Zárthelyi dolgozat Valószínűségszámítás és statisztikából, 2023. október 24.
A zh 5.+6. feladata 2026/27-ben is vizsgaanyag, de előreláthatólag zh utáni anyag, vizsgafelkészüléshez ajánljuk.

1. A $[0, 1]$ intervallumon egymástól függetlenül, találomra kiválasztunk két számot. Mi a valószínűsége, hogy a két szám összege nagyobb, mint a nagyobbik és a kisebbik szám különbségének kétszerese?

2. Egy erdőben kétfajta macskaféle fordul elő nagyon nagy példányszámban: házi macska és vadmacska. A vadmacskák a macskafélék teljes állományának tíz százalékát alkotják. Az összes vadmacska cirmos, továbbá öt házi macskából átlagosan egy példány cirmos.

   (a) Véletlenszerűen kiválasztva az erdőből egy macskafélét, mi a valószínűsége, hogy cirmos?

   (b) Az erdőben véletlenszerűen meglátunk egy cirmos macskafélét, de a távolból nem tudjuk megállapítani, hogy házi macska-e vagy vadmacska. Mi a valószínűsége, hogy házi macska?

   (c) Az erdőből véletlenszerűen kiválasztunk egy macskafélét. Függetlenek-e a következő események: $A = \{\text{a kiválasztott macskaféle nem cirmos}\}$ és $B = \{\text{a kiválasztott macskaféle házi macska}\}$?

3. Anna, Bea és Csilla egy pakli magyar kártyával kártyáznak. Keverés után mindhármuknak osztanak 8–8 lapot. (Egy pakli magyar kártyában 32 lap van, ebből pontosan 8 piros.)

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy osztás után Annánál nincs piros lap?

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy sem Beánál, sem Csillánál nincs piros lap?

   (c) Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom játékosnál van legalább egy piros lap?

4. Egy egyetem hallgatói képviseletének programszervező bizottságában kétféle programlehetőség merült fel egy adott időpontra, nevezzük ezeket A és B opciónak. Egy kilenctagú bizottság dönt arról, hogy a két programlehetőség közül melyik valósuljon meg; a bizottság tagjai számára a szavazás kötelező, tartózkodni nem lehet. A bizottság három tagja biztosan az A opcióra szavaz, két tagja biztosan a B opcióra, négy tagja pedig bizonytalan, ezért ők egymástól függetlenül feldobnak egy-egy szabályos pénzérmét, és ha az eredmény fej, akkor az A opcióra szavaznak, ha pedig írás, akkor a B opcióra. Jelölje X az A opcióra szavazó bizottsági tagok számát.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik opció több mint két szavazat különbséggel nyer?

   (b) Milyen eloszlású az $X - 3$ valószínűségi változó és milyen paraméterrel/paraméterekkel?

   (c) Jelölje Y a B opcióra szavazó bizottsági tagok számát. Határozzuk meg X és Y együttes eloszlását és a peremeloszlásaikat (lehetőleg táblázatos formában, de elég $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$-t, $\mathbb{P}(X = k)$-t és $\mathbb{P}(Y = l)$-t minden olyan k-ra és l-re megadni, amelyre azok pozitívak).

5. Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f_X(x) = \frac{c}{x^2}$, ha $x > 1$ és $f_X(x) = 0$ különben, ahol $c > 0$ egy megfelelően választott konstans.

   (a) Határozzuk meg c értékét.

   (b) Definiáljuk az Y diszkrét valószínűségi változót a következőképpen:

$$Y = \begin{cases} 3, & \text{ha } X < 3, \\ 0, & \text{ha } 3 \leq X < 4, \\ 4, & \text{különben.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg $\mathbb{P}(Y = k)$-t minden olyan $k \in \mathbb{R}$-re, amelyre ez a mennyiség pozitív.

(c) Határozzuk meg Y várható értékét és szórását.

6. * Legyen X egy olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ ($\mathrm{e} \approx 2{,}71...$). Felhasználhatjuk, hogy ez egy eloszlásfüggvény (lásd 5. feladatsor).

   (a) Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon) < 1/2$.

   (b) Legyen $Y = \mathrm{e}^{-X}$. Határozzuk meg Y sűrűségfüggvényét és szórását.

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n;p)$	$\{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1-e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Tudnivalók: A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. Hivatkozni csak az előadáson elhangzottakra lehet. A zárthelyi első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Pótló zárthelyi dolgozat

A pótzh 4.+5.+6. feladata 2026/27-ben is vizsgaanyag, de előreláthatólag zh utáni anyag, vizsgafelkészüléshez ajánljuk.

1. Az A, B és C eseményekről tudjuk, hogy (együttesen) függetlenek és pozitív valószínűségűek, valamint $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(A \cap C) = 1/8$ és $\mathbb{P}(A|B) = 1/2$.

   (a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az A, B, C események közül legalább az egyik bekövetkezik.

   (b) Feltéve, hogy az A esemény bekövetkezett, mekkora a valószínűsége, hogy C is bekövetkezett, de ugyanakkor B nem?

   (c) Függetlenek-e a $B \cap C$ és az $A \cap C$ események?

   Tanács: Ha események függetlenségére hivatkozunk, akkor mindig adjuk meg lépésenként külön-külön, hogy éppen melyik eseményekére.

2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat adja meg.

Y \ X	3	5
0	$\frac{1}{2}$	a
1	b	$\frac{1}{4}$
2	0	c

   (a) Határozzuk meg a, b és c értékét, ha $\mathbb{P}(X = 3) = 7/12$ és $\mathbb{E}(Y) = 1/2$.

   (b) Független-e X és Y?

   (c) Határozzuk meg $\mathbb{E}(XY)$-t.

3. Egy könyvtárban minden könyvet minden hónapban legfeljebb egy ember kölcsönöz ki, legfeljebb egyszer és csak arra a hónapra. A könyvtárba egyre több könyvet hoznak, de a látogatók száma nem növekszik, ezért ahogy telik az idő, egy-egy könyvet egyre kisebb valószínűséggel vesz ki valaki egy adott hónapban. A megfigyelés kezdetétől számított k-adik hónapban (ahol $k \geq 1$ egy egész szám) $3k$ könyv van a könyvtárban, és mindegyiket egymástól függetlenül $1/k$ valószínűséggel veszi ki valaki.

   (a) Határozzuk meg (pontosan) annak a valószínűségét, hogy a 68. hónapban legalább 3 könyvet vesznek ki a könyvtárból, és adjuk meg a 68. hónap során kivett könyvek számának szórását.

   (b) Közelítsük nagy k esetén annak a valószínűségét alkalmas approximációval, hogy a k-adik hónapban legalább 3 könyvet vesznek ki.

A feladatsor a másik oldalon folytatódik!

4. Buszra várunk, a busz érkezési ideje folytonos, örökifjú eloszlást követ. Feltéve, hogy már öt percig várakoztunk, kétszer annyi annak a valószínűsége, hogy még ezután is legalább öt percig kell várnunk, mint azé, hogy ennek az ellenkezője következik be.

   (a) Várhatóan hány perc múlva érkezik meg a busz?

   (b) Egy adott naptól kezdve mindennap várunk a buszra, a fenti feltételek mindennap teljesülnek, a várakozási idők pedig a különböző napokon egymástól függetlenek. Várhatóan hányadik napon kell először legalább fél órát várakoznunk?

5. Egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 < x < 1/2, \\ \frac{1}{4}, & \text{ha } 1/2 \leq x \leq 2, \\ \frac{(x-1)^2}{4}, & \text{ha } 2 < x < 3, \\ 1, & \text{ha } x \geq 3. \end{cases}$$

   (a) Igazoljuk, hogy X folytonos valószínűségi változó.

   (b) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét.

   (c) Határozzuk meg X várható értékét.

6. * Az $(1/2, 0)$ és $(1, 0)$ pontok közötti szakaszon találomra választunk egy A pontot, egy B pontot pedig ettől függetlenül, szintén egyenletes eloszlással az origó és a $(0, 1)$ pont közötti szakaszon. Jelölje X az ABO szög tangensét. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

Eloszlás neve	Jelölés	Ran(X)	$\mathbb{P}(X = k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	B$(n; p)$	$\{0, 1, ..., n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	Pois(λ)	$\{0, 1, ...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	Geo(p)	$\{1, 2, ...\}$	$(1-p)^{k-1} p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	U$(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	Exp(λ)	$\mathbb{R}^+$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Tudnivalók: A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. Hivatkozni csak az előadáson elhangzottakra lehet. A zárthelyi első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Vizsgadolgozat, 2023.12.21.

2026/27-ben az 5b., 5c., 6. feladatok nem tartoznak a vizsgaanyaghoz.

1. (a) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és legyenek $C, D \in \mathcal{F}$ események. Milyen feltétel teljesülése esetén és hogyan definiáljuk, illetve hogyan jelöljük a C esemény D-re vett feltételes valószínűségét?

   (b) Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény. Az előadáson tanult állítás szerint milyen feltételek teljesülnek akkor és csak akkor, ha létezik olyan folytonos valószínűségi változó, amelynek f a sűrűségfüggvénye?

2. Karinthy Frigyes és Kosztolányi Dezső egy szép napon egymástól függetlenül feldob egy-egy szabályos pénzérmét, és aki fejet dob közülük, az elmegy a New York kávéházba (aki írást dob, az pedig nem megy oda). Kettejük közül aki nem megy el a kávéházba, az nem iszik kávét. Ha az egyikük elmegy a kávéházba, de a másikuk nem, akkor aki odamegy, az 1 kávét iszik meg. Ha pedig mindketten elmennek a kávéházba, akkor hosszasan beszélgetnek és fejenként 2 kávét is megisznak. Jelölje X a Karinthy és Y a Kosztolányi által megivott kávék számát.

   (a) Határozzuk meg $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$-t minden olyan k, l valós számra, amelyre ez a valószínűség pozitív. (Lehet táblázatos formában, de a táblázatban szereplő 0 értékekért helyes válasz esetén sem jár pont.)

   (b) Határozzuk meg Y-nak X-re vonatkozó regressziós egyenesét.
   (*Tanács*: X és Y kovarianciájának kiszámítására járnak részpontok.)

   (c) Független-e X és Y?

3. Egy elképzelt vasútvonalon minden reggel 8-kor indul egy vonat az egyik végállomásról, amely minden nap a többi naptól függetlenül 1/4 valószínűséggel késik. 200 egymást követő napon megvizsgáljuk, hogy késik-e a vonat, legyen X azon napok száma a 200 nap közül, amikor késik a vonat.

   (a) Milyen eloszlású X és milyen paraméterrel/paraméterekkel? Határozzuk meg X várható értékét és szórását.

   (b) Becsüljük meg alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy a 200 nap közül legfeljebb 42 napon késik a vonat. (A valószínűség pontos értékének meghatározására itt nem jár pont!)

4. Legyenek $X \sim \text{Pois}(1)$ és $Y \sim \text{Geo}(1/2)$ független valószínűségi változók. Legyen $Z := Y^2 \sin(X) + YX^3 - X$. Adjuk meg az $\mathbb{E}(Z|X)$ regressziót.

5. Legyen $n \geq 1$ és legyenek $X_1, \ldots, X_n$ fae. valószínűségi változók, amelyek eloszlásfüggvénye

$$F_\vartheta(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\vartheta}, & \text{ha } x > 1, \\ 0, & \text{ha } x \leq 1, \end{cases}$$

   ahol $\vartheta > 1$ egy ismeretlen paraméter.

   (a) Határozzuk meg minden $\vartheta > 1$ rögzített paraméter esetén az f_ϑ sűrűségfüggvényt.

   (b) A minta rögzített $x_1, \ldots, x_n$ realizációja esetén határozzuk meg a likelihood-függvény $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n)$ értékét.

   (c) Adjunk a minta alapján maximum likelihood becslést ϑ-ra.
   Megjegyzés: Bizonyos realizációk esetén a helyes becslés értéke nem lesz nagyobb 1-nél.

6. Legyen X egyenletes eloszlású a $(0, 2)$ intervallumon és X ismeretében Y egyenletes eloszlású a $(0, 1/X)$ intervallumon. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y < 1)$ valószínűséget.

Vizsgadolgozat Valószínűségszámítás és statisztikából (ÚJ Valszám), 2024.01.11.
2026/27-ben az 1b) kérdést nem tennénk fel, mert a témát csak röviden tárgyaljuk.

1. (a) Legyen $k \in \mathbb{N}$. Milyen feltétel teljesülése esetén és hogyan definiáljuk egy X valószínűségi változó k-adik momentumát?

   (b) Legyen $n \in \mathbb{N}$, és legyen adott egy $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ n elemű fae. minta, ahol a mintaelemek eloszlása egy ismeretlen $\vartheta \in \theta \subseteq \mathbb{R}^d$ paramétertől függ, és legyen $\psi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ egy függvény. Legyen továbbá $T(\mathbf{X}) = T(X_1, \dots, X_n)$ a minta egy statisztikája.
   Mikor mondjuk azt (az előadáson elhangzott definíció szerint), hogy a $T(\mathbf{X})$ statisztika a $\psi(\vartheta)$ paraméterfüggvénynek

   (i) egy torzítatlan becslése, illetve

   (ii) egy aszimptotikusan torzítatlan becslése?

   Megjegyzés: Az $\mathbb{E}$ és $\mathbb{E}_\vartheta$ jelöléseket az előadáson tanult módon használhatjuk, ezeket nem kell bevezetni, és nem kell megmagyarázni, hogy mit jelentenek.

2. Egy elképzelt országban eladott gyufák 70%-a egy olcsó gyufákat gyártó cégtől származik, ezek 1/3-a használhatatlan. A maradék 30%-ot egy drágább gyufákat készítő vállalat gyártja, az általa készített gyufák közül tízből átlagosan egy használhatatlan.

   (a) Véletlenszerűen kiválasztva egy, az adott országban eladott gyufát, mi a valószínűsége, hogy az használhatatlan?

   (b) Véletlenszerűen kiválasztva egy, az adott országban eladott gyufát, jelölje X azt a valószínűségi változót, amelynek értéke 1, ha a gyufa használhatatlan és 0, ha használható. Jelölje továbbá Y azt a valószínűségi változót, amelynek értéke 2, ha ugyanezt a gyufát az olcsó gyufákat készítő cég gyártotta, és 1, ha a drágább gyufákat gyártó vállalat gyártotta. Határozzuk meg X és Y kovarianciáját, illetve X szórásnégyzetét.

3. Egy csendes-óceáni szigeten gyakran fordulnak elő tájfunok. Egy bizonyos év kezdetétől fogva (korlátlan ideig) megfigyeljük a szigeten bekövetkező tájfunokat.

   (a) Az adott év alatt bekövetkező tájfunok számát egy Poisson-eloszlású X valószínűségi változóval modellezzük, és e^{-1} annak a valószínűsége, hogy az adott évben egyáltalán nem fordul elő tájfun. Mi a valószínűsége, hogy az adott évben legalább 3 tájfun fordul elő?

   (b) A megfigyelés kezdetétől az azt követő első tájfun bekövetkezéséig eltelő időt egy folytonos, örökifjú eloszlású Y valószínűségi változó írja le, amelyre

   $$\mathbb{P}(Y > 1) = \mathbb{P}(X = 0)$$

   teljesül. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y > 11 | Y > 5)$ feltételes valószínűség értékét és az $\mathbb{E}(Y^2)$ várható értéket.

