függetlenül 1/8 valószínűséggel üzemképtelenek.

   (a) Tegyük fel, hogy a HŐ jelű épületben 10 ilyen mozgatógomb van. Mennyi a valószínűsége, hogy ezen 10 gomb közül legalább három üzemképtelen? (A valószínűség pontos értékét adjuk meg.)

   (b) Tegyük fel, hogy a JÉG jelű épületben 100 ilyen gomb van. Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy a 100 gomb közül legalább 10, de legfeljebb 15 darab üzemképtelen. (A valószínűség pontos értékét itt nem kell meghatározni.)

Megoldás.
(a) (9 pont)
(1 pont) Az üzemképtelen gombok számát jelöljük X-szel, ekkor X binomiális eloszlású
(1+1 pont) $n = 10$ és $p = 1/8$ paraméterekkel (elég annyi, hogy $\mathrm{Bin}(10; 1/8)$; indoklást itt nem várunk).
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \geq 3)$
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2)$
(3 pont) $= 1 - (1 - 1/8)^{10} - 10 \cdot 1/8 \cdot (1 - 1/8)^9 - \binom{10}{2} \cdot (1/8)^2 \cdot (1 - 1/8)^8$ (a 10-es szorzó helyett persze jó $\binom{10}{1}$ is, és az első tagot is be lehet szorozni $\binom{10}{0}$-val; elég, ha impliciten derül ki, hogy

$\binom{10}{2} = 45$, és szabad eleve úgy írni, hogy $\frac{10\cdot 9}{2}$)
(0 pont) $= 1 - 0{,}2631 - 0{,}3758 - 0{,}2416$
(1 pont) $= 0{,}1195$ (elég ennyi a numerikus számolásból, ha megvannak az egyes tagok nem numerikusan).
(b) (11 pont)
Megoldás De Moivre–Laplace-tétellel (az általános CHT-s verzió pontozására lentebb térek ki):
(1 pont) Jelölje Y az üzemképtelen gombok számát, ekkor az (a)-hoz hasonlóan $Y \sim \mathrm{Bin}(100; 1/8)$.
(Ha már szerepelt az (a)-ban a binomiális eloszlás, és itt csak impliciten derül ki, hogy ennek az n-nek és p-nek megfelelően használja a De Moivre–Laplace-tételt, az nem baj).
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(10 \le Y \le 15)$,
(1 pont) amit a De Moivre–Laplace-tétellel közelítünk (az nem baj, ha a „De" hiányzik, vagy a két szerző nevét fordított sorrendben írja),
(0 pont) mert Y binomiális eloszlású nagy n-nel és „nem túl kicsi" (n-től nem függő) p-vel.
(0 pont) Sztenderdizálunk (ezt nem kell így odaírni): $\mathbb{P}(10 \le Y \le 15)$
(1 pont) $= \mathbb{P}\left(\frac{10-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{15-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$
(1 pont) $= \mathbb{P}\left(\frac{10-100/8}{\sqrt{700/64}} \le \frac{Y-100/8}{\sqrt{700/64}} \le \frac{15-100/8}{\sqrt{700/64}}\right)$ (az előzővel összevonható, ha látszik, hogy honnan jönnek a számok – hibás számolás esetén indoklás nélkül részpont nem jár)
(numerikusan is OK: $100/8 = 12{,}5$, $700/64 = 175/16 = 10{,}9375$, ennek a négyzetgyöke 3,3072)
(1 pont) $\approx \mathbb{P}(-0{,}7559 \le Y \le 0{,}7559)$
(1 pont) $\approx \mathbb{P}(-0{,}7559 \le Z \le 0{,}7559)$, ahol $Z \sim \mathrm{N}(0;1)$ [a De Moivre–Laplace-tétel miatt, amire már korábban járt pont]
(1 pont) $\overset{*}{=} \mathbb{P}(Z < 0{,}7559) - \mathbb{P}(Z < -0{,}7559) = \Phi(0{,}7559) - \Phi(-0{,}7559)$ (nem kötelező a Φ-s jelölés, viszont elég, ha azt adja meg),
(1 pont) $\approx 2\Phi(0{,}76) - 1$ (ez a pont együttesen jár arra, hogy a 0,7559-et közelíti a táblázatbeli legközelebbi hellyel és tudja, hogy $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$)
(1 pont) ami a táblázatból kiolvasva közelítőleg $2 \cdot 0{,}7764 - 1$
(0 pont) $= 0{,}5528$.
(1 pont) A $*$-gal jelölt egyenlőség azért igaz, mert Z (vagy: Z eloszlásfüggvénye) folytonos. (Hivatalosan itt $\mathbb{P}(Z \le 0{,}7559) - \mathbb{P}(Z < -0{,}7559)$-et kellene írni, de az egyenlőség a folytonosság miatt elhagyható.) Ha csak annyit ír indoklásnak, hogy „folytonos", az akkor fogadható el, ha jól kezeli a határokat, különben részpont sem jár.

Általános CHT-s megoldás esetén annyi a változás, hogy a CHT-re kell hivatkozni a De Moivre–Laplace-tétel helyett, és a binomiális eloszlás várható értéke/szórása helyett azt kell írni, hogy Y 100 darab független, azonos eloszlású indikátor összege, amelyek várható értéke 1/8 és szórásnégyzete 7/64.
Itt 1 pont a binomiális eloszlásra járó pont helyett arra, hogy Y független, azonos eloszlású indikátorok összege. 1 pont a De Moivre–Laplace helyett a CHT-re való hivatkozásra, és 1 pont a sztenderdizálás első lépése helyett valami olyasmire, hogy

$$\mathbb{P}(10 \le Y \le 15) = \mathbb{P}\left(\frac{10 - 10\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{10}\cdot\mathbb{D}(X_1)} \le \frac{Y - 10\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{10}\cdot\mathbb{D}(X_1)} \le \frac{15 - 10\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{10}\cdot\mathbb{D}(X_1)}\right),$$

ahol $X_1, \dots, X_{100}$ az indikátorok, amelyek összege Y. Írhat $10\,\mathbb{E}(X_1)$ helyett $\mathbb{E}(Y)$-t és $\sqrt{10}\,\mathbb{D}(X_1)$ helyett $\mathbb{D}(Y)$-t is. A következő 1 pont a várható érték és szórás helyes behelyettesítésére jár. Az ezutáni részek pontozása, illetve a keresett valószínűségre járó 1 pont ugyanúgy megy, mint az előző megoldásnál.
Ha az egyenlőséget már a normális eloszlásra való áttérés előtt elhagyja, akkor a keresett valószínűségre járó 1 pontot le kell vonni, illetve a folytonosságra való hivatkozásra sem jár a pont.

4. Az (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 < x < c \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $c > 0$ egy alkalmasan választott konstans.

(a) Határozzuk meg c értékét.

(b) Határozzuk meg X és Y kovarianciáját (X és Y várható értékeinek meghatározására járnak részpontok).

(c) Egyenletes eloszlású-e Y a $(0; 1)$ intervallumon?

Megoldás.
(a) (5 pont)
(0 pont) $f_{X,Y}$ akkor lesz együttes eloszlásfüggvény, ha nemnegatív (kikötöttük, hogy $c > 0$, ezért erre nem jár pont)
(1 pont) és $1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ (tetszőleges sorrendben lehet integrálni)
(1 pont) $= \int_0^c \int_0^1 x\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ (az előzővel összevonható, de ha nem jó, akkor az előző hiányában részpont nem jár)
(1 pont) $= \int_0^c x\mathrm{d}x$ (nem kell ennél jobban részletezni a konstans 1 függvény integrálását dy)
(1 pont) $= [x^2/2]_{x=0}^c$
(0 pont) $= c^2/2$.
(1 pont) Innen $c^2 = 2$, tehát $c = \sqrt{2}$ (nem kell indoklás; c-nek nemnegatívnak kell lennie, ezért $c = -\sqrt{2}$ nem jó, de ezt nem kell leírni; ha valaki azt írja, hogy az is jó, akkor ez a pont nem jár).
(b) (11 pont)
Standard megoldás:
(1 pont) $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^1 x^2 y\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ ((az előzővel összevonható, de ha nem jó, akkor az előző hiányában részpont nem jár)
(1 pont) $= \int_0^{\sqrt{2}} x^2[y^2/2]_{y=0}^1\mathrm{d}x$
(0 pont) $= \int_0^{\sqrt{2}} x^2/2\mathrm{d}x$
(1 pont) $= [x^3/6]_{x=0}^{\sqrt{2}}$
(1 pont) $= (\sqrt{2})^3/6 = \dfrac{2\sqrt{2}}{6}$. (Mindkét alakban jó. Numerikus érték itt nem kell, mert szimbolikusan is könnyen ki fog jönni, hogy a kovariancia 0, de egyébként 0,4714 az értéke.)
(1 pont) Hasonlóan $\mathbb{E}(X) = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^1 x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ (itt már nem jár pont az általános alakra, de elég az is, ha utána jól folytatódik, pl. jó primitív függvénnyel jó határokon)
(1 pont) $= \int_0^{\sqrt{2}} x^2\mathrm{d}x = [x^3/3]_{x=0}^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^3/3 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (ez nagyon hasonló számolás az $\mathbb{E}(XY)$-hoz, ezért csak 1 pont jár rá, és elég, ha minimális indoklás van, pl. az itt szereplő lépésekből legalább 2, amiből a primitív függvényt vissza lehet követni és a végeredmény megvan).
(1 pont) És szintén hasonlóan $\mathbb{E}(Y) = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^1 xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_0^{\sqrt{2}} x[y^2/2]_{y=0}^1\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{2}} x/2\mathrm{d}x$ (összevonható, itt már nem jár külön pont az y szerinti integrálásra, amire $\mathbb{E}(XY)$-nál járt)
(1 pont) $= [x^2/4]_{x=0}^{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.
(0 pont) Tehát $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

Alternatív megoldás, aminek köszönhetően a számolások nagy részére nincs szükség:
(3 pont) X és Y függetlenek (erre indoklás nélkül nem jár pont, indoklással is csak akkor, ha

az indoklásra legalább 1 pont még jár!),
(1 pont) mert (X, Y) értékkészlete egy téglalap,
(1 pont) aminek az oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel
(3 pont) és az együttes sűrűségfüggvény ezen a téglalapon egy csak x-től függő kifejezés (konkrétan: x) és egy csak y-tól függő kifejezés (sőt attól sem függő kifejezés, konkrétan: y) szorzatára bomlik (és ezért megegyezik $f_X(x)$ és $f_Y(y)$ szorzatával – ezt nem kell odaírni),
(1 pont) a téglalapon kívül pedig 0.
(1 pont) A függetlenség miatt
(1 pont) $\text{cov}(X, Y) = 0$.
A függetlenség bármilyen más helyes indoklására is jár 6 pont. Például: kiszámolja a peremsűrűségfüggvényeket (Y-ét amúgy is ki kell a (c) miatt) és megállapítja, hogy az együttes sűrűségfüggvény ezek szorzatára bomlik. Ebből 1 pont jár arra az esetre, amikor x **vagy** y kívül esik X, illetve Y értékkészletén; ekkor az együttes sűrűségfüggvény értéke és a marginális sűrűségfüggvény-értékek szorzata is 0.