4. Egy falu futballcsapata egy bajnokság minden mérkőzésén a többi mérkőzéstől (együttesen) függetlenül 1/3 valószínűséggel nyer, 1/3 valószínűséggel játszik döntetlent és 1/3 valószínűséggel veszít. A labdarúgásban megszokott szabályok szerint minden győzelem 3 pontot, minden döntetlen 1 pontot és minden vereség 0 pontot ér.

   (a) Jelölje Y a csapat által egy adott mérkőzésen megszerzett pontok számát. Határozzuk meg Y szórásnégyzetét.

   (b) Jelölje X a csapat által 20 egymást követő mérkőzésen elért pontok számának összegét. Közelítsük a $\mathbb{P}(X \geq 20)$ valószínűséget alkalmas approximációval. (A valószínűség pontos értékének meghatározására itt nem jár pont.)

A feladatsor a túloldalon folytatódik!

5. Legyen az X és az Y valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} -4x\mathrm{e}^{-2y}, & \text{ha } y>0 \text{ és } -1<x<0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}.$$

   (a) Független-e X és Y?

   (b) Milyen eloszlású Y és milyen paraméterrel?

   (c) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

6. * a) Svindler Sándor jól jövedelmező kockajátékokkal keresi kenyerét. A mai nap a következő játékot kínálja az utcán felé tévedő járókelőknek: a vállalkozó szellemű játékos dob egy szabályos 6 oldalú dobókockával. Amennyiben 6-ost dob, Sándor fizet neki ("pöttyönként 2 000", azaz összesen) 12 000 forintot, és a játék véget ér. Ha azonban más számot dob a játékos, akkor ő fizet Sándornak hasonló szisztéma szerint, egészen pontosan, ha az eredmény $1 \leq k \leq 5$, akkor $k \cdot 1\,000$ forintot, majd a ismét dob ugyanezen szabályok szerint. A dobások tehát egészen addig ismétlődnek, míg a játékos 6-ost nem dob, és a fenti szabályok érvényesek minden dobásnál. Mennyi Sándor játékonkénti profitjának várható értéke? (A játékonkénti profit Sándor bevételének és kiadásának különbsége egy játéknál, amely természetesen negatív szám is lehet.)

   b) Sándornak az utóbbi időben nem ment túl jól az üzlet, ezért úgy döntött, hogy bevételnövelés céljából beveti cinkelt dobókockáját, melyet (hogy ne legyen túl feltűnő) 9 másik szabályos, külsőre a cinkelt kockával megegyező dobókocka közé kevert. A cinkelt kockán az hatosdobás valószínűsége $\frac{1}{6}-p$, míg az egyesdobás valószínűsége $\frac{1}{6}+p$ valamely $0<p<\frac{1}{6}$ számra, minden egyéb érték pedig $\frac{1}{6}$ valószínűséggel adódik. A játékosok az újonnan bevezetett szabályok szerint egyenletesen véletlenszerűen választanak egyet a dobókockák közül, majd a választott dobókockával játsszák le a játékot az a) részben tárgyalt szabályoknak megfelelően. Határozzuk meg a p szám értékét, ha tudjuk, hogy Sándor játékonkénti profitjának várható értéke az új szabályok mellett 4 600 forintra változott.

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n;p)$	$\{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1-e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$\mathrm{N}(\mu;\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
n-dim normális	$\mathrm{N}\left(\underline{\mu};\underline{\underline{\Sigma}}\right)$	$\mathbb{R}^n$	$f_{\underline{X}}(\underline{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(\underline{\underline{\Sigma}})}}e^{-\frac{1}{2}(\underline{t}-\underline{\mu})^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\underline{t}-\underline{\mu})}$		$\underline{\mu}$	$\underline{\underline{\Sigma}}$

Vizsgadolgozat Valószínűségszámítás és statisztikából (ÚJ Valszám), 2024.01.18.
2026/27-ben a 6. feladat nem releváns.

1. (a) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező.
   i. Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ események. Milyen feltétel teljesülése esetén mondjuk azt definíció szerint, hogy A és B függetlenek?
   ii. Legyenek X és Y valószínűségi változók ezen a valószínűségi mezőn. Milyen feltétel teljesülése esetén mondjuk azt definíció szerint, hogy X és Y függetlenek? (Ezen kérdés megválaszolásához az i. részben már definiált fogalma(ka)t nem kell újra definiálni.)

   (b) Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségi változók egy sorozata és Z egy valószínűségi változó. Jelöljük X_i eloszlásfüggvényét F_{X_i}-vel ($i = 1, 2, \ldots$ esetén) és Z eloszlásfüggvényét F_Z-vel. Milyen feltétel teljesülése esetén mondjuk azt definíció szerint, hogy X_n eloszlásban konvergál Z-hez (amint $n \to \infty$)?

2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat adja meg.

Y \ X	1	2
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

   Határozzuk meg X és Y kovarianciáját és korrelációját, valamint Y-nak X-re vett regressziós egyenesét.

3. Egy X folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_X \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1, \\ \ln x, & \text{ha } 1 < x < \mathrm{e}, \\ 1, & \text{ha } x \geq \mathrm{e}, \end{cases}$$

   ahol $\mathrm{e} \approx 2{,}71\ldots$.

   (a) Határozzuk meg X várható értékét és szórásnégyzetét.

   (b) Számítógéppel szimuláltunk 100 darab független, azonos eloszlású valószínűségi változót az (a) feladatban szereplő F_X eloszlásfüggvénnyel. Becsüljük meg alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy ezek összege legfeljebb 180 (a valószínűség pontos értékének kiszámításáért itt nem jár pont).

   Tanács: A (b) részfeladatban érdemes az (a) részfeladat megoldásának megfelelően kerekített numerikus eredményeivel dolgozni szimbolikus értékek helyett.

4. Egy X és egy Y valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c, & \text{ha } 0 < y < 1 \text{ és } 0 < x < y, \\ 0, & \text{különben}, \end{cases}$$

   ahol $c > 0$ egy alkalmasan választott valós szám.

   (a) Határozzuk meg c értékét.

   (b) Határozzuk meg az f_X és f_Y perem-sűrűségfüggvényeket.

   (c) Független-e X és Y? Azonos eloszlású-e X és Y?

5. Egy trópusi barlangban a hőmérséklet egész évben közel állandó. A hőmérsékletet 6 időpontban megmértük és (Celsius-fokban mérve) az

$$x_1 = 18{,}6 \quad x_2 = 18{,}0 \quad x_3 = 19{,}2 \quad x_3 = 17{,}4 \quad x_5 = 16{,}8 \quad x_6 = 18{,}0$$

adatpontokat kaptuk. Az $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_6)$ vektort egy $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_6)$ fae. $\mathrm{N}(\mu; 4)$ eloszlású minta realizációjának tekintjük, ahol a μ várható érték ismeretlen.

   (a) A minta alapján adjunk 97% szintű konfidenciaintervallumot a μ paraméterre.

   (b) Egy régi földrajztankönyv azt állítja, hogy $\mu = 17{,}5$ °C. Felmerült, hogy a klímaváltozás miatt ez az állítás már sajnos nem tartható. Vizsgáljuk $\varepsilon = 0{,}05$ terjedelmű próbával, hogy a minta alapján igaz-e az állítás. Adjuk meg H_0-t, H_1-et, a próbastatisztika értékét, a döntést és azt, hogy mi alapján döntöttünk.

6. * Az $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ valószínűségi vektorváltozóról tudjuk, hogy (nemelfajuló) kétdimenziós normális eloszlású, várható érték vektora $\begin{pmatrix} 42 \\ -1 \end{pmatrix}$, valamint $\mathbb{E}(Y|X) = X + d$, ahol $d \in \mathbb{R}$ egy alkalmasan választott konstans.

   (a) Határozzuk meg d értékét.

   (b) Határozzuk meg Y-nak X-re vett regressziós egyenesét.

   (c) Független-e X és Y?

   (d) Diagonális-e $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixa?

   Megjegyzés: Ha az (a) *részben nem sikerült d-t kiszámítani, a többi részfeladatot paraméteresen is megoldhatjuk.*

Eloszlás neve	Jelölés	Ran(X)	$\mathbb{P}(X = k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n; p)$	$\{0, 1, ..., n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0, 1, ...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1, 2, ...\}$	$(1-p)^{k-1} p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$\mathrm{N}(\mu; \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
n-dim normális	$\mathrm{N}\left(\underline{\mu}; \underline{\underline{\Sigma}}\right)$	$\mathbb{R}^n$	$f_{\underline{X}}(\underline{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\underline{\underline{\Sigma}})}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{t}-\underline{\mu})^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} (\underline{t}-\underline{\mu})}$		$\underline{\mu}$	$\underline{\underline{\Sigma}}$

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Vizsgadolgozat Valószínűségszámítás és statisztikából (ÚJ Valszám), 2024.01.25.
2026/27-ben nem vizsgaanyag: 5a., 5b. (az 5c. viszont igen!), 6. feladat.

1. (a) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, legyen $n \geq 1$ és legyenek $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ események. Milyen feltételek teljesülése esetén nevezzük az ezen eseményekből álló sorozatot teljes eseményrendszernek definíció szerint?

   (b) Mikor nevezünk egy X valószínűségi változót egyszerűnek?

   (c) Legyen $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$, és legyen Y egy $\mathrm{N}(\mu; \sigma^2)$ eloszlású és X egy $\mathrm{N}(0; 1)$ eloszlású valószínűségi változó. Ebben az esetben X milyen lineáris transzformáltjának eloszlása azonos Y eloszlásával?

2. Az A, B, C eseményekről tudjuk, hogy páronként függetlenek és $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{10}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{10}$, valamint $\frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy a három esemény közül egyik sem következik be. Együttesen független-e A, B és C? Feltéve, hogy a három esemény közül legalább az egyik bekövetkezik, mi a valószínűsége, hogy mindhárom esemény (egyszerre) bekövetkezik?

3. Legyenek $X \sim \mathrm{N}(1; 9)$ és $Y \sim \mathrm{N}(-1; 16)$ független valószínűségi változók.

   (a) Határozzuk meg (indoklással!) $\mathbb{P}(2 < X < 3)$ értékét.

   (b) Legyen $Z = X + Y + 2024$ és $W = Y - 2X$. Határozzuk meg $\mathrm{cov}(Z, W)$ értékét.

   (c) Mennyi $X + Y$ várható értéke és szórásnégyzete (és miért)?

4. Megfigyelünk két villanykörtét, amelyek egymás mellett függnek egy terem mennyezetén. A megfigyelésünk kezdetén még mindkét körte üzemképes. A két villanykörte kiégéséig hátralévő időt egy-egy folytonos és örökifjú eloszlású, 100 nap várható értékű valószínűségi változó írja le, amelyek egymástól függetlenek. Pontosan 100 nappal a megfigyelés kezdete után visszatérünk a terembe és megvizsgáljuk, hogy kiégtek-e már a körték.

   (a) Mi a valószínűsége, hogy a bal oldali villanykörte ekkor még üzemképes (azaz nem égett ki már korábban)?

   (b) Definiáljuk az X és Y diszkrét valószínűségi változókat a következőképpen: $X = 1$, ha a bal oldali körte már korábban kiégett és $X = -1$ különben, és $Y = 0$, ha a jobb oldali körte már korábban kiégett és $Y = 3$ különben. Határozzuk meg $\mathrm{cov}(XY) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ értékét.

5. Egy X és egy Y valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/4, & \text{ha } 1 < x < 3 \text{ és } 2 < y < 2x, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

   (a) Határozzuk meg $f_{Y|X}(y|x)$ értékét minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

   (b) Ez alapján bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{E}[Y|X] = X + 1$.

   (c) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X < 2)$ valószínűséget.

6. * Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek $X_1, \ldots, X_n$ fae. $\mathrm{U}(0; \vartheta)$ eloszlású valószínűségi változók, ahol $\vartheta > 0$ egy ismeretlen paraméter.

   (a) A minta rögzített $x_1, \ldots, x_n$ realizációja esetén határozzuk meg a likelihood-függvény $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n)$ értékét.

   (b) Adjunk a minta alapján maximum likelihood becslést ϑ-ra.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n;p)$	$\{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1-e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$\mathrm{N}(\mu;\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
n-dim normális	$\mathrm{N}\left(\underline{\mu};\underline{\underline{\Sigma}}\right)$	$\mathbb{R}^n$	$f_{\underline{X}}(\underline{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(\underline{\underline{\Sigma}})}}e^{-\frac{1}{2}(\underline{t}-\underline{\mu})^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\underline{t}-\underline{\mu})}$		$\underline{\mu}$	$\underline{\underline{\Sigma}}$

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Zárthelyi dolgozat Valószínűségszámítás és statisztikából, 2023. október 24.

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. A $[0, 1]$ intervallumon egymástól függetlenül, találomra kiválasztunk két számot. Mi a valószínűsége, hogy a két szám összege nagyobb, mint a nagyobbik és a kisebbik szám különbségének kétszerese?

   Megoldás.
   (2 pont) A véletlen kísérlet megegyezik egy véletlen pont választásával a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzetben.
   (1 pont) Ez az Ω eseménytér.
   (2 pont) (x, y)-nal jelölve a véletlen pontot a négyzetben, a kedvező terület a négyzetnek az a része, ahol $x > y$ és $x + y > 2(x - y)$ vagy $y > x$ és $x + y > 2(y - x)$.
   (2 pont) arra, hogy ezeket az egyenleteket az ábra elkészítéséhez/kedvező terület kiszámításához használható alakra hozza: $x > y > x/3$ vagy $y > x > y/3$. (Vagy x-et fejezi ki y függvényeként, hasonlóan.)
   (2 pont) A kedvező terület tehát a négyzetnek az $y = x/3$ és az $y = x$, illetve az $y = x$ és az $y = 3x$ egyenesek közé eső része.
   (3 pont) jó ábra
   (3 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség $= \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_\Omega}$.
   (1 pont) $T_{\text{kedvező}} = 1 - T_{\text{kedvezőtlen}}$
   (1 pont) $T_\Omega = 1$
   (2 pont) $T_{\text{kedvezőtlen}} = 2 \times \frac{1 \cdot 1/3}{2} = 1/3$ (valahogy kiderül, hogy két derékszögű háromszög területének összegét számolja, megfelelő oldalhosszakkal)
   (0 pont) ezért $T_{\text{kedvező}} = 2/3$
   (1 pont) és így a kérdezett valószínűség is $2/3$.

   Ha egyből a kedvezőtlen területet kezdi el körülírni a kedvező helyett, az is jó. Ha máshogy számolja a kedvező területet, az is jó.

   Megjegyzés: Mivel a geometriai valószínűségi mezős feladatok megoldásait a gyakorlatokon is ritkán írtuk fel ennyire részletesen, ebben a feladatban azokra a lépésekre is jár a pont, amiket

a hallgató nem írt fel expliciten, de a későbbi megoldásból egyértelműen kiderül, hogy jól használta őket. Pl. ha kihagyja az első lépést, de utána a megfelelő módon rajzol ábrát/számol területeket, akkor ez a 2 pont is jár, vagy ha nem írja fel, hogy mi Ω, de később világos, hogy jól határozza meg a területét (és nem csak véletlenül jön ki neki 1 megoldásként), akkor arra is jár pont stb. stb. Ha nincs ábra, de a szövegből/számításokból kiderül, hogy a megfelelő síkidomok területét számolja, akkor az ábrára is adjunk pontot. Ha azonban a későbbi lépés, ami a hiányzó jó, de expliciten nem szereplő lépést használná, hibás, akkor sajnos a hiányzó lépésre sem lehet pontot adni.

2. Egy erdőben kétfajta macskaféle fordul elő nagyon nagy példányszámban: házi macska és vadmacska. A vadmacskák a macskafélék teljes állományának tíz százalékát alkotják. Az összes vadmacska cirmos, továbbá öt házi macskából átlagosan egy példány cirmos.

   (a) Véletlenszerűen kiválasztva az erdőből egy macskafélét, mi a valószínűsége, hogy cirmos?

   (b) Az erdőben véletlenszerűen meglátunk egy cirmos macskafélét, de a távolból nem tudjuk megállapítani, hogy házi macska-e vagy vadmacska. Mi a valószínűsége, hogy házi macska?

   (c) Az erdőből véletlenszerűen kiválasztunk egy macskafélét. Függetlenek-e a következő események: $A = \{$a kiválasztott macskaféle nem cirmos$\}$ és $B = \{$a kiválasztott macskaféle házi macska$\}$?

Megoldás.
A megoldásban az egyszerűség kedvéért használjuk a (c) feladatban szereplő A és B eseményeket. Ez természetesen nem elvárás, és máshogy is lehet jelölni az eseményeket. Nem nagy baj, ha a megoldásban olyan kifejezések szerepelnek, mint pl. $\mathbb{P}$(cirmos), de azért a mintamegoldásban ettől tartózkodunk.
(a): 9 pont
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(\overline{A})$ (vagy valahogy a saját jelölése szerint leírja, hogy mit keresünk – ha ez később kiderül, akkor nem baj, hogy nem szerepel az elején expliciten).
(1 pont) $\mathbb{P}(B) = 9/10$,
(1 pont) tehát $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1/10$.
(1 pont) $\mathbb{P}(\overline{A}|B) = 1/5$
(1 pont) és $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B}) = 1$.
(1 pont) Mivel B és $\overline{B}$ teljes eseményrendszert alkotnak (diszjunktak és uniójuk Ω – ezt nem kell részletezni, de valami indoklás kell, hogy miért használható a TVT),
(1 pont) a teljes valószínűség tételéből
(1 pont) $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\overline{A}|B) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$
(0 pont) $= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \cdot 1$
(1 pont) $= \frac{7}{25} = 0{,}28$. (Tizedestört és bármilyen közönséges tört alakban is jók az eredmények, a feladat további részeiben is.)

(b): 5 pont
(1 pont) A keresett (feltételes) valószínűség $\mathbb{P}(B|\overline{A})$.
(1 pont) A Bayes-tétel (vagy: Bayes-formula, egyszerű Bayes-tétel) szerint
(2 pont) $\mathbb{P}(B|\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A}|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(\overline{A}|B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})}$ (elég, ha azt írja, hogy $\mathbb{P}(B|\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A}|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(\overline{A})}$, mivel ennek a nevezőjét az (a) részben már kiszámoltuk)
(0 pont) $= \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{10}+1\cdot\frac{1}{10}}$
(1 pont) $= \frac{9}{14} = 0{,}6429$.

(c): 6 pont
Önmagában arra, hogy kimondja, hogy nem függetlenek, nem jár pont.

(1 pont) arra, ha kimondja és van valami indoklás, akkor is, ha az nem (teljesen) jó.
Indoklás: *1. megoldás.*
(1 pont) A függetlenség azt jelentené, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{18}{25}$,
(1 pont) és ezért $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$,
(1 pont) ahol $\mathbb{P}(A|B) = \frac{4}{5}$,
(1 pont) és így $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} = \frac{18}{25} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{18}{25} \cdot \frac{9}{10} = \frac{81}{125}$ (itt a pont csak annak a megállapítására jár, hogy a szükséges számításokat már elvégeztük és a két oldal tényleg nem egyenlő, nem is muszáj, hogy a 18/25 és a 81/125 végeredmények ott legyenek).
2. megoldás.
(1 pont) A függetlenség azzal ekvivalens, hogy $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$,
(1 pont) mivel $\mathbb{P}(B) > 0$ (ezt nem lehet megkerülni azzal, hogy „impliciten szerepel a megoldásban”!).
(1 pont) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{18}{25}$,
(2 pont) viszont $\mathbb{P}(A|B) = 4/5 \neq \frac{18}{25}$.
3. megoldás.
(1 pont) A függetlenség azzal ekvivalens, hogy $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$,
(1 pont) mivel $\mathbb{P}(A) > 0$ (ezt nem lehet megkerülni azzal, hogy „impliciten szerepel a megoldásban”!).
(1 pont) $\mathbb{P}(B|A) = 1$,
(1 pont) mert... (Bayes-tétellel vagy anélkül, de megindokolja, hogy nem cirmos macskaféle nem lehet vadmacska).
(1 pont) Így $\mathbb{P}(B|A) \neq \mathbb{P}(B) = \frac{9}{10}$.

További lehetséges megoldások. A és B pontosan akkor függetlenek, ha A és $\overline{B}$ függetlenek, avagy ha $\overline{A}$ és B, avagy ha $\overline{A}$ és $\overline{B}$. Erre jár 1 pont, ezután pedig annak megindokolására, hogy az említett ekvivalens függetlenség nem áll fent, további 4 pont (az (a)-ban már megkapott eredmények miatt $\overline{A}$-val könnyebb dolgozni, mint A-val).

3. Anna, Bea és Csilla egy pakli magyar kártyával kártyáznak. Keverés után mindhármuknak osztanak 8–8 lapot. (Egy pakli magyar kártyában 32 lap van, ebből pontosan 8 piros.)

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy osztás után Annánál nincs piros lap?

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy sem Beánál, sem Csillánál nincs piros lap?

   (c) Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom játékosnál van legalább egy piros lap?

Megoldás.
(a) (5 pont)
(1 pont) Jelöljük rendre A-val, B-vel és C-vel azt az eseményt, hogy Annánál, Beánál, illetve Csillánál van piros lap. Ekkor a $\mathbb{P}(\overline{A})$ valószínűséget keressük.
1. megoldás.
(1 pont) Az ötlet az, hogy nézzük meg, hogy melyik 8-as blokkban lehetnek piros lapok (az Annának, Beának, illetve Csillának osztottak és a maradék, ki nem osztott 8 közül).
(1 pont) Itt a kedvező lehetőségeket az adja, amikor csak Beánál, Csillánál és a maradékban lehet piros lap, tehát $\binom{24}{8}$-féleképpen oszthatjuk el a piros lapokat.
(1 pont) Az összes lehetőséget az adja, hogy bármelyik 8-asban lehetnek piros lapok, tehát $\binom{32}{8}$ lehetőség van.
(1 pont) Így tehát a keresett valószínűség $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$.
2. megoldás.

(1 pont) Ahhoz, hogy Annánál ne legyen piros lap, az kell, hogy a 24 nem piros lap közül kapjon 8-at, míg összesen 32 lap van (és ha ez teljesül, akkor a maradékból Bea és Csilla bármit kaphat), míg az összes lehetőséget az adja, hogy 32 lapból húz 8-at, tehát
(2 pont) $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$ (ha ezt helyesen felírja, akkor jár az előző 1 pont is szöveges indoklás nélkül is)
(1 pont) $(= \frac{(24!)^2}{32!16!}) \approx 0,0699$.
3. megoldás.
(1 pont) Tegyük fel (az általánosság megszorítása nélkül, a játékosok közti szimmetria miatt), hogy Anna, Bea, Csilla sorrendben osztjuk ki a lapokat. Ha Annánál nincs piros lap, ő a 24 nem piros lap közül kap 8-at, majd Bea a még ki nem osztott 24 lap közül 8-at, majd Csilla a maradék 16 lap közül 8-at. Az összes lehetőséget pedig az adja, hogy Anna a 32 lapból kap meg 8-at, Bea a maradék 24-ből 8-at, majd Csilla a még mindig fennmaradó 16-ból 8-at.
(2 pont) Tehát $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{\binom{24}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}}$ (ha ezt helyesen felírja, akkor jár az előző 1 pont is szöveges indoklás nélkül is)
(1 pont) $(= \frac{(24!)^2}{32!16!}) \approx 0{,}0699$.
Ha máshogy számolja ki, de jól megindokolja, az is rendben van.

(b) (5 pont)
(1 pont) Az előbbi jelöléssel most $\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C})$-t keressük.
1. megoldás.
(2 pont) Az előbbi 1. megoldás gondolatmenete alapján most az adja a kedvező lehetőségeket, ha csak Anna lapjai és a ki nem osztott 8 lap között lehetnek pirosak.
(1 pont) Ez tehát $\binom{16}{8}$ lehetőség.
(0 pont) Az összes lehetőség száma még mindig $\binom{32}{8}$.
(1 pont) Így tehát a keresett valószínűség $\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}}$.
2. megoldás.
(1 pont) Tegyük fel most (az általánosság megszorítása nélkül), hogy Bea, Csilla, Anna sorrendben osztjuk ki a lapokat. Ahhoz, hogy se Beánál, se Csillánál ne legyen piros lap, az kell, hogy Bea a 24 nem piros lap közül kapjon 8-at, Csilla pedig az ezután fennmaradó 16 nem piros lap közül 8-at (ami után Anna bármit húzhat a maradékból), míg az összes lehetőséget az adja, hogy Bea 32 lapból, majd Csilla az általa nem húzott 24 lapból húz 8-at (Anna pedig ezután bármit húzhat a maradékból).
(2 pont) Tehát $\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{\binom{24}{8}\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}}$ (ha ezt helyesen felírja, akkor jár az előző 1 pont is szöveges indoklás nélkül is)
(1 pont) $(= \frac{16!24!}{32!8!}) \approx 0{,}0012$.
3. megoldás. Ugyanez, csak az (a) 3. megoldásához hasonlóan az összes játékos húzására való lehetőségek számát figyelembe vesszük, így az összes kedvező eset számának $\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{16}{8}$ és az összes eset számának $\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}$ felel meg.

(c) (10 pont) (1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.
(1 pont) összesen arra az ötletre, hogy a komplementer esemény valószínűségét kellene kiszámolni és a valószínűség $1 - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$.
(1 pont) összesen arra, ha valahogy kiderül a megoldásból, hogy $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{C})$ és $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C})$.
Ha ezt nem veszi észre, de külön-külön mindet kiszámolja, jár ez az 1 pont.
(1 pont) A Poincaré-formula szerint

(1 pont) $\mathbb{P}(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}) = (\mathbb{P}(\overline{A})+\mathbb{P}(\overline{B})+\mathbb{P}(\overline{C})-\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B})-\mathbb{P}(\overline{B}\cap\overline{C})-\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{C})+\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})) = 3\mathbb{P}(\overline{A}) - 3\mathbb{P}(\overline{B}\cap\overline{C}) + \mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$.
(1 pont) Leírja, hogy $\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$-t milyen gondolatmenet alapján lehet kiszámolni.
A korábbi 1. megoldásokra emlékeztető megoldás: Most mind a 8 piros lapnak a nem kiosztottak között kell lennie (vagyis pontosan a piros lapokat nem osztjuk ki). Ez 1 lehetőség, míg az összes lehetőség száma továbbra is $\binom{32}{8}$.
A korábbi 2. megoldásokra emlékeztető megoldás: Ha az $\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ esemény bekövetkezik, akkor pl. Anna, Bea, Csilla sorrendben kiosztva a lapokat, Anna a 24 nem piros lapból kap nyolcat, Bea a 16 maradék nem pirosból 8-at és Csilla megkapja a fennmaradó 8 nem piros lapot, míg az összes lehetőséget az adja, hogy Anna 32, Bea az általa nem húzott 24 és Csilla az általuk nem húzott 16 lapból kap 8-at. Ezért
(2 pont) $\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{B}) = \frac{1}{\binom{32}{8}}$ avagy $\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) = \frac{\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}}$ (ha ezek valamelyikét helyesen felírja, akkor jár az előző 1 pont is szöveges indoklás nélkül is)
(1 pont) $(= \frac{24!8!}{32!}) \approx 9{,}507 \cdot 10^{-6}$.
(1 pont) Behelyettesítve a fenti formulákba, $\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B})(= 1 - \mathbb{P}(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}) = ... = 0{,}7939$.

Egyéb megjegyzések a pontozáshoz. Ha teljesen rossz eseménytérrel számol, de az kiderül, hogy klasszikus a valószínűségi mező / kedvező és összes esetek számának arányával próbál számolni, akkor max. 1 pont.
Tudomásul vesszük, hogy egyszerűbb számológépek is tudnak binomiális együtthatókat kiszámolni, emiatt a zárójelben szereplő, faktoriálisokból álló kifejezéseket nem muszáj kiírni.
Ha valahogy brute force-szal Poincaré nélkül kiszámolja helyesen a keresett valószínűségeket (ami elég valószínűtlen), azért jár a max. pont is, ha kellően megindokolja.

4. Egy egyetem hallgatói képviseletének programszervező bizottságában kétféle programlehetőség merült fel egy adott időpontra, nevezzük ezeket A és B opciónak. Egy kilenctagú bizottság dönt arról, hogy a két programlehetőség közül melyik valósuljon meg; a bizottság tagjai számára a szavazás kötelező, tartózkodni nem lehet. A bizottság három tagja biztosan az A opcióra szavaz, két tagja biztosan a B opcióra, négy tagja pedig bizonytalan, ezért ők egymástól függetlenül feldobnak egy-egy szabályos pénzérmét, és ha az eredmény fej, akkor az A opcióra szavaznak, ha pedig írás, akkor a B opcióra. Jelölje X az A opcióra szavazó bizottsági tagok számát.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik opció több mint két szavazat különbséggel nyer?

   (b) Milyen eloszlású az $X - 3$ valószínűségi változó és milyen paraméterrel/paraméterekkel?

   (c) Jelölje Y a B opcióra szavazó bizottsági tagok számát. Határozzuk meg X és Y együttes eloszlását és a peremeloszlásaikat (lehetőleg táblázatos formában, de elég $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$-t, $\mathbb{P}(X = k)$-t és $\mathbb{P}(Y = l)$-t minden olyan k-ra és l-re megadni, amelyre azok pozitívak).