(c) (4 pont)
(1 pont) Akkor lesz egyenletes eloszlású Y a $(0; 1)$-en, ha a sűrűségfüggvénye itt konstans (= 1 – ezt nem baj, ha nem írja oda), mindenhol máshol pedig 0. Az utóbbi nyilvánvalóan teljesül. (Ezt nem kell indokolni, de ha nem is említi, hogy a $(0; 1)$-en kívül mi van, akkor ez az 1 pont csak abban az esetben jár, ha az is ott van, hogy a konstansnak 1-nek kell lennie, mert különben más olyan sűrűségfüggvény is létezik, ami teljesíti a feltételeket).
(1 pont) Ha $0 < y < 1$, akkor $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{2}} x\mathrm{d}x$ (a két alakból itt már elég az egyik)
(1 pont) $= [x^2/2]_{x=0}^{\sqrt{2}} = 1$.
(1 pont) Tehát Y sűrűségfüggvénye tényleg konstans a $(0; 1)$-en, vagyis Y egyenletes eloszlású ezen az intervallumon.
A sűrűségfüggvény helyett az eloszlásfüggvényt is lehet ellenőrizni, de az bonyolultabb.

5. Szilveszterre veszünk 8 doboz kocsonyát. A kocsonyák dekagrammban mért tömegeiből álló vektort az $(X_1, \dots, X_8)$ fae. minta írja le, ahol a független mintaelemek egységesen ismeretlen μ dekagramm várható értékkel és 2 dekagramm szórással normális eloszlásúak. A vásárolt kocsonyákat megmérve az alábbi $(x_1, \dots, x_8)$ realizációt kaptuk:

$$x_1 = 49 \qquad x_2 = 52 \qquad x_3 = 48 \qquad x_4 = 46 \qquad x_5 = 50 \qquad x_6 = 49 \qquad x_7 = 51 \qquad x_8 = 47.$$

(a) Adjunk a minta alapján 96%(=0,96) szintű konfidenciaintervallumot a μ paraméterre.

(b) Döntsük el alkalmasan választott $\varepsilon = 0{,}02$ terjedelmű próbával, hogy a kapott realizáció alapján megegyezik-e 50 dekagrammal egy kocsonya tömegének várható értéke. Adjuk meg H_0-t, H_1-et, a próbastatisztika értékét, azt, hogy mi alapján döntünk, és magát a döntést is.

(c) Jelölje F_8^* a minta empirikus eloszlásfüggvényét az adott realizáció esetén. Mennyi $F_8^*(50{,}5)$ és $F_8^*(52)$?

Megoldás.
(a) (8 pont)
(0 pont) (A képletgyűjtemény alapján) a konfidenciaintervallum $\left[\overline{x_n} - \frac{\sigma u_{\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}, \overline{x_n} + \frac{\sigma u_{\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}\right]$.
(1 pont) Itt $n = 8$ (ez a mintaelemszám),
(1 pont) σ a szórás (nem kell szövegesen kiírni), vagyis $\sigma = 2$,
(1 pont) a mintaátlag $\overline{x_n} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i$
(1 pont) $= 49$.
(1 pont) A konfidenciaintervallum szintje $0{,}96 = 1 - \varepsilon$, tehát $\varepsilon = 0{,}04$, vagyis $1 - \varepsilon/2 = 0{,}98$ (elég, ha ez később, $u_{\varepsilon/2}$-nél derül ki),
(0 pont) így $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2)$
(0 pont) $= \Phi^{-1}(0{,}98)$
(1 pont) $\approx 2{,}05$.
(1 pont) Behelyettesítve a konfidenciaintervallum $[49 - \frac{2\cdot 2{,}05}{\sqrt{8}}, 49 + \frac{2\cdot 2{,}05}{\sqrt{8}}]$
(1 pont) $\approx [49 - 1{,}4496, 49 + 1{,}4496] = [47{,}5504, 50{,}4496]$ (elég, ha a végeredmény van meg numerikusan, sőt az előző lépéssel is összevonható az utolsó lépés, ha világos, hogy jól használja az általános képletet).
Elég a képletbe jól láthatóan beírni az adatokat, nem kell mindent külön-külön megnevezni.
(b) (8 pont)
(1 pont) Kétoldali,
(0 pont) egymintás u-próbát használunk.
(Ha jó az alternatíva és az eljárás, akkor nem baj, ha nincs odaírva, hogy kétoldali.)
(1 pont) Az alternatíva $H_0\colon \mu = 50$ vs. $H_1\colon \mu \neq 50$.
(1 pont) H_0-t akkor fogadjuk (nem utasítjuk) el, ha $|u| < u_{\varepsilon/2}$
(1 pont) $= u_{0{,}01} = \Phi^{-1}(0{,}99)$ (elég, ha az utóbbi szerepel)
(1 pont) $= 2{,}33$.
(0 pont) $u(= u(x_1, \dots, x_8)) = \frac{\overline{x_n} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$
(2 pont) $= \frac{49-50}{2}\sqrt{8} = -\sqrt{2} \approx -1{,}4142$ (itt már elég a végeredmény, ha már kiderült, hogy jó u-t használt; elég, ha impliciten derül ki, hogy $\mu_0 = 50$),
(1 pont) tehát H_0-t elfogadjuk.
Ha egyoldali próbát csinál $H_0\colon \mu \geq 50$ vs. $H_1\colon \mu < 50$ alternatívával, akkor max. 7 pont, ha $H_0\colon \mu \leq 50$ vs. $H_1\colon \mu > 50$ alternatívával, akkor max. 6 pont. Ha t-próbát próbál csinálni (pl. vizsgakurzusos hallgató), ahhoz sok minden hiányzik a táblázatból és nem fog rendesen menni, így kétoldali esetben max. 4 pont, egyoldali esetben az előzőhöz hasonlóan max. 3, illetve 2 pont.
(c) (4 pont)
(2 pont) $F_8^*(x) = \frac{1}{n}\{i \in \{1, \dots, 8\} |\ x_i < x\}$ (ugyanez jó szövegesen is).

(1 pont) Így $F_8^*(50{,}5) = \frac{6}{8} (= \frac{3}{4} = 0{,}75)$
(1 pont) és $F_8^*(52) = \frac{7}{8} (= 0{,}875)$.
Ha „$<$” helyett „$\leq$”-t ír, akkor az első 2 pontból max. 1 jár és $F_8^*(52)$-re sem jár az 1 pont. Ha általános indoklást ad (és az helyes), akkor utána elég a konkrét esetekben a végeredményt közölni.

6. * Legyenek U és V független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Az X és Y valószínűségi változókról tudjuk, hogy $X = aU+bV+c$ és $Y = dU+eV+f$ alkalmasan választott a, b, c, d, e, f valós számokra, valamint Y regressziós egyenese X-re $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \frac{1}{2}x + 3\}$ és $\mathbb{E}(X|Y) = \frac{3}{2}Y - 1$. Tudjuk azt is, hogy X és Y szórása is pozitív.

   (a) Mi X regressziós egyenese Y-ra (és miért)?

   (b) Határozzuk meg X és Y várható értékét.

   (c) Határozzuk meg c és f értékét.

   (d) Adjuk meg az $\mathbb{E}(\sin(X)Y|X)$ regressziót.

   (*Segítség*: Az (a), (b) és (d) rész megoldásához a, b, c, d, e, f értékét nem kell ismerni.)