Megoldás. Ami zárójelben van, azt nem muszáj odaírni.
(a) (7 pont)
(1 pont) $\mathbb{P}$(több mint két szavazattal nyer valamelyik opció) = $\mathbb{P}(A$ nyer több mint 2 szavazattal) $+\mathbb{P}(B$ nyer több mint 2 szavazattal).
(Ha a következő lépések jók, ezt át szabad ugrani pontlevonás nélkül.)
(1 pont) $\mathbb{P}(A$ nyer több mint 2 szavazattal) = $\mathbb{P}(A$-ra (pontosan) 6-an szavaznak) $+\mathbb{P}(A$-ra 7-en szavaznak)
$(= \mathbb{P}(A$-ra 3 bizonytalan szavaz) $+ \mathbb{P}(B$-re 4 bizonytalan szavaz) $(= \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 7))$
(1+1 pont) $= \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4$ (a $\binom{4}{3}$ helyett 4, a $\binom{4}{4}$ helyett 1 vagy semmi is jó persze)
(0 pont) $= \frac{5}{16}(= 0{,}3125)$.
(1 pont) Hasonlóan: $\mathbb{P}(B$ nyer több mint 2 szavazattal) = $\mathbb{P}(B$-ra (pontosan) 6-an szavaznak) $(= \mathbb{P}(A$-ra 0 bizonytalan szavaz)) $(= \mathbb{P}(X = 3))$.

(1 pont) $= \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^4$
(0 pont) $= \frac{1}{16}$,
(1 pont) tehát a keresett valószínűség 3/8(= 0,375, más közönséges tört alakban is jó).
Ha valamiért külön-külön számolja ki, hogy mi a valószínűsége, hogy A, illetve B legalább 2 szavazattal nyer, és nem adja össze ezeket, azért 1 pontot vonjunk le.

(b) (3 pont)
(2 pont) $(X-3) \sim \mathrm{B}(4;1/2)$ (1 pont arra, hogy binomiális, további 1 pont arra, ha mindkét paraméter jó és világos, legalább impliciten, hogy melyik az n és melyik a p),
(1 pont) mert... (valahogy megindokolja, hogy 4 független kísérletet végzünk és mind 1/2 valószínűséggel sikerül, ahol a siker az, hogy egy adott bizonytalan fejet dob, és $X-3$ a sikerek száma. Nem baj, ha az indoklás nem egészen teljes, de indoklás hiányában nem jár a pont).
Jó megoldás az is, hogy $\mathbb{P}(X-3=k)$ hiányzó értékeit (amiket még nem számoltunk ki az (a)-ban: $k=1,2$) kiszámolja és utána állapítja meg, hogy pont a $B(4;1/2)$ súlyfüggvényét kapta. Ebben az esetben nem szükséges a binomiális eloszlás interpretációjával érvelni, 1 pont jár összesen a hiányzó értékek kiszámítására.
Ha valaki tökéletesen megadja $X-3$ eloszlását (pl. a súlyfüggvény összes nem 0 értékével), de nem írja oda, hogy binomiális, vagy odaírja, de azt nem, hogy milyen paraméterekkel, arra 2 pont jár. Ebből részpontszám adható (pl. ha egy-két értéket kifelejt, de nem többet, vagy ha leírja minden egyes értékhez a kedvező esetek számát, de nem magukat a valószínűségeket stb.).

(c) (10 pont)
A helyes táblázat (peremeloszlásokkal együtt):

Y \ X	3	4	5	6	7	p_Y
2	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
4	0	0	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$
5	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
6	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$
p_X	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	(1)

A táblázatban szereplő értékek indoklásáról lásd a következő *gyorsított pontozási útmutató*t.

Gyorsított pontozási útmutató tökéletes együttes eloszlás esetén (ha $\mathbb{P}(X=k,Y=l)$-re minden olyan (k,l)-re helyes érték szerepel, amelyre az nem 0):
(3 pont), ha az együttes eloszlásban szereplő pozitív értékek helyesek, akár mindenfajta indoklás nélkül is. A feladat megfogalmazása miatt nem jár levonás azért, ha csak ezeket számolja ki és nem említi meg, hogy minden más kimenetel valószínűsége 0.
(1 pont) annak megemlítésére, hogy $\mathbb{P}(X=3,Y=6)$, $\mathbb{P}(X=6,Y=3)$ és $\mathbb{P}(X=7,Y=2)$ értékeit már kiszámolta az (a) vagy a (b) részben, vagy ha nem számolta még ki, akkor ezek kiszámítására összesen. Ha (a)-ban vagy (b)-ben már észrevette, hogy tulajdonképpen ezeket a valószínűségeket számolta ki, az is jó.
(1 pont) $\mathbb{P}(X=4,Y=5)$ kiszámítására (itt természetesen lehet a (b)-re hivatkozni és azt mondani, hogy ez $\mathbb{P}(X=4)$, avagy $\mathbb{P}(X-3=1)$, de nem muszáj. Elég, ha az szerepel, hogy $\mathbb{P}(X=4,Y=5)=\binom{4}{1}(\frac{1}{2})^4=1/4$).

(1 pont) $\mathbb{P}(X = 5, Y = 4)$ kiszámítására (hasonlóan).
(2 pont) X peremeloszlására, ha az is helyes.
(2 pont) Y peremeloszlására, ha az is helyes.

Általános javítási útmutató (hibás vagy hiányos együttes eloszlás esetére):
Az együttes eloszlásra összesen 6 pont jár.
(1 pont) arra az ötletre, hogy $X + Y$ mindig 9-cel egyenlő, másképp fogalmazva $Y = 9 - X$ (1 valószínűséggel vagy mindig). Ha ez a megoldásból derül ki, akkor is jár rá a pont. Ha van táblázat, ez ekvivalens azzal, hogy a „mellékátlón" kívüli elemek 0-val egyenlők.
(1 pont) arra, hogy $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$ pontosan akkor nem 0, ha $k = 3, \dots, 7$ és $l = 9 - k$. Ez is elég, ha a végén a táblázatból kiderül, illetve ha nincs táblázat, de ezek az értékek mind pozitívak és az összegük 1 (és az összes többi $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$ vagy 0, vagy nincs is megemlítve), akkor jár ez a pont, további indoklás nélkül is.
(1 pont) Valahogy kiderül az, hogy $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$ értékét $k = 3, 6, 7$-re már kiszámoltuk az (a) részben. Ehhez is elég, ha a táblázatba írja a helyes értékeket.
(1 pont) $\mathbb{P}(X = 4, Y = 5) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$.
(Ha ez így szerepel, akkor már nem kell tovább indokolni. Lehet azt is mondani, hogy $p = 1/2$ miatt/szimmetria miatt ez ugyanannyi, mint $\mathbb{P}(X = 6, Y = 3)$, amit már kiszámoltunk.)
(1 pont) $\mathbb{P}(X = 5, Y = 4) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$.
(Plusz hasonló megjegyzések a javításhoz, mint az előző pontnál.)
(0 pont) Ezek alapján elkészül a táblázat (ha van).
További megjegyzés: A (c) részből eddig, ha a táblázatban szereplő nem 0 értékek részben vagy teljesen rosszak, de az jó, hogy melyik értékek nem 0-k (illetve hogy melyik értékek vannak felsorolva, ha a 0 értékeket nem sorolja fel), akkor max. 3 pont.

A peremeloszlásokra 4 pont jár (ha van táblázat, akkor az alapján, további indoklás nélkül is):
(1 pont) X és Y értékkészlete is jó, és minden olyan értékre, amire $\mathbb{P}(X = k)$, illetve $\mathbb{P}(Y = l)$ nem 0, meg van adva egy-egy nem 0 érték, és ezen értékek összege X és Y esetén is 1.
(1+1 pont) $p_Y(l) = \sum_k p_{(X,Y)}(k, l)$ minden l-re és $p_X(k) = \sum_l p_{(X,Y)}(k, l)$ minden k-ra teljesül a hallgató által megadott megoldásban.
(1 pont) jár végül arra, ha a perem-súlyfüggvények értékei nemcsak az eddig felsoroltakat teljesítik, hanem tényleg mind jók is.
További megjegyzések: Ha nem írja le a peremeloszlásokat, akkor ebből a 4 pontból csak az értékkészletekre lehet pontot adni, illetve esetleg ha az (a) vagy a (b) részből kiderül még valami a peremeloszlásokra vonatkozóan, akkor arra.
Ha az együttes eloszlást nem tudja jól megadni, de X súlyfüggvényét (pl. a binomiális eloszlás képlete alapján) jól meg tudja adni, arra jár a (c)-ben max. 4 pont. Ha rájön, hogy $(Y - 2) \sim \mathrm{B}(4; 1/2)$ és ez alapján Y súlyfüggvényét is jól meghatározza, arra további max. 4 pont.

5. Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f_X(x) = \frac{c}{x^2}$, ha $x > 1$ és $f_X(x) = 0$ különben, ahol $c > 0$ egy megfelelően választott konstans.

   (a) Határozzuk meg c értékét.

   (b) Definiáljuk az Y diszkrét valószínűségi változót a következőképpen:

$$Y = \begin{cases} 3, & \text{ha } X < 3, \\ 0, & \text{ha } 3 \le X < 4, \\ 4, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $\mathbb{P}(Y = k)$-t minden olyan $k \in \mathbb{R}$-re, amelyre ez a mennyiség pozitív.

(c) Határozzuk meg Y várható értékét és szórását.

Megoldás.
(a) (6 pont)
(1 pont) f_X akkor lesz sűrűségfüggvény, ha nemnegatív (ezt elég csak megemlíteni, $c > 0$ miatt világos, hogy ez teljesül)
(2 pont) és $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{c}{x^2}\mathrm{d}x$
($\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x$-t ki lehet hagyni és egyből $\int_1^{\infty} \frac{c}{x^2}\mathrm{d}x$-szel kezdeni, de ha csak az előbbi szerepel, akkor csak 1 pont)
(1 pont) $= [-c/x]_1^{\infty}$
(1 pont) $(= 0 + c) = c$,
(1 pont) tehát $c = 1$.

Ha c-t rosszul határozta meg, de továbbszámol a rossz értékkel, akkor a további részekre lehet pontot adni, de ha a $\mathbb{P}(Y = k)$-k összegére nem 1 jön ki neki, akkor vonjunk le még 1 pontot.

(b) (7 pont)
(1 pont) $\mathrm{Ran}(Y) = \{0, 3, 4\}$ (ha ez hiányzik, de később szerepel $\mathbb{P}(Y = k)$ minden $k \in \{0, 3, 4\}$ esetén és ezek összege 1, vagy kimondja, hogy más értéket nem vesz fel Y, akkor is jár ez a pont)
(1 pont) $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(X < 3)(= \mathbb{P}(1 < X < 3) = \int_1^3 f_X(x)\mathrm{d}x) = \int_1^3 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$
(1 pont) $(= [-1/x]_1^3) = 1 - 1/3 = 2/3$. (A primitív függvényre itt nem jár külön még egy pont, mert az (a) részben már adtunk, így nem baj, ha egyből a behelyettesítéssel kezdi.)
(1 pont) Hasonlóan $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(3 \leq X < 4)(= \int_3^4 f_X(x)\mathrm{d}x) = \int_3^4 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ (ha itt nem indokolja meg, hogy ez az eloszlásfüggvény/a val. változó folytonossága miatt igaz, akkor is jár ez a pont)
(1 pont) $(= [-1/x]_3^4) = 1/3 - 1/4 = 1/12$. ($0,8\dot{3}$ tizedes tört alakban, illetve 4 értékes jegyre kerekítve is jó, az előbbi 2/3 is.)
(1 pont) Végül $\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(X \geq 4)(= \int_4^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x) = \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$
(1 pont) $(= [-1/x]_4^{\infty}) = 0 + 1/4 = 1/4$.
(Ha $\mathbb{P}(Y = k)$ a három releváns k pontból kettőben már megvan, a harmadikat szabad komplementer valószínűséggel is számolni.)

(c) (7 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = 3\mathbb{P}(Y = 3)(+0\mathbb{P}(Y = 0)) + 4\mathbb{P}(Y = 4)$
(1 pont) $= 3 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 3$. (Az előző pont akkor is jár, ha egyből „$\mathbb{E}(Y) =$” után írja a behelyettesített számszerű értékekkel a várható érték képletét, vagy ha a várható érték általános képletét írja le először és utána egyből mindent behelyettesít.)
(1 pont) $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$,
(1 pont) ahol $\mathbb{E}(Y^2) = 9\mathbb{P}(Y = 3)(+0\mathbb{P}(Y = 0)) + 16\mathbb{P}(Y = 4)$
(1 pont) $= 9 \cdot \frac{2}{3} + 16 \cdot \frac{1}{4} = 10$, (A várható érték pontozásához hasonlóan elfogadunk ennél tömörebb megoldásokat.)
(1 pont) így $\mathbb{D}^2(Y) = 10 - 3^2 = 1$,
(1 pont) tehát $\mathbb{D}(Y)(= \sqrt{\mathbb{D}^2(Y)} = \sqrt{1}) = 1$.

Megjegyzés: Ha valaki a (b) részben nem tudta Y eloszlását meghatározni, de próbálja általánosan/paraméteresen meghatározni $\mathbb{E}(X)$-et és $\mathbb{D}^2(X)$-et, akkor a (c)-re max. 3 pont. Pontozás attól függően, hogy mennyire hihető, hogy az ezekre vonatkozó képleteket nem csak ismeri, hanem konkrét val. változókra is jól tudja alkalmazni. A teljes 3 ponthoz mindenképpen szükséges, hogy Y értékkészletét felismerje (a 0 értéket persze ki lehet hagyni a momentumok meghatározásánál).

6. * Legyen X egy olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye $F_X \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ ($\mathrm{e} \approx 2{,}71...$). Felhasználhatjuk, hogy ez egy eloszlásfüggvény (lásd 5. feladatsor).

(a) Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon) < 1/2$.

(b) Legyen $Y = \mathrm{e}^{-X}$. Határozzuk meg Y sűrűségfüggvényét és szórását.

Megoldás.
(a) (6 pont)
1. megoldás.
(1 pont) $\mathbb{P}(X < 0) = F_X(0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-0}}$
(0 pont) $= 1/\mathrm{e}$ (vagy: e^{-1}; $1/\mathrm{e} \approx 0{,}3679$, de látni fogjuk, hogy a pontos numerikus érték nem olyan fontos. Az előző lépésből az "$= F_X(0)$" kihagyható és egyből jöhet a képlet, de ha egyből a végeredmény jön, akkor csak 1 pont jár a 2-ből).
(1 pont) Tehát $F_X(0) < 1/2$ (ezt nem kell tovább indokolni akkor sem, ha nem adta meg $1/\mathrm{e}$ numerikus értékét, higgyük el, hogy tudja, hogy $\mathrm{e} > 2$).
(1 pont) Az eloszlásfüggvény folytonos,
(1 pont) mert... (valahogy megindokolja: pl. azért, mert folytonos függvények kompozíciója, vagy azért, mert minden pontban differenciálható – ha ezt írja, higgyük el neki akár anélkül is, hogy lederiválná – és ezért minden pontban folytonos),
(1 pont) ezért van olyan $\varepsilon > 0$ is, amelyre $F_X(\varepsilon) < 1/2$,
(1 pont) és szintén a folytonosság miatt $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon) = F_X(\varepsilon)$, amiből következik a bizonyítandó állítás.

(Ne vonjunk le pontot, ha egyszer már hivatkozott a folytonosságra és most nem teszi, illetve csak egy pontot vonjunk le összesen, ha nem hivatkozott rá egyáltalán. A legelső 1 pont jár akkor is, ha nem írta oda, hogy $F_X(0) = \mathbb{P}(X < 0)$, tehát ennek hiányában akár maximális pontszám is kapható, viszont az utolsó pont csak akkor jár, ha szerepel, hogy $F_X(\varepsilon) = \mathbb{P}(X \leq \varepsilon)$.)

Alternatív jó megoldások például:

- A folytonosságot a 0-ban alkalmazza és azt írja, hogy $\mathbb{P}(X \leq 0) = 1/\mathrm{e} < 1/2$, és utána (szintén a folytonosság miatt) $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon) < 1/2$ is teljesül, ha $\varepsilon > 0$ elég kicsi. Itt tulajdonképpen nem $x \mapsto \mathbb{P}(X < x)$, hanem $x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$ folytonosságára kell hivatkozni, de ha ez az egyetlen probléma, azért ne vonjunk le pontot.
- A folytonosság helyett arra hivatkozik, hogy $\mathbb{P}(X = c) = 0$ valamilyen $c \in \mathbb{R}$-re (pl. $c = 0, \varepsilon$ stb.). Ez ugyanúgy jó, de valahogy meg kell indokolni, pl. azzal, hogy X folytonos val. változó, más szavakkal azzal, hogy van sűrűségfüggvénye (erre jár 1 pont a folytonosság helyett), amit szintén meg kell indokolni, pl. azzal, hogy az eloszlásfüggvény mindenütt differenciálható (erre jár 1 pont a folytonosság megindoklása helyett).
- Eljut addig, hogy $\mathbb{P}(X < \varepsilon) < 1/2$ valamely $\varepsilon > 0$-ra, és utána nem az eloszlásfüggvény folytonosságára hivatkozik, hanem azt mondja, hogy ekkor valamely (bármely) $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$-re $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon') < 1/2$.
  (Ez a valószínűség monotonitásából következik, de nem kell indokolni.)

Alternatív „brute force" megoldás, szintén teljes pontszámért: választ valami tetszőleges 0-nál nagyobb ε számot, amire $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\varepsilon}} < 1/2$ (pl. $\varepsilon = 1/4$ jó). Ebből kijön az, hogy $F_X(\varepsilon) = \mathbb{P}(X < \varepsilon) < 1/2$ (4 pont), és ezután meg kell indokolni, hogy ebből miért következik, hogy $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon) < 1/2$ (pl. folytonosság, 1 pont), amit az előbbiekhez hasonlóan szintén meg kell indokolni (1 pont).
Alternatív megoldás megint csak az, hogy $\mathbb{P}(X < \varepsilon) < 1/2$-ből azt vezeti le, hogy akkor valamilyen (bármely) $\varepsilon' \in (0, 1/2)$-re $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon') < 1/2$.
Ha ezzel próbálkozik, de nem jó ε-t választ, akkor az első 4 pontból max. 2 pont, utána az

utolsó 2 pontot még megkaphatja akár mind az indoklás jóságától függően.

(b) (14 pont, ami zárójelben van, azt nem kötelező odaírni)
(1 pont) arra az ötletre, hogy Y sűrűségfüggvénye kiszámításához először az eloszlásfüggvényét kellene meghatározni (akkor is, ha ezután semmi más jó nincs. Ha csak az látszik, hogy az eloszlásfüggvényt próbálja felírni, és szintaktikailag értelmezhető dolgot ír, akkor jár az 1 pont)
(1 pont) $\mathrm{Ran}(Y) = (0, \infty)$ (elfogadjuk $=$ helyett $\subseteq$-val és/vagy $(0, \infty)$ helyett $[0, \infty)$-vel is. Ha később kiderül, hogy $F_Y(x) = 0$ minden $x \leq 0$-ra, akkor ez az 1 pont jár.)
(1 pont) és ezért $F_Y(x) (= \mathbb{P}(Y < x)) = 0$ minden $x \leq 0$-ra.
(1 pont) Ha $x > 0$, akkor $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x)$
(0 pont) $= \mathbb{P}(\mathrm{e}^{-X} < x)$
(2 pont) $(= \mathbb{P}(-X < \ln x)) = \mathbb{P}(X > -\ln x)$
(2 pont) $(= 1 - \mathbb{P}(X \leq -\ln x) = 1 - F_X(\ln x)) = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(-\ln x)}} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
(Ebből 1 pont jár a komplementer valószínűségre, 1 pont az átalakításra az azonosságok segítségével. Itt ugye megint használjuk F_X folytonosságát, de többször már nem jár rá pont.)
(2 pont) Tehát $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$,
(1 pont) és így (a táblázat alapján) $f_Y(x) = \mathrm{e}^{-x}$, ha $x > 0$
(1 pont) és $f_Y(x) = 0$, ha $x \leq 0$ (ha a 0-t a másik szakaszhoz veszi, az is OK),
(1 pont) valamint (szintén a táblázat alapján) $\mathbb{D}^2(Y) = 1$,
(1 pont) és így $\mathbb{D}(Y) = 1$.

Ha az eloszlásfüggvény alapján nem veszi észre, hogy Y exponenciális eloszlású: 1 pont jár arra, hogy $f_Y(x) = 0$, ha $x \leq 0$, 1 pont arra, hogy $x > 0$ esetén $f_Y(x)$-et az eloszlásfüggvény deriválásával lehet megkapni, és 2 pont arra, hogy ezt a deriválást jól el is végzi.
Ha ezután a sűrűségfüggvényéről sem ismeri fel az exponenciális eloszlást, akkor sajnos sokat kell dolgozni az utolsó 2 pontért, ráadásul fél pontokat nem is adhatunk. A szórást $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2}$ képlettel kell meghatározni (0 pont), amihez ki kell számolni $\mathbb{E}(X)$-et (1 pont, 1× parc. int. vagy $\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty (1 - F_Y(x))\mathrm{d}x$) és $\mathbb{E}(Y^2)$-et (2× parc. int., esetleg az első után kapott képletben fel lehet ismerni a már kiszámolt várható értéket), majd elvégezni a szükséges kivonást és gyökvonást (összesen 1 pont).

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X = k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n; p)$	$\{0, 1, ..., n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0, 1, ...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1, 2, ...\}$	$(1-p)^{k-1} p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Pótló zárthelyi dolgozat

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Az A, B és C eseményekről tudjuk, hogy (együttesen) függetlenek és pozitív valószínűségűek, valamint $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(A \cap C) = 1/8$ és $\mathbb{P}(A|B) = 1/2$.

   (a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az A, B, C események közül legalább az egyik bekövetkezik.

   (b) Feltéve, hogy az A esemény bekövetkezett, mekkora a valószínűsége, hogy C is bekövetkezett, de ugyanakkor B nem?

   (c) Függetlenek-e a $B \cap C$ és az $A \cap C$ események?

   Tanács: Ha események függetlenségére hivatkozunk, akkor mindig adjuk meg lépésenként különkülön, hogy éppen melyik eseményekére.

   Megoldás.

   (a) (12 pont)
   (0 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.
   (1 pont) A Poincaré-formula szerint
   (1 pont) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.
   (1 pont) Egyrészt $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$,
   (1 pont) mert A, B, C (együttesen) függetlenek,
   (1 pont) márészt $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$,
   (1 pont) mert A és C függetlenek (vagy itt is szabad az együttes függetlenségre hivatkozni).
   (1 pont) Tehát $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(A \cap C)$ miatt $\mathbb{P}(B) = 1/2$. (Ha az előbbi lépéseket egy kicsit összevonja, az nem baj, de a teljes pontszámért mind a két szorzatra való bomlást meg kell indokolni.)
   (1 pont) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) = 1/2$,
   (1 pont) mert A és B függetlenek (és $\mathbb{P}(B) > 0$, de ha ezt nem írja oda, azért ne vonjunk le

pontot). (Ha felírja a feltételes valószínűség definícióját és utána használja a függetlenséget, természetesen az is jó, de arra is csak 1 pont jár).
(1 pont) Ezért $\mathbb{P}(C) = 1/2$ ($\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 1/8$ miatt – ha az már szerepelt, akkor rendben van további indoklás nélkül is).
(0 pont) Az együttes függetlenség miatt (vagy: külön-külön amiatt, hogy A és B, illetve B és C függetlenek; erre itt nem adunk külön pontot, mert összesen csak 20 pontot lehet adni, és ez a lépés ugyanaz, mint a fenti $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ indoklása)
(1 pont) $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) = (1/2 \cdot 1/2) = 1/4$.
(1 pont) Tehát (visszahelyettesítve a Poincaré-formulába) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 7/8$. (Itt, miután a képletre már adtunk pontot, az egyszerű részletszámításokra nem jár pont, csak a végeredményre.)

(b) (4 pont)
(1 pont) A keresett (feltételes) valószínűség $\mathbb{P}((C \setminus B)|A)$, avagy $\mathbb{P}((C \cap \overline{B})|A)$.
1. megoldás.
(1 pont) $\mathbb{P}((C \cap \overline{B})|A)$ megegyezik $\mathbb{P}(C \setminus B)$-vel,
(1 pont) azaz $\mathbb{P}(C \setminus B) = \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) = 1/2 - 1/4 = 1/4$,
(1 pont) mivel A, B, C együttesen függetlenek; avagy: mivel C, B és $C \cap B$ is független A-tól (és így $C \setminus B$ is); avagy: mivel $A, \overline{B}$ és C is együttesen függetlenek; avagy: mivel $C, \overline{B}$ és $C \cap \overline{B}$ is független A-tól (és így $C \setminus B$ is).
Ezért az 1 pontért nem várunk el külön indoklást arra, hogy A, B és C együttes függetlensége akkor is igaz marad, ha B-t $\overline{B}$-re cseréljük, azt viszont látni kell, hogy itt az együttes függetlenséget használjuk és nem elég páronkénti függetlenségekre hivatkozni.
Nem jó (és ez az 1 pont nem is jár rá) azt mondani, hogy azért, mert B és C is függetlenek A-tól; kell az is, hogy $B \cap C$ (és emiatt $C \setminus B$) is független A-tól. Hasonlóan az sem elég, hogy $\overline{B}$ és C függetlenek A-tól, az is kell, hogy $\overline{B} \cap C$ függetlenek A-tól.
2. megoldás.
(1 pont) $\mathbb{P}(C \setminus B|A) = \frac{\mathbb{P}((C \setminus B) \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$
(1 pont) $= \frac{\mathbb{P}(C \cap A) - \mathbb{P}(B \cap C \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$
(1 pont) $= \frac{1/4 - 1/8}{1/2} = 1/4$.

(c) (4 pont)
(1 pont) arra, hogy nem függetlenek, ha van valamilyen indoklás (akár rossz indoklás esetén is, de indoklás nélkül nem jár pont).
(1 pont) A függetlenség azt jelentené, hogy $\mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap C)\mathbb{P}(B \cap C)$. (Itt az is jó, ha egyből $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$-t ír $\mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C))$ helyett.)
(1 pont) $\mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/8$ (itt a pont akkor is jár, ha $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$-t korábban rosszul számolta ki, de az első lépés jó),
(1 pont) viszont $\mathbb{P}(A \cap C)\mathbb{P}(B \cap C) = 1/16$.

2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat adja meg.

Y \ X	3	5
0	$\frac{1}{2}$	a
1	b	$\frac{1}{4}$
2	0	c

(a) Határozzuk meg a, b és c értékét, ha $\mathbb{P}(X = 3) = 7/12$ és $\mathbb{E}(Y) = 1/2$.
(b) Független-e X és Y?

(c) Határozzuk meg $\mathbb{E}(XY)$-t.

Megoldás.

(a) (8 pont)
(1 pont) $\mathbb{P}(X = 3)$-at úgy kaphatjuk meg, hogy az $X = 3$-nak megfelelő oszlopban szereplő értékeket összegezzük, így
(1 pont) $b = 7/12 - 1/2 = 1/12$. (Az előző 1 pont is jár, ha ez így le van írva. Ha csak azt írja le, hogy $b = 1/12$, arra max. 1 pont.)
(1 pont) $1/2 = \mathbb{E}(Y) = (0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0)) + 1 \cdot \mathbb{P}(Y = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(Y = 2)$
(1 pont) $= 1/12 + 1/4 + 2c$,
(1 pont) és ezért $c = 1/12$.
(Ha a várható érték általános képletét írja fel és utána egyből behelyettesít az $\mathbb{P}(Y = k)$ értékekbe, az is jó. De ha csak a várható érték általános képlete szerepel, azért nem jár pont. A számolás utolsó két sora rövidíthető, de arra max. 1 pontot adjunk, ha az első sor után egyből a végeredmény jön.)
(1 pont) Végül a táblázatban szereplő számok összegének 1-nek kell lennie (elég, ha ez impliciten kiderül a megoldásból),
(1 pont) ezért a megegyezik 1 mínusz a táblázatban lévő összes többi szám összegével (ahol most már $b = 1/12$-rt és $c = 1/12$-et is behelyettesítjük).
(Elég, ha ez impliciten derül ki a megoldásból, de ha az előző is csak impliciten derült ki, akkor a két lépésre együtt csak 1 pont jár.) (1 pont) tehát $a = 1/12$ (ez elfogadható további részletes számolás nélkül is).

(b) (6 pont)
Önmagában annak a kijelentésére, hogy nem függetlenek, nem jár pont.
(1 pont) Nem függetlenek, mert... (valahogy megindokolja; ez az 1 pont akkor is jár, ha amúgy az indoklás rossz)
(2 pont) Ahhoz, hogy függetlenek legyenek, az kellene, hogy $\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = l)$ minden $k \in \{3, 5\}$ (vagy: minden $k \in \mathrm{Ran}(X)$) és $l \in \{0, 1, 2\}$ (vagy: minden $l \in \mathrm{Ran}(Y)$) esetén teljesüljön. Ez a két pont akkor is jár, ha a következő lépésből impliciten kiderül, hogy tudja, hogy mi a függetlenség és az adott konkrét esetben igyekszik megcáfolni, hogy teljesül.
(3 pont) Viszont ez nem teljesül, mert például... (választ egy megfelelő (k, l) párt, és és leírja, hogy mennyi $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$ [a táblázat alapján, a) végeredményét felhasználva] – 1 pont, illetve leírja, hogy mennyi $\mathbb{P}(X = k)$ és $\mathbb{P}(Y = l)$ [itt nagyon hosszan nem kell indokolni, de valahogy derüljön ki, hogy oszlop- illetve sorösszegzésről van szó] – 1+1 pont.
Ha a peremeloszlások megfelelő értékeinél csak végeredményt közöl, akkor az utóbbi 1+1 pontból csak 1 jár. Itt egy esetben lehetünk engedékenyebbek: ha a táblázatban szereplő 0-s elemet választja és csak annyit ír, hogy $\mathbb{P}(X = k)$, $\mathbb{P}(Y = l) \neq 0$, amit elhihetünk anélkül is, hogy kiszámolná ezeket a peremvalószínűségeket.)