   Megoldás.
   (a) (6 pont)
   (1 pont) Mivel X és Y is ugyanazon független normálisok (konkrétan U és V) lineáris/affin kombinációi (meg lehet fogalmazni konkrétabban is),
   (2 pont) a regresszió megegyezik a lineáris regresszióval.
   (1 pont) Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{E}(X|Y) = \beta X + \alpha$, ahol β és α az X-nek Y-ra vett lineáris regressziójának megfelelő kifejezések (nem kell kiírni őket). (Az előzővel összevonható.)
   (1 pont) Tehát $\beta = \frac{3}{2}$ és $\alpha = -1$.
   (1 pont) A regressziós egyenes így $\{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \colon x = \frac{3}{2}y - 1\}$. (Ha X és Y szerepét felcseréli, akkor ez az egy pont nem jár.) (Ez a lépés az előzővel összevonható, és ebben az esetben ha X és Y szerepét felcseréli, akkor a 2 pontból max. 1 jár.)
   (b) (5 pont)
   (1 pont) A lineáris regresszió képlete alapján $(\alpha =) 3 = \mathbb{E}(Y) - \frac{1}{2}\mathbb{E}(X) (= \mathbb{E}(Y) - \beta\,\mathbb{E}(X))$. (Az általános képleteket nem muszáj odaírni.)
   (1 pont) Hasonlóan (az (a) alapján) $-1 = \mathbb{E}(X) - \frac{3}{2}\mathbb{E}(Y)$.
   (3 pont) A kapott lineáris egyenletrendszert megoldva (sok részletszámítás nem kell, csak látszódjon, hogy tényleg ő oldotta meg) $\mathbb{E}(X) = 14$ és $\mathbb{E}(Y) = 10$.
   (c) (5 pont)
   (1 pont) $\mathbb{E}(X) = a\,\mathbb{E}(U) + b\,\mathbb{E}(V) + c$ (a várható érték linearitása miatt – nem kell odaírni)
   (1 pont) $= c$,
   (1 pont) mivel U és V standard normális eloszlásúak, tehát a várható értékük 0.
   (1 pont) Hasonlóan $\mathbb{E}(Y) = f$.
   (1 pont) Tehát $c = 14$ és $f = 10$.
   (d) (4 pont)
   (1 pont) $\mathbb{E}(\sin(X)Y|X) = \sin(X)\,\mathbb{E}(Y|X)$,
   (1 pont) mert... (valahogyan hivatkozik a regresszió megfelelő tulajdonságára, pl. ismert információ kiemelése, taking out what is known stb.)
   (1 pont) és $\mathbb{E}(Y|X)$ (megint csak a regresszió linearitása miatt – nem kell újra odaírni) $\beta X + \alpha$-val egyezik meg, ahol $\beta = \frac{1}{2}$ és $\alpha = 3$ az Y-nak X-re vett lineáris regressziójának megfelelő kifejezések.
   (1 pont) Így $\mathbb{E}(\sin(X)Y|X) = \frac{1}{2}X\sin(X) + 3\sin(X)$ (nem baj, ha nem bontja fel a zárójelet).

Vizsgadolgozat

1. (a) Legyen X valószínűségi változó és $x \in \mathbb{R}$. Mit jelent X eloszlásfüggvényének x pontbeli értéke, azaz $F_X(x)$ egy valószínűséggel kifejezve?

   (b) Legyenek X és Y véges szórású valószínűségi változók. Hogyan határozhatjuk meg a $\mathrm{cov}(X,Y)$ kovarianciát a két valószínűségi változó várható értéke és a szorzatuk várható értéke segítségével?

   (c) Legyen (X,Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó, jelölje együttes sűrűségfüggvényét $f_{X,Y}$, X perem-sűrűségfüggvényét (marginális sűrűségfüggvényét) pedig f_X.

   i. Hogyan határozhatjuk meg $f_X(x)$ értékét az $f_{X,Y}$ együttes sűrűségfüggvény ismeretében?

   ii. Ha $f_X(x) > 0$ és y egy valós szám, hogyan definiáljuk $f_{Y|X}(y|x)$-et (ahol $f_{Y|X}$ az Y-nak X-re vett feltételes sűrűségfüggvénye)?
   Az $f_X(x) = 0$ esetet nem kérdezzük, és itt nem kell újra leírni a választ az i. kérdésre.

Megoldás.
(a)
(5 pont) $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$.
$\{X < x\}$ jelentését nem kell megmagyarázni, de ha valaki azt írja, hogy $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega |\ X(\omega) < x\})$, természetesen az is max. pont.
(b)
(5 pont) $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
Ha valaki ehelyett a kovariancia definícióját írja fel, arra 1 pont jár.
(c)
(5 pont) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y$
(5 pont) és $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ (ha $f_X(x) > 0$).

2. Egy medve téli álmot alszik. Az adott tél során valamikor, egy véletlenszerűen (december első napjának kezdete és február utolsó napjának vége között) választott időpontban felébred. Tudjuk, hogy a medve élőhelyén decemberben 30%, januárban 40%, februárban pedig 35% eséllyel havas a táj. Tekintsük a következő eseményeket:

$$H := \{\text{a táj havas, amikor a medve felébred}\} \qquad D := \{\text{a medve decemberben ébred fel}\}$$
$$J := \{\text{a medve januárban ébred fel}\} \qquad F := \{\text{a medve februárban ébred fel}\}.$$

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a táj havas, amikor a medve felébred? Függ-e a válasz attól, hogy a február 28 vagy 29 napos?

   (b) Tegyük fel most, hogy a február 28 napos. Amikor a medve felébred, nem tudja, hogy milyen hónap van. Feltéve, hogy azt látja, hogy a táj havas, mennyi a valószínűsége, hogy decemberben ébredt fel?

   (c) Tegyük fel ismét, hogy a február 28 napos. Független-e az F és a H esemény?

Megoldás.
(a) (10 pont)
(0 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(H)$.
(1 pont) A D, J és F események teljes eseményrendszert alkotnak,
(1 pont) mert kizáróak és uniójuk az egész eseménytér. (Ha ez megvan, csak a teljes eseményrendszer kifejezés nincs, akkor meg lehet adni az előző pontot is. Nem kell indokolni, hogy ez a két tulajdonság tényleg teljesül rájuk.)
(0 pont) Továbbá mind pozitív valószínűségűek (ez is kell a TVT-hez, de külön nem jár rá pont).

(1 pont) Ezért a teljes valószínűség tétele (elég: TVT) szerint
(2 pont) $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H|D)\,\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(H|J)\,\mathbb{P}(J) + \mathbb{P}(H|F)\,\mathbb{P}(F)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(H|D) = 0{,}3$, $\mathbb{P}(H|J) = 0{,}4$ és $\mathbb{P}(H|F) = 0{,}35$.
(1 pont) Ha a február 28 napos, akkor $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(J) = \frac{31}{90}$ és $\mathbb{P}(F) = \frac{28}{90}$,
(1 pont) míg ha a február 29 napos, akkor $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(J) = \frac{31}{91}$ és $\mathbb{P}(F) = \frac{29}{91}$.
(1 pont) A TVT-be behelyettesítve mindkét esetben azt kapjuk, hogy $\mathbb{P}(H) = 0{,}35$. (Ezt elhisszük további részletszámítások nélkül is, ha a TVT szerinti egyenlőség jobb oldalán szereplő valószínűségeket megadta.)
(1 pont) Tehát a válasz nem függ attól, hogy 28 vagy 29 napos a február.
Alternatív megoldás az utóbbi 4 pontra: Észreveszi, hogy $\mathbb{P}(H|\overline{F}) = 0{,}35$ (ezt indokolni kell legalább minimálisan; D és J kizáróak és $\overline{F}$ bekövetkezése esetén 1/2–1/2 valószínűséggel következnek be), és mivel $\mathbb{P}(H|F)$ értéke szintén 0,35, ezért F-re és F^c-re (utóbbi $D \cup J$-val egyenlő) felírva a TVT-t, a február hosszától függetlenül 0,35 adódik eredményül. Itt másodszorra már nem kell a TVT feltételeit ellenőrizni.
Természetesen az egész (a) is megoldható ez alapján és nem kell a 3 hónapra külön–külön feltételezni. Ilyen esetben a TVT feltételeinek ellenőrzésénél elég azt elmondani, hogy F és $F^c (= D \cup J)$ egymás komplementerei, nem kell külön megemlíteni, hogy kizáróak és az uniójuk Ω. Erre ezért 1+1 helyett csak 1 pont jár, és még egy arra, hogy a $\mathbb{P}(H|\overline{F}) = 0{,}35$ kijelentést megindokolja.
Ha csak azt veszi észre, hogy $\mathbb{P}(H)$ nem függ a február hosszától, de nem számolja ki, hogy mennyi az értéke, akkor bármilyen megoldás esetén max. 9 pont, és ha nemcsak numerikus értékek hiányoznak, hanem a kiszámítás módját sem vázolja, akkor max. 7 pont.

(b) (5 pont)
(1 pont) A keresett feltételes valószínűség $\mathbb{P}(D|H)$.
(1 pont) Bayes-tétellel (egyszerűnek is szabad nevezni)
(1 pont) $\mathbb{P}(D|H) = \frac{\mathbb{P}(H|D)\,\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(H)}$ (szabad persze a nevezőt is a TVT-nek megfelelő alakban írni, de az (a)-ban már kiszámoltuk és nem jár rá újra pont)
(1 pont) $= \frac{0{,}3 \cdot \frac{31}{90}}{0{,}35}$ (az (a) alapján – nem kell indoklás)
(1 pont) $= \dfrac{31}{105} (\approx 0{,}2952)$ (elég csak közönséges tört vagy csak megfelelően kerekített tizedestört alakban).

(c) (5 pont)
Indoklás nélkül pont nem jár helyes válasz esetén sem.
1. (sztenderd) megoldás.
(1 pont) Akkor lesznek függetlenek, ha $\mathbb{P}(F \cap H) = \mathbb{P}(F)\,\mathbb{P}(H)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(F) = \frac{28}{90}$ (mert feltettük, hogy 28 napos a február).
(0 pont) $\mathbb{P}(H) = 0{,}35 = \frac{35}{100}$ az (a) alapján.
(1 pont) A szorzási szabály szerint
(1 pont) $\mathbb{P}(H \cap F) = \mathbb{P}(H|F)\,\mathbb{P}(F) = 0{,}35 \cdot \frac{28}{90} = \frac{49}{100} (\approx 0{,}1089)$.
(1 pont) Ez megegyezik $\mathbb{P}(H)\,\mathbb{P}(F)$-fel, ezért függetlenek.
Ha a szorzási szabályt nem nevezi meg, de levezeti a feltételes valószínűség definíciójából, az is jó.
2. (gyorsabb) megoldás.
(3 pont) Pontosan akkor lesznek függetlenek, ha $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H|F)$ (mivel $\mathbb{P}(F) > 0$ – ezt nem kell odaírni).
(1 pont) $\mathbb{P}(H|F) = 0{,}35$, és $\mathbb{P}(H) = 0{,}35$, amint már láttuk (nem kell feltétlenül újra odaírni, de ez a pont csak akkor jár, ha valahol – akár az (a)-ban – meg van magyarázva, hogy ezeket a valószínűségeket számolta ki).
(1 pont) Tehát függetlenek.