(c) (6 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k \in \mathrm{Ran}(XY)} \mathbb{P}(XY = k)$. (Ha később kiderül, hogy ezzel a képlettel dolgozik, jár ez az 1 pont is.)
(2 pont) $\mathrm{Ran}(XY) = \{0, 3, 5, 10\}$ meghatározására: itt elég a lehetséges értékeket felsorolni, de részben hibás megoldás esetén csak akkor jár részpontszám, ha van indoklás. Az nem baj, ha a 6-ot is beleveszi az értékkészletbe, ha utána kiderül, hogy $\mathbb{P}(XY = 6) = 0$. Indoklás pl.: ha $Y = 0$, akkor XY mindenképpen 0, ha $Y = 1$, akkor $XY = 3$, ha $X = 3$, és $XY = 5$, ha

$XY = 5$, végül ha $Y = 2$, akkor ($XY = 3$, ha $X = 6$ és) $XY = 10$, ha $XY = 10$.
(Ha ez kiderül, akkor a következő lépés átugorható, illetve ha megvan a következő lépés, az itt is indoklásnak számít.)
(1 pont) Tehát (az a)-beli eredményeket is felhasználva) $\mathbb{E}(XY) = (0\mathbb{P}(X = 3, Y = 0)+0\mathbb{P}(X = 5, Y = 0)) + 3\mathbb{P}(X = 3, Y = 1) + 5\mathbb{P}(X = 5, Y = 1)(+6\mathbb{P}(X = 3, Y = 2)) + 10\mathbb{P}(X = 5, Y = 2)$
(1 pont) $= (\frac{7}{12} \cdot 0) + \frac{1}{12} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 5(+0 \cdot 6) + \frac{1}{12} \cdot 10$
(1 pont) $= 7/3(= 2,\dot{3} = 28/12)$ (tizedes és közönséges tört alakban is jó, kerekítve is).

Megjegyzés: Természetesen úgy is jó, hogy $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k\in \mathrm{Ran}(X)} \sum_{l\in \mathrm{Ran}(Y)} kl\mathbb{P}(X = k, Y = l)$. Ebben az esetben XY értékkészletét nem szükséges meghatározni, ha X és Y értékkészlete (legalább impliciten) helyesen szerepel.

3. Egy könyvtárban minden könyvet minden hónapban legfeljebb egy ember kölcsönöz ki, legfeljebb egyszer és csak arra a hónapra. A könyvtárba egyre több könyvet hoznak, de a látogatók száma nem növekszik, ezért ahogy telik az idő, egy-egy könyvet egyre kisebb valószínűséggel vesz ki valaki egy adott hónapban. A megfigyelés kezdetétől számított k-adik hónapban (ahol $k \geq 1$ egy egész szám) $3k$ könyv van a könyvtárban, és mindegyiket egymástól függetlenül $1/k$ valószínűséggel veszi ki valaki.

   (a) Határozzuk meg (pontosan) annak a valószínűségét, hogy a 68. hónapban legalább 3 könyvet vesznek ki a könyvtárból, és adjuk meg a 68. hónap során kivett könyvek számának szórását.

   (b) Közelítsük nagy k esetén annak a valószínűségét alkalmas approximációval, hogy a k-adik hónapban legalább 3 könyvet vesznek ki.

Megoldás.

(a) (10 pont)
(0 pont) Jelölje X a 68. hónapban kivett könyvek számát (1 pont) Észreveszi, hogy X eloszlása binomiális,
(1 pont) $n(= 3k = 3 \cdot 68) = 204$ és $p(= 1/k) = 1/68$ paraméterekkel (ha annyit ír, hogy $X \sim \mathrm{B}(204; 1/68)$, az elég).
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \geq 3)$
(1+1 pont) $= (1 - \mathbb{P}(X < 3)) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2)$ (ha a későbbi számolásból ez impliciten kiderül, az is elég – 1 pont a komplementer valószínűségre, 1 pont a helyes kivonandó értékekre)
(1+1+1 pont) $= 1 - \binom{204}{0}(1 - 1/68)^{204} - \binom{204}{1}(1/68)^1(1 - 1/68)^{203} - \binom{204}{2}(1/68)^2(1 - 1/68)^{202}$.
(Természetesen szabad a $\binom{204}{0}$-s szorzót elhagyni és a $\binom{204}{1}$ helyett 204-t írni, a $\binom{204}{2}$ helyett pedig $204 \cdot 203/2$-t.)
(1 pont) $= 0,5785$.
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X)(= np(1 - p)) = 204 \cdot \frac{1}{68} \cdot \frac{67}{68} = \frac{201}{68}(\approx 2{,}9559)$,
(1 pont) tehát $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} \approx 1{,}7193$. (Összevonható egy formulába az előzővel.)

(b) (10 pont)
(1 pont) arra az ötletre, hogy Poisson-approximációról (a binomiális eloszlás Poisson-approximációjáról) van szó, még ha nem is jól csinálja a továbbiakban.
(1 pont) Itt n-nek $3k$ felel meg
(1 pont) és p_n-nek $1/k$, (ha a következő lépés jó, akkor erre a kettőre is jár pont)
(1 pont) tehát $\lambda = \lim_{k\to\infty} 3k \cdot \frac{1}{k}$ (1 pont) $= 3$.
(0 pont) A keresett (approximálandó) valószínűség ismét $\mathbb{P}(X \geq 3)$,

(1 pont) amit $\mathbb{P}(Y \geq 3)$-mal közelítünk, ahol $Y \sim \text{Pois}(3)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(Y \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(Y < 3)$
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2)$ (az előző lépéssel összevonható)
(2 pont) $= 1 - \mathrm{e}^{-3}(1 + 3 + \frac{3^2}{2})$ (még ez is összevonható az előző lépéssel, ha jól azonosíthatóan külön kezeli az Y három releváns értékét)
(1 pont) $= 0{,}5768$.

4. Buszra várunk, a busz érkezési ideje folytonos, örökifjú eloszlást követ. Feltéve, hogy már öt percig várakoztunk, kétszer annyi annak a valószínűsége, hogy még ezután is legalább öt percig kell várnunk, mint azé, hogy ennek az ellenkezője következik be.

   (a) Várhatóan hány perc múlva érkezik meg a busz?

   (b) Egy adott naptól kezdve mindennap várunk a buszra, a fenti feltételek mindennap teljesülnek, a várakozási idők pedig a különböző napokon egymástól függetlenek. Várhatóan hányadik napon kell először legalább fél órát várakoznunk?

Megoldás.

(a) (13 pont)
(0 pont) Jelölje X a buszra való várakozás időtartamát (percben mérve), ekkor $\mathbb{E}(X)$-et keressük.
(1 pont) arra, hogy ha X folytonos és örökifjú, akkor exponenciális eloszlású (és az eloszlás $\lambda > 0$ paraméterét kellene meghatározni).
(2 pont) A feladat szerint $\mathbb{P}(X \geq 10 | X \geq 5) = 2\mathbb{P}(X < 10 | X \geq 5)$. (Ha azt írja, hogy $\mathbb{P}(X \geq 10 | X > 5) = 2\mathbb{P}(X < 10 | X > 5)$, az ugyanolyan jó, a feladatból bármelyik következhet, de az eloszlás folytonossága miatt mindegy is.)
(2 pont) Az örökifjúság miatt $\mathbb{P}(X \geq 10 | X \geq 5) = \mathbb{P}(X \geq 5)$,
(1 pont) ami a folytonosság miatt megegyezik $\mathbb{P}(X > 5)$-tel (elég, ha ez a későbbi számításokból impliciten kiderül).
(2 pont) Így $\mathbb{P}(X < 10 | X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X \geq 10 | X \geq 5) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \geq 10 | X \geq 5)$ (az első lépés azért igaz, mert $A \mapsto \mathbb{P}(A | X \geq 5)$ egy valószínűségi mérték $\mathcal{F}$-en, de nem várjuk el, hogy ezt odaírják, csak azt, hogy jól használják, így további indoklás nem szükséges).
(1 pont) Tehát $\mathbb{P}(X > 5) = 2/3$,
(1 pont) vagyis $\mathrm{e}^{-5\lambda} = 2/3$,
(1+1 pont) tehát $\lambda = \frac{1}{5}\ln(3/2)$ (avagy $\lambda = -\frac{1}{5}\ln(2/3)$). (1 pont a helyes végeredményre, 1 arra, hogy valahogy átalakítja – elég egy közbülső lépés, nem kell részletesen, nem kell kiírni, hogy az exp./log. függvény szigorú monotonitását használjuk.)
(1 pont) Ebből következik, hogy $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda = 5/\ln(3/2) \approx 12{,}33$ perc a keresett várakozási idő.

(b) (7 pont)
(2 pont) Jelölje Y azon nap sorszámát, amikor először kell legalább fél órát várakoznunk. Ekkor Y geometriai eloszlású,
(1 pont) az eloszlás paramétere pedig $p = \mathbb{P}(X \geq 30)$
(1 pont) $= \mathrm{e}^{-30\lambda}$. (Ha $\mathbb{P}(X \geq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ vagy $\mathbb{P}(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ az a) megoldásában már szerepel, akkor ezt a pontot meg lehet adni.)
(1 pont) $= 64/729 = 0{,}0878$ (jó tizedes és bármilyen közönséges tört alakban is, az eloszlásfüggvény folytonosságára nem jár még egyszer pont.).
(1 pont) Ezért $\mathbb{E}(Y) = 1/p$
(1 pont) $= 729/64 = 11{,}390625$.

5. Egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 < x < 1/2, \\ \frac{1}{4}, & \text{ha } 1/2 \le x \le 2, \\ \frac{(x-1)^2}{4}, & \text{ha } 2 < x < 3, \\ 1, & \text{ha } x \ge 3. \end{cases}$$

(a) Igazoljuk, hogy X folytonos valószínűségi változó.

(b) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét.

(c) Határozzuk meg X várható értékét.

Megoldás.

(a) (6 pont)
1. (legcélszerűbb) megoldás:
(2 pont) Az előadáson tanult tétel szerint ha F_X folytonos és véges sok pont kivételével differenciálható, akkor X folytonos val. változó. (Ebből nem lehet részpontszámot adni, a részben helyes megoldásokról lejjebb lesz szó.)
(1 pont) arra, hogy megindokolja, hogy a szakaszhatárokat kivéve (vagy: konkrétan kifejezett nyílt intervallumokban) az eloszlásfüggvény folytonos, pl. mert folytonos függvények kompozíciója, vagy mert (szakaszonként) polinom stb. Ha csak a konstans szakaszokon való folytonosságot nem indokolja, azért nem vonunk le pontot.
(1+1 pont) összesen arra, hogy a folytonosság a szakaszhatárokon is teljesül, ugyanis $\lim_{x\to 1/2} x/2 = \lim_{x\to 2}(x-1)^2/4 = 1/4$ és $\lim_{x\to 0} x/2 = 0$, $\lim_{x\to 3}(x-1)^2/4 = 1$: 1 pont összesen a belső konstans szakasz határára és 1 pont összesen a külső határokra. (Ha nem szerepel az összes ilyen részletesen leírva, de látszik, hogy elgondolkodott rajta, hogy a folytonosságnak minden szakaszhatáron teljesülnie kell és a középső konstans szakasz mindkét végpontjában 1/4-nek kell lennie, akkor az is elég. Az se baj, ha nem határértékekkel írja, hanem a függvényértékeket behelyettesíti a szakaszhatár pontokba.)
(1 pont) arra, hogy a szakaszhatárok kivételével az eloszlásfüggvény mindenhol differenciálható (mert differenciálható függvények kompozíciója, vagy odaírja, hogy mi a derivált, lásd b) rész – azért megint ne vonjuk le az 1 pontot, ha csak a konstans szakaszokat felejti ki).

2. megoldás:
(2 pont) Egy valószínűségi változó (definíció szerint) pontosan akkor folytonos, ha létezik olyan f_X (sűrűség)függvény, amelyre $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$, minden $x \in \mathbb{R}$-re.
(1 pont) arra az ötletre, hogy ennek az f_X-nek az eloszlásfüggvény deriváltjának kell lennie a szakaszhatárokon kívül.
Sajnos innentől kezdve ez a megoldás bonyolultabb, mint az előző, mert azt is ellenőrizni kell, hogy ha a kapott f_X-et $-\infty$-től x-ig visszaintegráljuk, akkor tényleg $F_X(x)$-et kapjuk, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
(1 pont) összesen a derivált meghatározására, legalább a nemkonstans szakaszokon.
(2 pont) arra, hogy ellenőrzi (szakaszonként, és itt a konstans szakaszok kifelejtése esetén is vonjunk le legalább egy pontot), hogy $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. A számításokat itt nem részletezzük, mert ez nem a legjobb megoldás, lentebb a (b) megoldásánál szerepel a sűrűségfüggvény, azt kell integrálni $-\infty$-től x-ig.
Megjegyzés: Ha a deriváltat nem számolja ki, de részletesen indokolja, hogy F_X miért differenciálható véges sok pont kivételével minden pontban (viszont hiányzik az előadásbeli tétel és/vagy F_X folytonosságát nem vizsgálja meg), akkor max. 4 pont: a derivált meghatározása helyett a differenciálhatóság indoklására adhatunk itt egy pontot.

(b) (5 pont) – ha az eloszlásfüggvényt már korábban deriválta, az ott kiszámítottakat vegyük itt is (további pontokért) figyelembe.
(1 pont) A sűrűségfüggvény megkapható úgy, hogy az eloszlásfüggvényt deriváljuk, ahol pedig nem differenciálható, oda 0-t írunk. (Ha ez impliciten vagy csak az a) megoldásából derül csak ki, az is rendben van. A 0 helyett természetesen írhatunk mást, a következőkben megadott képletektől csak a szakaszhatárokon eltérő képleteket is elfogadjuk.)
(2 pont) Így tehát $f_X(x) = 0$, ha $x \leq 0$, $1/2 \leq x \leq 2$ vagy $x \geq 3$ (ebből 1 pont jár a két szélső és 1 pont a középső konstans szakaszra).
(1 pont) Ezenkívül $f_X(x) = \frac{1}{2}$, ha $0 < x < 1/2$
(1 pont) és $f_X(x) = \frac{x-1}{2}$, ha $2 < x < 3$.

(c) (9 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x$
(2 pont) $= \int_0^{1/2} \frac{x}{2} \mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{x(x-1)}{2} \mathrm{d}x$. (Ha ez helyes, akkor az előző lépésre is meg lehet adni az 1 pontot.)
(1 pont) $\int_0^{1/2} \frac{x}{2} \mathrm{d}x = [\frac{x^2}{4}]_0^{1/2}$
(1 pont) $(= 1/16 - 0) = 1/16 (= 0{,}0625)$.
(2 pont) $\int_2^3 \frac{x(x-1)}{2} \mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{x^2-x}{2} \mathrm{d}x = [\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2]_2^3$ (részpontszám adható)
(1 pont) $(= \frac{9}{2} - \frac{9}{4} - \frac{4}{3} + 1) = \frac{23}{12} (= 1{,}9167)$.
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(X) (= 1/16 + 23/12) = 95/48 (= 1{,}9792)$.

6. * Az $(1/2, 0)$ és $(1, 0)$ pontok közötti szakaszon találomra választunk egy A pontot, egy B pontot pedig ettől függetlenül, szintén egyenletes eloszlással az origó és a $(0, 1)$ pont közötti szakaszon. Jelölje X az ABO szög tangensét. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

Megoldás.
(0 pont) Jelöljük a-val az A pont origótól való távolságát (vagyis az A pont x koordinátáját) és b-vel a B pont origótól való távolságát (vagyis a B pont y koordinátáját).
(1 pont) Az ABO szögnek, amit itt a mintamegoldásban az egyszerűség kedvéért α-val fogunk jelölni, a tangense $X = a/b$.
(1 pont) Mivel $a \in (1/2, 1)$ és $b \in (0, 1)$, $\mathrm{Ran}(X) = (1/2, \infty)$ (elég, ha ez később implicit módon kiderül).
(1 pont) Ezért $F_X(t) = \mathbb{P}(X < t)$, (ez elég, ha implicit módon kiderül valamikor a megoldás során)
(1 pont) ami 0-val egyenlő, ha $t \leq 1/2$. (Ezt ki lehet hozni később a geometriai valószínűségi mezős számításokból is.)
(2 pont) Ha $t > 1/2$, akkor $F_X(t) = \mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}(a/b < t) = \mathbb{P}(b > a/t)$.
(1 pont) A véletlen kísérlet megfelel egy véletlen (a, b) pont választásának (kétdimenziós egyenletes eloszlással) az $(1/2, 1) \times (0, 1)$ (nyílt) téglalapon. (Elég, ha ez később implicit módon derül ki; ugyanez vonatkozik a következő négy részre is, itt a pontozás elve nagyon hasonló a zh 1. feladatáéhoz.
Azért ide írom ezt a megoldásban és nem az F_X kiszámításának kezdete elé, hogy hangsúlyozzam, hogy a fenti pontokat akkor is meg lehet kapni, ha nincs meg a megfelelő valószínűségi mező.)
(1 pont) Ez a téglalap az Ω eseménytér.
(2 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség $= \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_\Omega}$.
(1 pont) $T_\Omega = 1/2$.
(1 pont) A kedvező terület az Ω téglalapnak a $b = a/t$ egyenes fölé eső része.
($t \leq 1/2$ esetén az egyenes az Ω nyílt téglalapot nem metszi – ezt akkor kell odaírni, ha korábban nem számolta ki, hogy $F_X(t) = 0$, ha $t \leq 1/2$, erre 1 pont jár.)

(2 pont) $1/2 < t < 1$ (vagy $1/2 < t \leq 1$) esetén az egyenes a téglalapot a bal oldalán, az $(1/2, 1/(2t))$ pontban és a felső oldalán, a $(t, 1)$ pontban, míg $t > 1$ (vagy $t \geq 1$) esetén a bal oldalán, szintén az $(1/2, 1/(2t))$ pontban és a jobb oldalán, az $(1, 1/t)$ pontban metszi. ($t = 1$ esetén a két esetre vonatkozó nem bal oldali metszéspontok így egybeesnek és $(1, 1)$-gyel egyeznek meg, de ezt nem kell hangsúlyozni.)
(Ha nincsenek meg a metszéspontok, de az megvan, hogy van egy esetszétválasztás a metszett oldalak szerint $1/2 < t < 1$ és $t > 1$ között, arra jár 1 pont. Ha a későbbi számításokból vagy ábrákból a metszéspontok/releváns metszett oldalhosszak is kiderülnek, akkor meg lehet adni a másik pontot is.)
(2 pont) Jó ábra (és megfelelő jelmagyarázat esetén erre is meg lehet adni az előző 2 pontot a szöveges magyarázat helyett, az ott leírt részpontszám-szabály alapján. Ha a metszéspontok/releváns szakaszhosszak nincsenek odaírva az ábrába, de máshonnan kiderülnek, az nem baj. Sőt ha nincs ábra, de szövegesen minden le van írva, ami az ábrából derülhetne ki, az is OK.).
(1 pont) Innen $1/2 \leq t < 1$ esetén $(F_X(t) =)\mathbb{P}(b > a/t) = 2((1 - 1/2t) \cdot (t - 1/2) \cdot 1/2)$
(1 pont) $= t - 1 + \frac{1}{4t}$.
(1 pont) Továbbá $t \geq 1$ esetén $(F_X(t) =)\mathbb{P}(b > a/t) = 2 \cdot ((1 - 1/t) \cdot 1/2 + (1/t - 1/(2t)) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})$.
(Máshogy is ki lehet számolni a kedvező trapéz területét.)
(1 pont) $= 1 - \frac{3}{4t}$.

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X = k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$p,\ 1 - p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n; p)$	$\{0, 1, ..., n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0, 1, ...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1, 2, ...\}$	$(1-p)^{k-1} p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Tudnivalók: A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. Hivatkozni csak az előadáson elhangzottakra lehet. A zárthelyi első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Vizsgadolgozat
Megoldás

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. (a) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és legyenek $C, D \in \mathcal{F}$ események. Milyen feltétel teljesülése esetén és hogyan definiáljuk, illetve hogyan jelöljük a C esemény D-re vett feltételes valószínűségét?

   (b) Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény. Az előadáson tanult állítás szerint milyen feltételek teljesülnek akkor és csak akkor, ha létezik olyan folytonos valószínűségi változó, amelynek f a sűrűségfüggvénye?

   1. feladat megoldása.
   (a) (3 pont) Akkor definiáljuk, ha $\mathbb{P}(D) > 0$,
   (2 pont) és $\mathbb{P}(C|D)$-vel jelöljük (ha helyesen szerepel ez a jelölés, akkor ez a 2 pont jár, de ha pl. $\mathbb{P}(D|C)$-t ír, akkor részpontszám nem jár),
   (5 pont) $\mathbb{P}(C|D) = \frac{\mathbb{P}(C \cap D)}{\mathbb{P}(D)}$ (részpontszám legfeljebb kis szintaktikai hiba esetén jár).
   (jegyzet 2.2.1. Definíció)
   (b) (4 pont) Ha f nemnegatív
   (6 pont) és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
   (Kisebb szintaktikai hibáknál 1-1 pont levonás. Ha viszont az integrálási határok rosszak vagy hiányoznak vagy változót ír az integrálási határok helyett, az már szemantikai hiba, ilyenkor összesen max. 2 pontot lehet adni.)
   Ha f_X-et vagy hasonlót ír valahova f helyett, összesen 1 pont levonás.
   (jegyzet 4.2.5. Állítás)

2. Karinthy Frigyes és Kosztolányi Dezső egy szép napon egymástól függetlenül feldob egy-egy szabályos pénzérmét, és aki fejet dob közülük, az elmegy a New York kávéházba (aki írást dob, az pedig nem megy oda). Kettejük közül aki nem megy el a kávéházba, az nem iszik kávét. Ha az egyikük elmegy a kávéházba, de a másikuk nem, akkor aki odamegy, az 1 kávét iszik meg. Ha pedig mindketten elmennek a kávéházba, akkor hosszasan beszélgetnek és fejenként 2 kávét is megisznak. Jelölje X a Karinthy és Y a Kosztolányi által megivott kávék számát.

(a) Határozzuk meg $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$-t minden olyan k, l valós számra, amelyre ez a valószínűség pozitív. (Lehet táblázatos formában, de a táblázatban szereplő 0 értékekért helyes válasz esetén sem jár pont.)

(b) Határozzuk meg Y-nak X-re vonatkozó regressziós egyenesét.
(*Tanács*: X és Y kovarianciájának kiszámítására járnak részpontok.)

(c) Független-e X és Y?

2. feladat megoldása.
(a) (5 pont)
(1+1 pont) $\mathbb{P}(X = Y = 2) = 1/4$ és $\mathbb{P}(X = Y = 0) = 1/4$,
(1 pont) mert... (valahogy megindokolja; elég, ha az szerepel, hogy $\{X = Y = 2\} = \{$mindketten fejet dobnak$\}$ vagy akár $\{X = Y = 2\} = \{$mindketten elmennek a kávéházba$\}$ és az $X = Y = 0$ esetén hasonlóan, a számolásokat nem kell részletezni, és most az sem baj, ha a kettő közül csak az egyiket indokolja meg, mert csak 1 pont jár rá).
(1 pont) $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 1/4$ és $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 1/4$ (ha csak az egyik van meg, akkor 1/2 pont és a feladat végén kerekítünk),
(1 pont) mert... (pl. $\{X = 1, Y = 0\} = \{$Karinthy fejet dob, Kosztolányi írást$\}$ vagy akár $\{X = 1, Y = 0\} = \{$Karinthy elmegy kávézni, Kosztolányi nem$\}$ és a másik eset hasonlóan; elég, ha az egyiket indokolja meg, mert most csak 1 pont jár rá).
(b) (13 pont)
(1 pont) A regressziós egyenes képlete $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = \beta x + \alpha\}$,
(1 pont) ahol $\beta = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)}$ és $\alpha = \mathbb{E}(Y) - \beta\mathbb{E}(X)$ (ha csak az egyik van meg, akkor 1/2 pont és a feladat végén kerekítjük a pontszámot).
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ (elég, ha ez impliciten derül ki a megoldásból).
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = (0 \cdot \mathbb{P}(X = 0)+)1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2)$
(1 pont) $= 1/4 + 2 \cdot 1/4 = 3/4$ (az a) feladat alapján; nem kell ennél részletesebben indokolni. Ha csak végeredmény van vagy a számolás jó, de a végeredmény rossz, akkor 1/2 pont és a végén kerekítjük).
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 4 \cdot \mathbb{P}(X = 2) = \frac{5}{4}$
(1 pont) és ezért $\mathbb{D}^2(X)(= \frac{20-9}{16}) = \frac{11}{16}(= 0{,}6875)$.
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ a szimmetria miatt/azért, mert X és Y azonos eloszlásúak (ez a pont jár indoklás nélkül is. Ha $\mathbb{E}(X)$-et rosszul számolja ki és $\mathbb{E}(Y)$-ra ugyanazt az értéket adja meg, akkor csak abban az esetben jár ez a pont, ha expliciten kimondja vagy megindokolja, hogy a két szórás egyenlő, nem csak random beírja ugyanazt a számot).
(1 pont) Valahogy leírja, hogy XY pontosan akkor nem 0, ha $X = Y = 2$, és ekkor $XY = 4$,
(1 pont) emiatt $\mathbb{E}(XY) = 4\mathbb{P}(X = Y = 2) = 1$. (Az is jó persze, ha több 0 taggal végigszámolja $\mathbb{E}(XY)$-t.)
(1 pont) Tehát $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
(1 pont) $(= 1 - (\frac{3}{4})^2) = \frac{7}{16}$, ezért $\beta(= \frac{1}{11/7}) = 7/11(= 0{,}\dot{6}\dot{3} \approx 0{,}6364)$ (ha a kovariancia jó, de utána β-t elszámolja, akkor 1/2 pont és a feladat végén kerekítünk).
(1 pont) és $\alpha = 3/4 - \frac{7}{11} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{11}(= 0{,}\dot{2}\dot{7} \approx 0{,}2727)$.
(0 pont) Vagyis a regressziós egyenes $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = \frac{7}{11}x + \frac{3}{11}\}$.
(c) (2 pont)
Önmagában arra az állításra, hogy nem függetlenek, nem jár pont.
(1 pont) Nem függetlenek, mert... (valahogy megindokolja; ez a pont akkor is jár, ha van indoklás, de rossz).
(1 pont) arra, hogy azért nem függetlenek, mert a kovarianciájuk nem 0. Lehet máshogy is indokolni (pl. $\mathbb{P}(X = Y = 1) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$), de akkor is csak 1 pont jár az indoklásra.

3. Egy elképzelt vasútvonalon minden reggel 8-kor indul egy vonat az egyik végállomásról, amely

minden nap a többi naptól függetlenül 1/4 valószínűséggel késik. 200 egymást követő napon megvizsgáljuk, hogy késik-e a vonat, legyen X azon napok száma a 200 nap közül, amikor késik a vonat.

(a) Milyen eloszlású X és milyen paraméterrel/paraméterekkel? Határozzuk meg X várható értékét és szórását.

(b) Becsüljük meg alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy a 200 nap közül legfeljebb 42 napon késik a vonat. (A valószínűség pontos értékének meghatározására itt nem jár pont!)

3. feladat megoldása.
(a) (5 pont)
(1 pont) X binomiális eloszlású
(1+1 pont) $n = 200$ és $p = 1/4$ paraméterekkel (ha csak annyit ír, hogy $X \sim \mathrm{B}(n; p)$, az is jó).
(1+1 pont) Tehát $\mathbb{E}(X) = (np =)50$ és $\mathbb{D}(X) = (\sqrt{np(1-p)}) = \sqrt{37{,}5}(\approx 6{,}1237)$. (Nem kell indokolni, mert benne van a nevezetes eloszlás táblázatban, de ha pl. a szórás helyett csak szórásnégyzetet ír és nem is indokol semmit, akkor 1 pont levonás.)
(b) (15 pont)
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \leq 42)$.
(1 pont) arra az ötletre, hogy a de Moivre–Laplace tételt/CHT-t kéne használni, még ha később nincs is jól implementálva.
(3 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}(X \leq 42) = \mathbb{P}\Big(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{42 - 50}{\sqrt{200 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}}\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq -\frac{8}{\sqrt{37{,}5}}(= -1{,}3064)\Big).$$

(1 pont) Ezt közelítjük $\mathbb{P}(Y < -1{,}3064)$-gyel, ahol $Y \sim \mathrm{N}(0; 1)$. (Elég, ha ez a következő lépésből derül ki.)
(2 pont) $\mathbb{P}(Y < -1{,}3064) = \Phi(-1{,}3064$ (ha később értelmesen számol, akkor nem muszáj a Φ jelölést használni)
(2 pont) $= 1 - \Phi(1{,}3064)$,
(2 pont) ahol az 1,3064-et a táblázatban szereplő legközelebbi értékre, 1,31-ra kerekítjük (ha ezt nem írja le expliciten, de a későbbiekben $\Phi(1{,}31)$-tel számol, akkor jár ez a két pont).
(2 pont) (A táblázat alapján) $\Phi(1{,}31) \approx 0{,}9049$,
(1 pont) tehát a keresett valószínűség (kb.) 0,0951.

4. Legyenek $X \sim \mathrm{Pois}(1)$ és $Y \sim \mathrm{Geo}(1/2)$ független valószínűségi változók. Legyen $Z := Y^2 \sin(X) + YX^3 - X$. Adjuk meg az $\mathbb{E}(Z|X)$ regressziót.
4. feladat megoldása.
(0 pont) $\mathbb{E}(Z|X) = \mathbb{E}(Y^2 \sin(X) + YX^3 - X|X)$
(2 pont) $= \mathbb{E}(Y^2 \sin(X)|X) + \mathbb{E}(YX^3|X) - \mathbb{E}(X|X)$,
(2 pont) mert... (megindokolja a feltételes várható érték/regresszió linearitásával. Ha csak „a linearitásra" vagy a várható érték linearitására hivatkozik, az akkor fogadható el, ha kiderül, hogy a feltételt nem hagyja el.)
(1+1+2 pont) $= \sin(X)\mathbb{E}(Y^2|X) + X^3\mathbb{E}(Y|X) - X$, (az utóbbi tagra azért 2 pont jár, mert ez valójában 2 lépés: $\mathbb{E}(X|X) = X\mathbb{E}(1|X)$ és $\mathbb{E}(1|X) = 1$, az utóbbi azért igaz, mert az 1 bármire vonatkozó feltételes várható értéke 1, avagy azért, mert az 1 bármitől független és ezért itt érvényes a következő lépés, de nem várjuk el sem a második lépés megindoklását, sem a két lépés különszedését)
(2 pont) mert... (valahogy hivatkozik a regresszió megfelelő tulajdonságára, általános képlettel, vagy taking out what is known. Ha jól csinálja, homogenitásnak is hívhatja)
(1+1 pont) $= \sin(X)\mathbb{E}(Y^2) + X^3\mathbb{E}(Y) - X$,

(2 pont) mert függetlenek (ha jól használja a függetlenséget, akkor nem kell külön megindokolni, hogy nemcsak Y független X-től, hanem Y^2 is).
(1 pont) (A nevezetes eloszlás táblázat alapján stb.) $\mathbb{E}(Y) = 2$
(2 pont) és $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2$
(2 pont) $= \frac{1-1/2}{(1/2)^2} + 2^2 = 6$ (megint csak a nevezetes eloszlás táblázat alapján; 1 pont a szórásnégyzetre és 1 pont a számolásra).
(1 pont) Így tehát a végeredmény $\mathbb{E}(Z|X) = 6\sin(X) + 2X^3 - X$.