3. Az $X_1, \dots, X_{40}$ folytonos valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak, közös sűrűségfüggvényük

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x, & \text{ha } 2 < x < 3, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg X_1 várható értékét és szórásnégyzetét.

(b) Közelítsük alkalmas approximációval a $\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_{40} > 100)$ valószínűséget.

Pótfeladat: ha az (a)-ban nem sikerült kielégítő eredményt elérni, a (b)-t megoldhatjuk úgy is, hogy feltesszük, hogy $\mathbb{E}(X_1) = 2{,}5300$ *és* $\mathbb{D}^2(X_1) = 0{,}49$ *(ezek egyébként nem a helyes értékek).*

Megoldás.
(a) (10 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_1}(x)\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_2^3 \frac{2}{5}x^2\mathrm{d}x$ (az előzővel összevonható)
(1 pont) $= [\frac{2}{15}x^3]_{x=2}^3$
(1 pont) $= \frac{54-16}{15} = \frac{38}{15} (\approx 2{,}5333)$. (Elég egyfajta alakban megadni a végeredményt, és ha a primitív függvény megvan, további részletszámolások nem kellenek).
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2$.
(1 pont) $\mathbb{E}(X_1^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X_1}(x)\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_2^3 \frac{2}{5}x^3\mathrm{d}x$ (összevonás mint az előbb)
(1 pont) $= [\frac{2}{20}x^4]_{x=2}^3$
(1 pont) $= \frac{81-16}{10} = 6{,}5$.
(1 pont) Így $\mathbb{D}^2(X_1) \approx 0{,}0822$.
(b) (10 pont)
(1 pont) Mivel az X_i-k függetlenek és azonos eloszlásúak,
(1 pont) a centrális határeloszlás-tétel (elég: CHT) segítségével közelíthetjük a megadott valószínűséget.
(3 pont) Standardizálunk (ezt nem kell kiírni; $\mathbb{D}(X_1)$ helyett jó $\sqrt{\mathbb{D}^2(X_1)}$ is): legyen $X := X_1 + \ldots + X_{40}$, ekkor $\mathbb{P}(X > 100) = \mathbb{P}(\frac{X - 40\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{40}\,\mathbb{D}(X_1)} > \frac{100 - 40\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{40}\,\mathbb{D}(X_1)})$
(1 pont) $\approx \mathbb{P}(\frac{X - 40\cdot 2{,}5333}{6{,}3246\cdot 0{,}2867} > \frac{100 - 40\cdot 2{,}5333}{6{,}3246\cdot 0{,}2867})$)az előzővel összevonható, de ha rossz a numerikus eredmény, akkor részpont sem jár. Illetve ha az előző lépés megvolt, akkor ezután elég a jobb oldal kiszámolt értékét odaírni),
(1 pont) amit (a CHT szerint, amire már jár pont) $\mathbb{P}(Z > -0{,}7352)$-vel közelítünk, ahol Z standard normális eloszlású.
(1 pont) $\mathbb{P}(Z > -0{,}7352) = \mathbb{P}(Z < 0{,}7352)$ (ugyanez jó $\mathbb{P}(X < \ldots)$ helyett $\Phi(\ldots)$-tal is),
(1 pont) $\approx \mathbb{P}(Z < 0{,}74)$ (0,73 esetén se vonjunk le pontot)
(1 pont) $\approx 0{,}7704$ (a táblázat szerint).

Pótfeladat esetén a (b)-ben megkapható a maximális pontszám, azonban az egész feladat max. 16 pont (alapvetően az (a)-ban a primitív függvényekre és az azokat követő számolásokra nem jár pont). Kivéve ha megcsinálja jól rendes megoldással és pótmegoldással is a (b)-t.
Pótmegoldásnál a (b)-ben a pontozás változatlan. Az általános standardizálás után kapott kifejezésből behelyettesítve ez lesz: $= \mathbb{P}(\frac{X - 40\cdot 2{,}53}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{0{,}49}} > \frac{100 - 40\cdot 2{,}5300}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{0{,}49}} \approx \mathbb{P}(\frac{X - 40\cdot 2{,}53}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{0{,}49}} > -0{,}2711)$.
Standard normális eloszlásra áttérve a pótvégeredmény $\mathbb{P}(Z > -0{,}2711) = \mathbb{P}(Z < 0{,}2711) \approx \mathbb{P}(Z < 0{,}27) \approx 0{,}6064$.

4. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, ahol X Poisson-eloszlású $\lambda = 3$ paraméterrel, Y pedig szintén diszkrét, a következő eloszlással: $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(Y = 3) = \frac{1}{3}$ és $\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{1}{6}$.

   (a) Határozzuk meg X, X^2, Y és Y^2 várható értékét.

   (b) Adjuk meg (indoklással) az $\mathbb{E}(Y^2\cos(X) + 2026X^2Y + 138X + 1|X)$ regressziót.

   Megoldás.
   (a) (7 pont)
   (1 pont) $\mathbb{E}(X) = \lambda = 3$.
   (1 pont) Így $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2$
   (1 pont) $(= \lambda + \lambda^2) = 3 + 9 = 12$. (Természetesen ki lehet számolni a transzformált várható értékének képletével is, de nem érdemes.)
   (1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}6667$ (bármelyik alak elég önmagában is, és nem kell általánosabban felírni a várható érték képletét).
   (2 pont) $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot 4^2$ (nem kell indokolni és általánosabban írni sem, de az általános képletre jár 1 pont, és utána ezt a közbülső lépést át lehet ugrani, ha jó, ami utána jön)
   (1 pont) $= 2 + 3 + \frac{8}{3} = 7\frac{2}{3} = \frac{23}{3} \approx 7{,}6667$ (bármelyik alak elég önmagában is).

   (b) (13 pont)
   (1 pont) $\mathbb{E}(Y^2\cos(X) + 2026X^2Y + 138X + 1|X) = \mathbb{E}(Y^2\cos(X)|X) + \mathbb{E}(2026X^2Y|X) + \mathbb{E}(138X|X) + \mathbb{E}(1|X)$
   (2 pont) $= \mathbb{E}(Y^2\cos(X)|X) + 2026\,\mathbb{E}(X^2Y|X) + 138\,\mathbb{E}(X|X) + \mathbb{E}(1|X) =: (\star)$ (az előzővel összevonható)
   (1 pont) a regresszió/feltételes várható érték linearitása miatt. (Ha csak annyit ír, hogy linearitás, az akkor fogadható el, ha jól csinálja.)
   (1 pont) $\mathbb{E}(1|X) = 1$ (elég, ha ez impliciten derül ki, és lehet akár már a legelején is alkalmazni).
   (3 pont) $(\star) = \cos(X)\,\mathbb{E}(Y^2|X) + 2026X^2\,\mathbb{E}(Y|X) + 138X + 1 =: (\star\star)$ (tagonként 1 pont)
   (1 pont) mert... (valahogyan hivatkozik a regresszió megfelelő tulajdonságára, pl. ismert információ kiemelése, taking out what is known stb.)
   (2 pont) $(\star\star) = \cos(X)\,\mathbb{E}(Y^2) + 2026X^2\,\mathbb{E}(Y) + 138X + 1$,
   (1 pont) mert függetlenek.
   (1 pont) Ebbe az (a)-beli eredményeket behelyettesítve a végeredmény $\frac{23}{3}\cos(X) + \frac{16208}{3}X^2 + 138X + 1$. (Négy jegyre kerekített tizedestört alakban is OK, $16208/3 = 5402{,}6666$.)

   A tulajdonságok megnevezése mellett jó egy általános képlet megadása is, és nem baj, ha kihagy olyan feltételeket, hogy „ha az adott várható érték létezik”, sőt az ismert információ kiemelésénél nézzük el azt is, ha nem tudjuk meg, hogy a h függvénynek milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie.

5. Egy kisállat-kereskedésben olyan hörcsögöket árulnak, amik a boltos állítása szerint várható értékben legfeljebb 20 cm testhosszúságúra nőnek. Megkértünk 7 hörcsögtulajdonost, akik itt vásárolták háziállatukat, hogy mérjék meg már felnőtt hörcsögeik testhosszúságát. Az alábbi $(x_1, \dots, x_7)$ realizáció adódott (centiméterben mérve):

$$x_1 = 19{,}1 \qquad x_2 = 21{,}0 \qquad x_3 = 24{,}2 \qquad x_4 = 17{,}8 \qquad x_5 = 20{,}0 \qquad x_6 = 22{,}9 \qquad x_7 = 22{,}0.$$

Feltételezzük, hogy a hörcsögök testhosszúságai független, normális eloszlású valószínűségi változókkal modellezhetőek, ismeretlen várható értékkel és 2 cm szórással.

(a) Döntsük el alkalmasan választott $\varepsilon = 0{,}03$ terjedelmű próbával, hogy igaz-e a boltos állítása. Adjuk meg H_0-t, H_1-et, a próbastatisztika értékét, azt, hogy mi alapján döntünk, és magát a döntést is.

(b) Mekkora a próba p-értéke?

Megoldás.
(a) (12 pont)
(1 pont) Egyoldali,
(0 pont) egymintás u-próbát használunk,
(1 pont) amelynek alternatívája $H_0 \colon \mu \leq 20$ vs. $H_1 \colon \mu > 20$ (ahol μ jelöli a mintaelemek várható értékét).
(1 pont) H_0-t akkor fogadjuk (nem utasítjuk) el, ha $u = u(x_1, \dots, x_7) \leq u_\varepsilon$ (nem baj, ha „$\leq$” helyett „$<$” van)
(1 pont) $= \Phi^{-1}(1-\varepsilon) = \Phi^{-1}(0{,}97)$
(1 pont) $\approx 1{,}88$.
(1 pont) A mintaátlag $\overline{x_n} = \frac{1}{7}(x_1 + \ldots + x_7)$
(1 pont) $= 21$ (az is OK, ha a konkrét számokkal számol, nem pedig az „általános képlettel”).
(0 pont) $\mu_0 = 20$ a H_0 szerinti várható érték.
(1 pont) $\sigma = 2$ a mintaelemek szórása (elég, ha ez impliciten derül ki u képletéből).
(1 pont) $n = 7$ a mintaelemszám (ez is).
(1 pont) $u = \frac{\overline{x_n} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{21-20}{2}\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ (nem kell az általános képletet leírni, csak írjon valami olyasmit legalább konkrét számokkal, amiből kiderül, hogy erre hivatkozik.)
(1 pont) $= 1{,}3229$.
(1 pont) Tehát H_0-t elfogadjuk (nem utasítjuk el).
(b) (8 pont)
(2 pont) A próba p-értéke az a terjedelem, amely mentén éppen H_0 elfogadása és elutasítása határán állunk.
(1 pont) Ez esetünkben azt jelenti, hogy a p-érték egy olyan ε, amelyre a kapott u megegyezik u_ε-nal. (Ha ennyi megvan, akár az u konkrét értékére is, akkor az előző 2 pont is jár.)
(1 pont) Vagyis ε-t úgy kell megválasztani, hogy $u = 1{,}3229 = u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1-\varepsilon)$ teljesüljön,
(1 pont) vagyis igaz legyen, hogy $1 - \varepsilon = \Phi(1{,}3229)$
(1 pont) $\approx \Phi(1{,}32)$
(1 pont) $\approx 0{,}9066$.
(1 pont) Innen a p-érték $\varepsilon = 1 - 0{,}9066 = 0{,}0934$ (itt már elég a végeredmény).

6. * Az (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó értékkészlete a

$$\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 < x < 2, 0 < y < x - 1\}$$

háromszög, együttes eloszlásfüggvénye pedig

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 \text{ vagy } y \leq 0, \\ 2(x-1)y - y^2, & \text{ha } 1 < x < 2 \text{ és } 0 < y < x - 1, \\ (x-1)^2, & \text{ha } 1 < x < 2 \text{ és } y \geq x - 1, \\ 2y - y^2, & \text{ha } x \geq 2 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 1, & \text{ha } x \geq 2 \text{ és } y \geq 1. \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg X, illetve Y (marginális) eloszlásfüggvényét.

(b) Határozzuk meg (X, Y) együttes sűrűségfüggvényét.

(c) Kétdimenziós egyenletes eloszlású-e (X, Y) a Δ háromszögön?

Megoldás. (a) (9 pont)
(1 pont) $F_X(x) = 0$, ha $x \leq 1$ és $F_X(x) = 1$, ha $x \geq 2$. (Ezt nem kell indokolni, de a megadott értékkészlet és az eloszlásfüggvény definíciója alapján világos. A határokat bármelyik szakaszhoz be szabad sorolni, és lehet ezt az esetet is a többivel együtt kezelni.)
(1 pont) Hasonlóan $F_Y(y) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F_Y(y) = 1$, ha $y \geq 1$.

Az (a) további részére *1. (standard) megoldás*:
(1 pont) Ha $1 < x < 2$, akkor $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y)$
(3 pont) $= \lim_{y\to\infty}(x-1)^2 = (x-1)^2$.

(Vagy:
(1 pont) $\overset{*}{=} \lim_{y\uparrow x-1} F_{X,Y}(x, y)$ (ne vonjunk le pontot, ha $y \to x - 1$-et ír)
(1 pont) $= 2(x-1)(x-1) - (x-1)^2 = (x-1)^2$.
(1 pont) A $*$-gal jelölt egyenlőség azért igaz, mert X (vagy (X, Y) vagy $F_{X,Y}$ vagy F_X) folytonos.[a] Vagy azért, mert a feladat megadta, hogy $(y, x - 1)$ már pont nincs benne (X, Y) értékkészletében (és ezért $F_{X,Y}$ folytonos ebben a pontban – ezt nem kell odaírni).
A $*$-gal jelölt egyenlőség helyett jó az is, hogy $\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(x, x - 1) = (x-1)^2$, de itt is hivatkozni kell a folytonosságra. Jó úgy is, hogy $\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{y\to z} F_{X,Y}(x, y)$ vagy $\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(x, z)$, ahol z egy tetszőleges olyan szám, ami nagyobb, mint $x-1$; ezekben az esetekben a pontozás szempontjából a folytonosságra már nem kell hivatkozni, jár arra is az 1 pont.)

(1 pont) Hasonlóan ha $0 < y < 1$, akkor $F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x, y)$
(2 pont) $= \lim_{x\to\infty} 2y - y^2 = 2y - y^2$.

(Vagy:
(1 pont) $= \lim_{x\to 2} F_{X,Y}(x, y)$ (megint a folytonosság miatt, de itt arra már nem jár pont. Ha itt hivatkozik rá és F_X-nél nem, akkor az előbbi pontot meg lehet adni rá.)
(1 pont) $= 2y - y^2$.)

Ehelyett megint jó az is, hogy $\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(2, y) = 2y - y^2$ (és itt is kellene a folytonosságra hivatkozni, de szintén nem jár rá pont). Szintén jó az, hogy x-szel nem 2-höz, hanem valami annál nagyobbhoz tartunk (mind a határértékes, mind a behelyettesítős verzióban), és akkor elvi szinten sem kell a folytonosságra hivatkozni.

[a] Nem kell jobban indokolni, de: (X, Y) folytonos $\Rightarrow$ X folytonos $\Rightarrow$ F_X folytonos. Másik lehetséges érvelés: (X, Y) folytonos $\Rightarrow$ $F_{X,Y}$ folytonos $\Rightarrow$ F_X folytonos. $F_{X,Y}$ folytonossága pedig a megadott képletből is látszik, (X, Y) folytonossága nélkül is elhisszük. A folytonosság azért kell, mert nem folytonos esetben adott x-re $y \mapsto F_{X,Y}(x, y)$ általában csak balról folytonos, ezért $\lim_{y\uparrow x-1} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(x, x - 1) = \mathbb{P}(X < x, Y < x - 1)$, ami nem feltétlenül egyezik meg $\mathbb{P}(X < x, Y \leq x - 1) = \mathbb{P}(X < x)$-szel.

Az (a) első 2 pontja utáni részre *2. megoldás*: nem használjuk fel, hogy $F_X(x)$ és $F_Y(y)$ az együttes sűrűségfüggvény határértékeként számítható, hanem definíció alapján számoljuk őket.
(1 pont) Ha $1 < x < 2$, akkor $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$
(2 pont) $= \mathbb{P}(X < x, Y < 42)$
(0 pont) $= F_{X,Y}(x, 42)$ (az előzővel összevonható, ha már megjelent valami valószínűség a megoldásban)
(1 pont) $= (x-1)^2$.
Itt a 42 helyére bármilyen $x-1$-nél nagyobb szám jó és nem kell a folytonosságra hivatkozni. Ha pont $x-1$-et ír, akkor hivatkozni kell a folytonosságra, különben csak 1 pont jár a 2-ből.
(1 pont) Hasonlóan ha $0 < y < 1$, akkor $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(X < 10, Y < y)$ (itt már nem jár pont a folytonosságra való hivatkozásra, így a 10 helyett akár 2 is beírható, vagy bármilyen 2-nél nagyobb szám)
(1 pont) $= 2y - y^2$.

Az (a) első 2 pontja utáni részre *3. (hosszabb, munkaigényesebb, de helyes) megoldás*: az (a) előtt megoldjuk a (b)-t (pontozás: lásd ott), majd kiszámoljuk a perem-sűrűségfüggvényeket (4 pont), és ezek integrálásával ($-\infty$-től a megfelelő pontig) a perem-eloszlásfüggvényeket (3 pont). Az eloszlásfüggvények konstans 0 vagy 1 szakaszára már járt pont, ezért a perem-sűrűségfüggvények konstans 0 szakaszával nem kell foglalkozni (az együttes sűrűségfüggvényével is csak a (b)-ben kell).

Ha $F_X(x)$-re y-tól függő vagy $F_Y(y)$-ra x-től függő mennyiséget hoz ki, akkor az (a)-ra összesen legfeljebb 6 pont (még ha elírásnak is tűnik), és ha ez ismétlődik, akkor legfeljebb 3 pont!

(b) (7 pont)
(1 pont) Mivel (X, Y) folytonos (amint meg van adva),
(1 pont) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\, \partial y}$ (a deriválások sorrendje tetszőleges, és bármilyen értelmes ekvivalens jelölés elfogadható a második parciális deriváltra. Az előbbi pontnál viszont az együttes folytonosságra kell hivatkozni, nem elég a peremeloszlások vagy eloszlásfüggvények folytonosságára, még az együttes eloszlásfüggvényére sem!)
(2 pont) $f_{X,Y}(x, y) = 0$, ha $(x, y) \notin \Delta$ (vagyis ha az $F_{X,Y}$-nál megadott öt esetből nem a másodikban vagyunk – ezt bárhogyan meg lehet fogalmazni, nem baj, ha valahol egyenlőség van egyenlőtlenség miatt vagy fordítva, és erre az 1 pontra indoklás sem kell. Ha a négy esetből, amikor 0 az együttes sűrűségfüggvény, legalább kettőt helyesen megad, de nem mindet, akkor lehet adni a 2-ből 1 pontot.)
(1 pont) Ha ($(X, Y) \in \Delta$, azaz) $1 < x < 2$ és $0 < y < x - 1$, akkor $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 (2(x-1)y)}{\partial x\, \partial y}$ (ez a fenti általános képlettel összevonható, csak az $(x, y) \notin \Delta$ esetet kell külön kezelni)
(1 pont) $= \frac{\partial (2y)}{\partial y} = \frac{\partial (2(x-1)-2y)}{\partial x}$ (a kettő közül elég az egyik, de teljes pontszámért legyen valami részletszámítás)
(1 pont) $= 2$.
Ha a perem-sűrűségfüggvényekből próbálja az együttest kitalálni (pl. azt írja, hogy X és Y függetlenek), a (b)-ben legfeljebb a tartományon kívüli 0 értékre járó 2 pontot kaphatja meg!

(c) (4 pont)
(1 pont) A Δ-n kétdimenziós együttes eloszlás együttes sűrűségfüggvénye Δ-n konstans (egyenlő $1/T_\Delta = 2$ – ez nem kell, viszont jó ahelyett, hogy konstans, és ha elmondja, hogy a konstansnak 2-nek kell lennie, akkor a következő pont is jár),
(1 pont) mindenhol máshol pedig 0.
(2 pont) A (b) alapján ez teljesül, tehát a válasz igen.
Ha a peremeloszlásokra vagy bármilyen momentumokra vagy függetlenségre hivatkozik, a (c)-re 0 pont!

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az

ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

Vizsgadolgozat

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. (a) Írjuk fel a Poincaré-formulát három eseményre.

   (b) Milyen esetben nevezünk egy valószínűségi változót egyszerűnek?

   (c) Legyen X valószínűségi változó, jelölje eloszlásfüggvényét F_X. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie F_X-nek ahhoz, hogy az előadáson elhangzott állítás garantálja, hogy X folytonos valószínűségi változó és az $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$,

$$f(x) = \begin{cases} F_X'(x), & \text{ha } F_X \text{ deriválható } x\text{-ben,} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

   függvény sűrűségfüggvénye X-nek?

Megoldás.
(a)
(0 pont) Jelölje az eseményeket A, B, C, ekkor a Poincaré-formula:
(6 pont) $\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$.
Ha ugyanennek egy helyes átrendezését adja meg (pl. a metszet áll az egyik oldalon), arra 5 pont jár.
(b) (4 pont) Ha értékkészlete véges (ekvivalens megfogalmazásban is jó, pl. véges sok értéket vesz fel).
(c)
(5 pont) Ha F_X (minden pontban) folytonos
(5 pont) és véges sok pont kivételével differenciálható.
Ha azt írja, hogy megszámlálható sok pont kivételével differenciálható, az egyébként helyes, de nem tanultuk és nehezebb is belátni, hogy helyes, 2 pont jár rá.
Ha azt írja, hogy véges sok/megszámlálhatóan sok pont kivételével folytonos, arra nem jár pont! Ha azt írja, hogy minden pontban differenciálható, arra 1 pont jár. (Mert ez kicsit gyenge feltétel, pl. az egyenletes és az exponenciális eloszlást sem fedi le.)

2. Egy bizonyos fajta kaparós sorsjeggyel 60% valószínűséggel nem nyer semmit a tulajdonosa (azaz a nyeremény 0 forint), 39% valószínűséggel 1000 forintot nyer és 1% valószínűséggel 61 000 forintot nyer. Veszünk 100 ilyen sorsjegyet. Feltételezzük, hogy az egyes sorsjegyek nyereményei egymástól függetlenek.

   (a) Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét (a valószínűség pontos értékének meghatározása nélkül), hogy a 100 sorsjegyből legalább 42 darabbal nyerünk. (Nyertesnek számít egy sorsjegy, ha rajta a nyeremény pozitív.)

   (b) Mennyi a 100 sorsjeggyel szerzett nyeremények összegének várható értéke és szórásnégyzete?

Megoldás.
(a) (12 pont)
(1 pont) A nyertes sorsjegyek számát jelöljük X-szel, ez binomiális eloszlású
(2 pont) $n = 100$ és $p = 0{,}39 + 0{,}01 = 0{,}4$ paraméterekkel (a $p = 0{,}4$-et elfogadjuk indoklás nélkül is, mert ilyen kevés pont jár rá).
(1 pont) A keresett valószínűséget a De Moivre–Laplace-tétel segítségével közelíthetjük (mivel n nagy és p nem függ n-től – ezt nem kell odaírni).
Ha a sima CHT-ra hivatkozik, de nem jelenik meg a megoldásában, hogy X milyen fae. valószínűségi változók összege, akkor erre az indoklásra nem jár pont, de a többi pontot meg lehet adni. Ha megjelenik, akkor lásd lentebb az erre a megoldásra vonatkozó pontozást.
(0 pont) A közelítendő valószínűség $\mathbb{P}(X \geq 42)$
(1 pont) $= \mathbb{P}\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \frac{42-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$
(1 pont) $= \mathbb{P}\left(\frac{X-40}{\sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} \geq \frac{42-40}{\sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}}\right)$ (elég, ha legalább konkrét számokkal látszik a standardizálás, illetve ha konkrét számokkal látszik, akkor lehet a következő lépésre ugrani)
(1 pont) $= \mathbb{P}\left(\frac{X-40}{\sqrt{24}} \geq \underbrace{\frac{2}{\sqrt{24}}}_{0{,}4082}\right)$ (a numerikus érték meghatározására is ez az 1 pont jár)
(1 pont) $\approx \mathbb{P}(Z > 0{,}4082)$, ahol $Z \sim \mathrm{N}(0;1)$ (a De Moivre–Laplace tétel miatt, amire való hivatkozásra már járt 1 pont)
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0{,}4082)$
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(Z < 0{,}4082) = 1 - \Phi(0{,}4082)$, mert Z (vagy Z eloszlásfüggvénye) folytonos. Az előző lépéssel összevonható, de ha nem hivatkozik a folytonosságra, akkor a 2 pontból csak 1 jár. A Φ jelölés nem kötelező, viszont elég, ha csak az van.
(1 pont) $1 - \Phi(0{,}4082) \approx 1 - \Phi(0{,}41)$
(1 pont) $\approx 1 - 0{,}6591 = 0{,}3409$ a közelítés a kérdezett valószínűségre.

A másik lehetőség az (a) megoldására, hogy sima CHT-t használunk, arra hivatkozva, hogy X 100 darab független, $p = 0{,}4$ paraméterű indikátor összege. Ekkor 1 pont jár arra, hogy X független, azonos eloszlású $Y_1, \ldots, X_{100}$ indikátorok összege (az indikátor kifejezés helyett elég megadni a súlyfüggvényüket, illetve elég, ha impliciten derül ki, hogy azonos eloszlásúak, de az implicit kiderüléshez nem elég annyi, hogy mindegyiknek ugyanannyi a várható értéke és a szórása, a függetlenségre pedig hivatkozni kell). 1 pont az indikátorok várható értékének, 1 pont a szórásuknak a meghatározására. 1 pont arra, hogy a CHT-t használjuk (ebben az esetben nem jó a De Moivre–Laplace). A további részek pontozása a fentihez hasonlóan, de máshogy kell indokolni a standardizálást: np helyett $n\,\mathbb{E}(Y_1)$-gyel és $\sqrt{np(1-p)}$ helyett $\sqrt{n}\,\mathbb{D}(Y_1)$-gyel. Illetve jó úgy is standardizálni, hogy $\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\mathbb{D}(X)}$ (erre 1 pont), de utána X-nek ki kell számolni a várható értékét és szórását a (b)-hez hasonlóan, amire sajnos összesen csak 1 pont jár.

(b) (8 pont)
(1 pont) Jelölje a Y nyeremények összegét, ekkor $Y = X_1 + \ldots + X_{100}$, ahol X_i az i-edik sors-

jeggyel nyert összeg.
(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_{100}) = 100\,\mathbb{E}(X_1)$ (mert az X_i-k azonos eloszlásúak – erre itt külön nem jár pont).
(1 pont) $\mathbb{E}(X_1) = 0{,}39 \cdot 1000 + 0{,}01 \cdot 61\ 000 = 1000$ (bármilyen minimális indoklás elég, de valamennyi legyen).
(1 pont) $\mathbb{D}^2(Y) \overset{*}{=} \mathbb{D}^2(X_1) + \ldots + \mathbb{D}^2(X_{100})$
(1 pont) $= 100\,\mathbb{D}^2(X_1)$ (megint azért, mert azonos eloszlásúak).
(1 pont) A $*$-gal jelölt azonosság azért igaz, mert függetlenek [különben az általános képletet kell használni és ott kell megállapítani, hogy a kovarianciák értéke 0, ahol szintén hivatkozni kell a függetlenségre].
(1 pont) $\mathbb{E}(X_1^2) = 0{,}39 \cdot 1000^2 + 0{,}01 \cdot 61\ 000^2 = 37\ 600\ 000$. A nullás tagot nem muszáj odaírni.
(1 pont*) És így $\mathbb{D}^2(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = 36\ 600\ 000$. (Ha az általános képlet megvan, arra 1 pontot már meg lehet adni a kettőből, ha nincs meg a jó végeredmény.)

3. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, ahol X egyenletes eloszlású a $(-2, 4)$ intervallumon és Y exponenciális eloszlású $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterrel.

   (a) Határozzuk meg $U := 2X - 1$ és $V := -3X - Y + 1$ kovarianciáját és korrelációját.

   (b) Mi V regressziós egyenese U-ra?

   Segítség: a feladat integrálás nélkül is megoldható (a tanult azonosságok és a kiadott táblázat segítségével). Részpontok járnak U és V várható értéke és szórása meghatározására.

   Megoldás.
   (a) (12 pont)
   A kovariancia tulajdonságait nem kell megnevezni, csak alkalmazni. Természetesen jó a kovariancia definíciója szerint számolni is, de ez hosszasabb és itt nem részletezzük.
   (1 pont) $\mathrm{cov}(U, V) = \mathrm{cov}(2X - 1, -3X - Y + 1) = \mathrm{cov}(2X, -3X - Y)$ (az is jó, ha a konstanst tartalmazó tagokat nem elhagyja, hanem a következő lépésnél a linearitást használva különveszi, majd arra hivatkozik, hogy konstanssal vett kovariancia mindig 0)
   (1 pont) $= \mathrm{cov}(2X, -3X) + \mathrm{cov}(2X, -Y)$.
   (1 pont) $\mathrm{cov}(2X, -Y) = 0$, mert függetlenek. (A $2 \cdot (-1)$-et ki lehet emelni és utána X és Y függetlenségére hivatkozni, de mivel X és Y függetlenek, $2X$ és $-Y$ is függetlenek, és ezt nem kell így részletezni.) A függetlenségre való hivatkozás nélkül ez a pont nem jár!
   (1 pont) $\mathrm{cov}(2X, -3X) = -6\mathrm{cov}(X, X)$
   (1 pont) $= -6\,\mathbb{D}^2(X)$
   (1 pont) $= -6\frac{(4-(-2))^2}{12} = -18$, így ennyi $\mathrm{cov}(U, V)$ is. (Nem kell nagyon részletezni, az egyenletes eloszlás szórásnégyzete benne van a táblázatban.)
   (1 pont) $\mathrm{corr}(U, V) = \frac{\mathrm{cov}(U,V)}{\mathbb{D}(U)\,\mathbb{D}(V)}$.
   (1 pont) $\mathbb{D}^2(U) = \mathbb{D}^2(2X - 1) = \mathbb{D}^2(2X)$
   (1 pont) $= 4\,\mathbb{D}^2(X)$
   (0 pont) $= 4 \cdot 3 = 12$ (erre már újabb pont nem jár, mert majdnem ugyanaz, mint az előbb).
   (0 pont) $\mathbb{D}^2(V) = \mathbb{D}^2(-3X - Y + 1) = \mathbb{D}^2(-3X - Y)$ [erre már nem jár újabb pont, mert ugyanaz, mint az előbb, de ha véletlenül csak ez van meg, az 1 pontot erre meg lehet adni]
   (1 pont) $= \mathbb{D}^2(-3X) + \mathbb{D}^2(-Y)$, mert függetlenek (jó az általános képlettel is, de akkor hivatkozni kell $\mathrm{cov}(X, Y)$ nulla voltára)
   (1 pont) $= 9\,\mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) = 9 \cdot 3 + 4 = 31$. ($Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \Rightarrow \mathbb{D}^2(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$; nem kell részletezni, benne van a táblázatban.)
   (1 pont) Tehát a korreláció $\frac{-18}{\sqrt{12 \cdot 31}} \approx -0{,}9333$.
   Elszámolás esetén lehet további részpontokat adni, de ha szórásnégyzetre negatív vagy a korrelációra nem $[-1, 1]$-beli értéket hoz ki és ezt nem is kommentálja, az adott numerikus eredményre részpont nem jár!
   A szórásnégyzet azonosságai helyett természetesen lehet a szóráséit is használni.
   (b) (8 pont)
   (1 pont) A lineáris regresszió képletében $\beta = \frac{\mathrm{cov}(U,V)}{\mathbb{D}^2(U)}$
   (1 pont) és $\alpha = \mathbb{E}(V) - \beta\,\mathbb{E}(U)$.
   (1 pont) Innen az (a) alapán $\beta = \frac{-18}{12} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$. (Nem kell indoklás sem már.)
   (1 pont) $\mathbb{E}(U) = 2\,\mathbb{E}(X) - 1$
   (1 pont) $= 2\frac{-2+4}{2} - 1 = 1$ (nem kell indokolni X várható értékét, benne van a táblázatban)
   (1 pont) és $\mathbb{E}(V) = -3\,\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) + 1$
   (1 pont) $= -3\frac{-2+4}{2} - \frac{1}{1/2} + 1 = -4$ (nem kell indokolni Y várható értékét sem, benne van a táblázatban).
   (0 pont) Innen $\alpha = -4 - (-1{,}5) \cdot 1 = -2{,}5 = -\frac{5}{2}$
   (1 pont) és a regressziós egyenes $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = -\frac{3}{2}u - \frac{5}{2}\}$. (Természetesen jó u és v helyett x-szel és y-nal is, ha a szerepek világosak.)

4. Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg először nem dobunk 5-nél kisebb számot, majd egy szabályos pénzérmét is feldobunk pontosan annyiszor, ahányszor a kockával dobnunk kellett. Jelölje X a kockadobások és Y a pénzérmével dobott fejek számát.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a kockával 3-nál kevesebbszer dobunk?

   (b) Mennyi $\mathbb{P}(Y < 2|X = 10)$ és $\mathbb{E}(Y|X = 10)$?

   (c) Határozzuk meg az $\mathbb{E}(Y|X)$ regressziót.

Megoldás. (a) (5 pont)
(1 pont) X geometriai eloszlású
(1 pont) $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ valószínűséggel (nem kell jobban indokolni, de egy dobásnál 4 darab kedvező, azaz 5-nél kisebb érték jöhet ki a 6 lehetséges érték közül, és a val. mező klasszikus).
(0 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X < 3)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$
(1 pont) $= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot (1 - \frac{2}{3})$
(1 pont) $= \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$.
Lehet ennél elemibb, kombinatorikai érvelés is, ha helyes. Vagy: a komplementer valószínűség $\mathbb{P}(X > 2)$, amiről tudjuk az előadás alapján, hogy $(1 - p)^2 = \frac{1}{9}$.

(b) (9 pont)
(1 pont) Feltéve, hogy $X = 10$, a dobott fejek száma binomiális eloszlású
(2 pont) $n = 10$ és $p = \frac{1}{2}$ paraméterrel.
(1 pont) Ezt felhasználva $\mathbb{P}(Y < 2|X = 10) = \mathbb{P}(Z < 2)$, ahol $Z \sim \text{Bin}(10; \frac{1}{2})$,
(1 pont) és $\mathbb{P}(Z < 2) = \mathbb{P}(Z = 0) + \mathbb{P}(Z = 1)$
(1 pont) $= (1 - \frac{1}{2})^{10} + 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2})^9$
(1 pont) $= \frac{1}{1024} + \frac{10}{1024} = \frac{11}{1024} = 0{,}0107$ (elég a numerikus végeredmény).
(1 pont) Hasonlóan $\mathbb{E}(Y|X = 10) = \mathbb{E}(Z)$
(1 pont) $= 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$.

Lehet $\mathbb{P}(Y < 2|X = 10)$-et definíció szerint is számolni, de az nehezebb, viszont természetesen jó úgy is, hogy azt írja, hogy $\mathbb{P}(Y < 2|X = 10) = \mathbb{P}(Y = 0|X = 10) + \mathbb{P}(Y = 1|X = 10)$ és utána valahogy nem binomális eloszlással, hanem kombinatorikai érveléssel (leszűkítve az eseményteret $\{X = 10\}$-re) elmagyarázza, hogy miért annyi.
Ha nincs meg a binomiális eloszlás, de megmagyarázza, hogy a várható érték 5, arra lehet adni max. 4 pontot. Maximum 3 pontot arra is meg lehet kapni, hogy minden dobás $\frac{1}{2}$ valószínűséggel fej, tehát 10 dobásból átlagosan 5 fejet kapunk (és ezt jelenti $\mathbb{E}(Y|X = 10)$). Ebből 1 pont arra jár, hogy $X = 10$ bekövetkezésére feltételezve is mind $\frac{1}{2}$ valószínűségűek a fejek dobásonként (és amúgy függetlenek is, de ez nem kell), vagy legalább annyi, hogy mit jelent definíció szerint az eseményre vett feltételes várható érték, és hogy érti, hogy ez az adott szituációban hogyan számolható.

(c) (6 pont)
1. (sztenderd) megoldás.
(2 pont) $\mathbb{E}(Y|X) = g(X)$, ahol $g(x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$ (ahol $x = 1, 2, \ldots$).
(2 pont) A (b)-hez hasonló érveléssel annak ismeretében, hogy $X = x$, Y binomiális eloszlású $n = x$ és $p = 1/2$ paraméterekkel. (Ha a (b)-ben volt rendes indoklást, ezt ne pontozzuk túl szigorúan.)
(2 pont) Tehát $\mathbb{E}(Y|X) = \frac{X}{2}$.
(Ha a (b) jó, az utóbbi 4 pontból 2-t bárminemű indoklás nélkül is megadunk.)

2. megoldás – majdnem ugyanez, csak $X = x$ nélkül.
(3 pont) X ismeretében Y binomiális eloszlású $n = X$ és $p = \frac{1}{2}$ paraméterrel.
(2 pont) $\mathbb{E}(Y|X)$ tehát ennek a binomiálisnak a várható értéke,
(1 pont) ami $X/2$. *[Pontozási magyarázat a túloldalon.]*

Ha nincs meg a binomiális eloszlás, maximum 5 pontot arra az intuitív magyarázatra is meg lehet kapni, hogy minden dobás $\frac{1}{2}$ valószínűséggel fej, tehát X dobásból átlagosan $X/2$ fejet kapunk (és ezt jelenti $\mathbb{E}(Y|X)$). A 6. ponthoz kell az is, hogy a fej valószínűségét X értéke nem befolyásolja (azoknál a dobásoknál, amik valóban léteznek), vagy legalább valami magyarázat arra, hogy mit jelent a val. változóra vett feltételes várható érték definíció szerint és ez itt hogyan számolható.

5. Legyen $(X_1, \ldots, X_8)$ egy nyolcelemű fae. minta, ahol független mintaelemek eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2, \\ (x-2)^2, & \text{ha } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$$

A mintára az alábbi $(x_1, \ldots, x_8)$ realizációt kaptuk:

$$x_1 = 2{,}11 \quad x_2 = 2{,}83 \quad x_3 = 2{,}17 \quad x_4 = 2{,}72 \quad x_5 = 2{,}17 \quad x_6 = 2{,}89 \quad x_7 = 2{,}83 \quad x_8 = 2{,}28.$$

(a) Adjuk meg (indoklással) a minta empirikus mediánját és korrigált empirikus szórását az adott realizáció esetén, valamint a rendezett minta x_5^* elemét.

(b) Ábrázoljuk a minta empirikus eloszlásfüggvényét az adott realizáció esetén (nem baj, ha nem arányos, de látszódjon, hogy hol mekkora értéket vesz fel – ott is, ahol nem folytonos).

(c) Mennyi az adott realizáció esetén az empirikus eloszlásfüggvény értéke az $x = 2{,}17$ helyen? Kisebb-e ez, mint az empirikus eloszlásfüggvénynek ezen a helyen vett várható értéke (és miért)?

Megoldás.
(a) (11 pont)
(1 pont) Páros mintaelemszám esetén
(1 pont) az empirikus medián a (növekvő sorrendbe) rendezett minta két középső elemének átlaga,
(1 pont) vagyis itt $\frac{2{,}28+2{,}72}{2} = 2{,}5$.
(1 pont) A korrigált empirikus szórás $s_8^* = \sqrt{(s_8^*)^2}$
(1 pont) $= \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x_n})^2}$.
(1 pont) A mintaátlag, $\overline{x_n}$ a mintaelemek számtani közepe,
(1 pont) vagyis $\overline{x_n} = 2{,}5$.
(1 pont) $n = 8$ a mintaelemszámot jelenti. (Elég, ha ez impliciten derül ki.)
(0 pont) Így $s_n^* = \sqrt{\frac{1}{7}\Big((2{,}11-2{,}5)^2 + \ldots + (2{,}28-2{,}5)^2\Big)}$
(1 pont) $= 0{,}3457$.
(1 pont) x_5^* az 5. legkisebb mintaelem (bármilyen ekvivalens indoklást elfogadunk),
(1 pont) ami 2,72.
(b) (4 pont)
Ábra.

$$F_8^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2{,}11, \\ \frac{1}{8}, & \text{ha } 2{,}11 < x \leq 2{,}17, \\ \frac{3}{8}, & \text{ha } 2{,}17 < x \leq 2{,}28, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 2{,}28 < x \leq 2{,}72, \\ \frac{5}{8}, & \text{ha } 2{,}72 < x \leq 2{,}83, \\ \frac{7}{8}, & \text{ha } 2{,}83 < x \leq 2{,}89, \\ 1, & \text{ha } 2{,}89 < x. \end{cases}$$

A képletet nem kell kiírni, de az alábbiak szerint járnak pontok:
(1 pont) $F_8^*(x)$-et próbálja ábrázolja x függvényében, a kapott függvény monoton növő, értékkészlete része a $[0,1]$ intervallumnak, és van valami köze a realizáció elemeihez. Ha ez nincs meg impliciten sem, akkor a többi pont sem jár!
(1 pont) A függvény a realizációban szereplő helyeken ugrik, mindenhol máshol pedig konstans (tehát az első ugrás helyéig konstans 0, az utolsó ugrás helyétől konstans 1).
(1 pont) A függvény balról folytonos („balról teli karika, jobbról üres karika" az ugrások helyein).
(1 pont) A függvény mindig annyiszor $\frac{1}{8}$-ot ugrik, ahányszor az ugrás helye a realizációban szerepel.
Az empirikus eloszlásfüggvény definícióját a (b)-hez nem kell megadni, megjelenik a definíció vagy a képlettel leírt függvény a megoldásban (akár a (c)-ben), akkor kisebb, nyilvánvalóan nem elvi hibából eredő elszámolás esetén lehet engedékenyebben pontozni, de a (b)-ben is csak hibátlan megoldás esetén jár maximális pontszám.
(c) (5 pont)
(1 pont) $F_n^*(x) = \frac{1}{n}|\{i \in \{1,\dots,n\} \mid x_i < x\}|$.
(1 pont) Ez tehát $x = 2{,}17$ esetén $\frac{1}{8}(= 0{,}125)$ (csak a 2,11 szigorúan kisebb a 2,17-nél a mintalemek közül – de ha megvan a definíció, nem kell indokolni).
(1 pont) $\mathbb{E}(F_8^*(2{,}17)) = F(2{,}17)$ (le lehet vezetni abból is, hogy $nF_n^* \sim \mathrm{Bin}(n; F(x))$, de nem kell, mert így is elhangzott az előadáson)
(1 pont) $= (2{,}17-2)^2 = 0{,}0289$,
(1 pont) ezért a válasz nem.

6. * Legyen (X,Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó, ahol X (marginális) eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ x^3, & \text{ha } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$$

és X ismeretében Y normális eloszlású $\mu = X^2$ és $\sigma^2 = 1$ paraméterekkel. Határozzuk meg Y várható értékét és szórását.

Megoldás.
($\mathbb{E}(Y)$: 11 pont.)
(1 pont) A teljes várható érték tétele (szintén jó: toronyszabály) szerint
(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$.
(1 pont) A $\mathrm{N}(X^2;1)$ eloszlás várható értéke X^2,
(1 pont) ezért $\mathbb{E}(Y|X) = X^2$. Tehát $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2)$.
(1 pont) X sűrűségfüggvényét, f_X-et F_X deriválásával kapjuk (nem kell indokolni, hogy ezt miért tehetjük meg, de pl. az 1. (b) feladat feltételei nyilvánvalóan teljesülnek).
(1 pont) Tehát $f_X(x) = 3x^2$, ha $0 < x < 1$
(1 pont) és $f_X(x) = 0$ egyébként.
(A határokat mindegy, melyik szakaszhoz sorolja be, csak sorolja be valamelyikhez.)
(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_0^1 3x^4 \mathrm{d}x$ (az előzővel összevonható)
(1 pont) $= [\frac{3}{5}x^5]_{x=0}^1$
(1 pont) $= \frac{3}{5}$.

($\mathbb{D}(Y)$: további 9 pont).
(1 pont) Tetszőleges U val. változóra $\mathbb{D}^2(U) = \mathbb{E}(U^2) - \mathbb{E}(U)^2$ és $\mathbb{D}(U) = \sqrt{\mathbb{D}^2(U)}$ (a kettőre csak együtt jár pont, viszont az is jó, ha ezt valamelyik konkrét val. változóra mondja el).
(1 pont) Így ha X ismeretében egy val. változó $\mathrm{N}(X^2; 1)$ eloszlású, akkor (mivel X^2 ennek ismeretében a várható érték és 1 a szórásnégyzet) a négyzetének a várható értéke (X ismeretében) $X^4 + 1$.
(1 pont) Innen $\mathbb{E}(Y^2|X) = X^4+1$. (Az előzővel összevonható – érdemi magyarázat nélkül is, ha szerepel az $\mathbb{E}(Y^2|X)$ jelölés, illetve az, hogy a négyzet várható értéke egyenlő a szórásnégyzet plusz a várható érték négyzete.)
(1 pont) Ismét a teljes várható érték tétele szerint
(1 pont) $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y^2|X)) = \mathbb{E}(X^4 + 1)$
(1 pont) $= \mathbb{E}(X^4) + 1$, ahol $\mathbb{E}(X^4) = \int_0^1 x^4 f_X(x)\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_0^1 x^4 \cdot 3x^2 \mathrm{d}x = [\frac{3}{7}x^7]_{x=0}^1 = \frac{3}{7}$.
(0 pont) Így $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{3}{7} + 1 = \frac{10}{7}$.
(1 pont) Tehát $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{10}{7} - \frac{9}{25} = \frac{250-63}{175} = \frac{187}{175}$.
(1 pont) Innen pedig $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\frac{187}{175}} \approx 1{,}0337$.
(Az általános képleteket az utolsó pontnál nem kell megismételni.)

Alternatív – jóval kellemetlenebb - megoldás: Y-nak ismerjük a feltételes eloszlását, ha $X = x$, ez az $\mathrm{N}(x^2; 1)$ eloszlás, így $f_{Y|X}(y|x)$ ezen eloszlás sűrűségfüggvénye az y helyen, $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$ az együttes sűrűségfüggvény. Ha idáig eljut, f_X kiszámításán kívül kaphat 3 pontot, illetve ha be is helyettesít, akkor 5-öt. f_X kiszámítására pedig a fentiek szerint 3 pont jár.
Ezek után ezt az együttes sűrűségfüggvényt kell y-nal, illetve y^2-tel beszorozva integrálni, hogy $\mathbb{E}(Y)$-t, illetve $\mathbb{E}(Y^2)$-et megkapjuk. Az általános képletekre 1–1 pont jár, a számolásra 4–4 – fel lehet ismerni a normális eloszlás momentumait a táblázat alapján, és ezután tovább nem kell részletezni az integrálást. Végül 1 pont arra, hogy $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$ és $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{\mathbb{D}^2(Y)}$, és 1 pont a végeredmény kiszámítására.

Megjegyzés: Alternatíva az (a)-ban X sűrűségfüggvényének meghatározására: meghatározzuk X^2 eloszlásfüggvényét (a szokásos eloszlástranszformációs képlettel), majd vagy X^2 sűrűségfüggvényét is meghatározzuk és annak segítségével X^2 várható értékét, vagy pedig azt használjuk, hogy $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty (1 - F_{X^2}(x))\mathrm{d}x$ (hiszen X^2 nemnegatív val. változó – erre hivatkozni kell, de elég X nemnegativitására hivatkozni).