5. Legyen $n \geq 1$ és legyenek $X_1, \ldots, X_n$ fae. valószínűségi változók, amelyek eloszlásfüggvénye

$$F_\vartheta(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\vartheta}, & \text{ha } x > 1, \\ 0, & \text{ha } x \leq 1, \end{cases}$$

ahol $\vartheta > 1$ egy ismeretlen paraméter.

(a) Határozzuk meg minden $\vartheta > 1$ rögzített paraméter esetén az f_ϑ sűrűségfüggvényt.

(b) A minta rögzített $x_1, \ldots, x_n$ realizációja esetén határozzuk meg a likelihood-függvény $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n)$ értékét.

(c) Adjunk a minta alapján maximum likelihood becslést ϑ-ra.
Megjegyzés: Bizonyos realizációk esetén a helyes becslés értéke nem lesz nagyobb 1-nél.

5. feladat megoldása.
(a) (4 pont)
(2 pont) arra, hogy $f_\vartheta(x) = F'_\vartheta(x)$, ha F_ϑ differenciálható x-ben és 0 különben. (Elég, ha impliciten derül ki, hogy ezt csinálja, de 1 pont a 0-s részre jár.)
(2+0 pont) Tehát $f_\vartheta(x) = \begin{cases} \vartheta x^{-\vartheta-1}, & \text{ha } x > 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$
(b) (5 pont)
(2 pont) $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\vartheta(x_i)$
(2 pont) $= \vartheta^n \prod_{i=1}^n x_i^{-\vartheta-1}$,
(1 pont) ahol $x_1, \ldots, x_n > 1$. (Arra az esetre, amikor valamelyik x_i legfeljebb 1, nem kell írni semmit, de az derüljön ki, hogy végiggondolta, hogy mikor lesz $x_1, \ldots, x_n$ realizáció.)
(c) (11 pont)
(1 pont) arra az ötletre, hogy a log-likelihood-függvénnnyel kellene dolgozni (még ha a folytatás nem is jó).
(1 pont) (Továbbra is $x_1, \ldots, x_n > 1$ esetén) $l_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \ln L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n)$
(2 pont) $= n \ln \vartheta + \sum_{i=1}^n (-\vartheta - 1) \ln x_i$.
(1 pont) arra, hogy a log-likelihood függvényt deriválja és megnézi, hogy a derivált hol 0, akkor is, ha nem jó a derivált. (Ezt az egy pontot meg lehet akkor is adni, ha a sima likelihoodfüggvényt deriválja és arról nézi meg, hogy hol 0, de ez persze nem túl célszerű megoldás.)
(2 pont) $\frac{\partial}{\partial\theta} l_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{\vartheta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i$
(1 pont) pontosan akkor 0, ha $\vartheta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$.
(2 pont) Ez valóban (szigorú) lokális maximumhely, mert $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0$ (bármely $\vartheta > 1$ esetén).
(0 pont) Mivel ez az egy lokális szélsőérték van, ez egyben globális maximum is, emiatt nem kell megvizsgálni a határt ($\vartheta = 1$) sem.
(0 pont) Tehát a maximum likelihood becslés a minta alapján $\vartheta_*(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$,
(1 pont) így a maximum likelihood becslés $\vartheta_*(X_1, \ldots, X_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$.

6. Legyen X egyenletes eloszlású a $(0, 2)$ intervallumon és X ismeretében Y egyenletes eloszlású a $(0, 1/X)$ intervallumon. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y < 1)$ valószínűséget.

6. feladat megoldása.
1. megoldás, folytonos TVT-vel.
(1 pont) arra az ötletre, hogy a folytonos TVT-t kellene használni (még akkor is, ha nem sikerül jól implementálni).
(2 pont) A folytonos TVT szerint $\mathbb{P}(Y<1)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{P}(Y<1|X=x)f_X(x)\mathrm{d}x$
(2 pont) $=\frac{1}{2}\int_0^2\mathbb{P}(Y<1|X=x)\mathrm{d}x$ (az előző lépéssel összevonható).
(3 pont) Ha $x\in(0,2)$, akkor $\mathbb{P}(Y<1|X=x)=\int_{-\infty}^{1}f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y=\int_0^1 f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y$ (a két lépés összevonható, nem muszáj leírni $-\infty$-nel),
(2 pont) valamint mivel (a feladat szövege szerint) X ismeretében $Y\sim(0;1/X)$, $f_{Y|X}(y|x)(=1/(1/x))=x$, ha $0<x<2$ és $0<y<1/x$,
(1 pont) és $f_{Y|X}(y|x)=0$ különben (ezt a pontot nem kell levonni, ha ezt nem írja ide, de konzisztensen csak a megfelelő tartományon integrál; már az előbb feltettük, hogy $x\in(0,2)$),
(2 pont) tehát ha $1/x<1$, vagyis $x>1$ (vagyis $1<x<2$), akkor $\mathbb{P}(Y<1|X=x)=1$ (ehhez nem kötelező integrált felírni),
(3 pont) és ha $1/x\geq 1$, vagyis $x\leq 1$ (vagyis $0<x\leq 1$), akkor $\mathbb{P}(Y<1|X=x)=\int_0^1 x\mathrm{d}y=x$.

Alternatív megoldásrészlet az utóbbi 11 pontra: kiszámoljuk az $F_{Y|X}(y|x)$ feltételes eloszlásfüggvényt, ami a feladat szövege szerint

$$F_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\notin(0,2) \text{ vagy } y\leq 0,\\ \frac{y}{x}, & \text{ha } 0<x<2 \text{ és } 0<y<1/x,\\ 1, & \text{ha } 0<x<2 \text{ és } y\geq 1/x,\end{cases}$$

és ebből kiolvassuk, hogy $\mathbb{P}(Y<1|X=x)=F_{Y|X}(1|x)$ micsoda. Az első esettel nem is muszáj foglalkozni, ha az $x\in(0,2)$ esetre szorítkozunk. Részpontok az előző megoldáshoz hasonlóan.

(1+1 pont) Vagyis $\mathbb{P}(Y<1)=\frac{1}{2}(\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2 1\mathrm{d}x)$
(1 pont) $=\frac{1}{2}[x^2/2]_0^1+1/2$
(1 pont) $=1/4+1/2=3/4$.
2. megoldás, a folytonos TVT megkerülésével.
(1 pont) $\mathbb{P}(Y<1)=\int_{-\infty}^{1}f_Y(y)\mathrm{d}y$
(1 pont) $=\int_0^1 f_Y(y)\mathrm{d}y$ (az előző lépéssel összevonható).
(0 pont) Tehát Y marginális sűrűségfüggvényét kellene meghatározni. (Vagy a marginális eloszlásfüggvényének értékét az 1 helyen.)
(1+1 pont) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^2 f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x$ $(y\in\mathbb{R})$ (a két lépés összevonható, nem muszáj $\pm\infty$-nel kiírni),
(2 pont) és $f_{X,Y}(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$ $(x\in\mathbb{R})$.
(2 pont) $f_X(x)=1/2$, ha $x\in(0,2)$ és 0 különben,
(2 pont) valamint mivel (a feladat szövege szerint) X ismeretében $Y\sim(0;1/X)$, $f_{Y|X}(y|x)(=1/(1/x))=x$, ha $0<x<2$ és $0<y<1/x$,
(1 pont) és 0 különben (ezt a pontot nem kell levonni, ha eleve úgy számol, hogy fel sem merül, hogy ebben az esetben szüksége lenne a feltételes sűrűségfüggvény értékére).
(2 pont) Vagyis $f_{X,Y}(x,y)=\frac{x}{2}$, ha $0<x<2$ és $0<y<1/x$
(0 pont) és 0 különben.
(3 pont) Innen $\mathbb{P}(Y<1)=\int_0^2\int_0^{\min\{1/x,1\}}\frac{x}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^1\frac{x}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_1^2\int_0^{1/x}\frac{x}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$
(1 pont) $=\int_0^1[yx/2]_{y=0}^1\mathrm{d}x+\int_1^2[yx/2]_{y=0}^{1/x}\mathrm{d}x$
(1 pont) $=\int_0^1 x/2\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{2}\mathrm{d}x$
(1 pont) $=[x^2/4]_0^1+[x/2]_1^2$
(1 pont) $=1/4+1-1/2=3/4$.
Mejegyzés: Látható, hogy ebben a 2. megoldásban esetenként kevesebb pont jár, mint az 1. megoldásban. Sajnos másként nem jön ki a 20 pont. Azért érdemes a folytonos TVT-t használni, mert az kevesebb munkával jár (másként fogalmazva egy adott lépésért több pont jár).

Vizsgadolgozat
Megoldás

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. (a) Legyen $k \in \mathbb{N}$. Milyen feltétel teljesülése esetén és hogyan definiáljuk egy X valószínűségi változó k-adik momentumát?

   (b) Legyen $n \in \mathbb{N}$, és legyen adott egy $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ n elemű fae. minta, ahol a mintaelemek eloszlása egy ismeretlen $\vartheta \in \theta \subseteq \mathbb{R}^d$ paramétertől függ, és legyen $\psi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ egy függvény. Legyen továbbá $T(\mathbf{X}) = T(X_1, \dots, X_n)$ a minta egy statisztikája.
   Mikor mondjuk azt (az előadáson elhangzott definíció szerint), hogy a $T(\mathbf{X})$ statisztika a $\psi(\vartheta)$ paraméterfüggvénynek

   (i) egy torzítatlan becslése, illetve

   (ii) egy aszimptotikusan torzítatlan becslése?

Megjegyzés: Az $\mathbb{E}$ és $\mathbb{E}_\vartheta$ jelöléseket az előadáson tanult módon használhatjuk, ezeket nem kell bevezetni, és nem kell megmagyarázni, hogy mit jelentenek.

Megoldás.

(a) (10 pont)

(5 pont) X-nek a k-adik momentuma $\mathbb{E}(X^k)$, (természetesen $\mathbb{E}[X^k]$ is jó, sőt $\mathbb{E}X^k$ is)

(5 pont) amit akkor definiálunk, ha $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty$.

(jegyzetkiegészítés 14.3.1. Definíció; a diasoron már a valszám résznél szerepelt a momentumok fogalma)

Ha $\mathbb{E}(X^k)$ vagy $\mathbb{E}(|X|^k)$ helyett a várható érték diszkrét vagy folytonos esetre vonatkozó ekvivalens definícióját írja le, akkor max. 3–3 pont mindkét résznél.

Ha viszont $\mathbb{E}(X^k)$-t vagy $\mathbb{E}(|X|^k)$-t a várható érték általános definíciójával fogalmazza meg (pl. $\mathbb{E}(X^k) = \sup_{Y \text{egyszerű},\ Y \le X} \mathbb{E}(Y^k)$, vagy ugyanez $\mathbb{E}(Y^k)$-t az egyszerű val. változók várható értéke szerint kifejtve), az jó.

Kisebb szintaktikai hibák esetén részpontszám adható. $\mathbb{E}(X)^k$-ra, illetve $\mathbb{E}(|X|)^k$-ra nem jár pont.

(b) (összesen 10 pont)

(i)
A torzítatlanság akkor teljesül, ha
(4 pont) $\mathbb{E}_\vartheta(T(X_1,\dots,X_n)) = \psi(\vartheta)$
(1 pont) minden $\vartheta \in \theta$-ra.
(ii)
Az aszimptotikus torzítatlanság akkor teljesül, ha
(4 pont) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\vartheta(T(X_1,\dots,X_n)) = \psi(\vartheta)$
(1 pont) minden $\vartheta \in \theta$-ra.
(jegyzetkiegészítés 14.1.1. Definíció (1) és (2) része)
$(X_1,\dots,X_n)$ helyett természetesen szabad $\mathbf{X}$-et írni a T argumentumában. Ne vonjunk le pontot, ha csak az nem világos, hogy X vastag vagy nem vastag betűs.
Ha $\mathbb{E}_\vartheta$ helyett csak $\mathbb{E}$-t ír, akkor a vonatkozó 4 pontból maximum 2 pont jár.

2. Egy elképzelt országban eladott gyufák 70%-a egy olcsó gyufákat gyártó cégtől származik, ezek 1/3-a használhatatlan. A maradék 30%-ot egy drágább gyufákat készítő vállalat gyártja, az általa készített gyufák közül tízből átlagosan egy használhatatlan.

   (a) Véletlenszerűen kiválasztva egy, az adott országban eladott gyufát, mi a valószínűsége, hogy az használhatatlan?

   (b) Véletlenszerűen kiválasztva egy, az adott országban eladott gyufát, jelölje X azt a valószínűségi változót, amelynek értéke 1, ha a gyufa használhatatlan és 0, ha használható. Jelölje továbbá Y azt a valószínűségi változót, amelynek értéke 2, ha ugyanezt a gyufát az olcsó gyufákat készítő cég gyártotta, és 1, ha a drágább gyufákat gyártó vállalat gyártotta. Határozzuk meg X és Y kovarianciáját, illetve X szórásnégyzetét.

Megoldás.
(a) (7 pont)
Jelöljük O-val azt az eseményt, hogy a kiválasztott gyufát az olcsóbb gyufákat gyártó cég gyártotta és D-vel azt az eseményt, hogy a drágább gyufákat gyártó cég gyártotta. Jelöljük továbbá H-val azt az eseményt, hogy a kiválasztott gyufa használhatatlan. (Nem szükséges persze ezekre az eseményekre jelölést bevezetni.)
(1 pont) arra, hogy legalább minimális indoklást ad arra, hogy a TVT feltételei teljesülnek (elég további magyarázat nélkül arra hivatkozni, hogy O és D teljes eseményrendszert alkotnak).
(1 pont) A teljes valószínűség tétele szerint
(2 pont) $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H|O)\mathbb{P}(O) + \mathbb{P}(H|D)\mathbb{P}(D)$
(1+1 pont) $\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}$
(1 pont) $= \frac{79}{300}$ (jó tizedestört alakban, kerekítve is).
(b) (13 pont)
(1 pont) $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, (elég, ha később kiderül, hogy ezen képlet alapján számol)
(2 pont) ahol $\mathbb{E}(XY) = 2\mathbb{P}(X=1,Y=2) + \mathbb{P}(X=1,Y=1)$ (persze nem baj, ha a 0-s tagokat is odaírja, de azokra nem jár pont)
(1 pont) $= \mathbb{P}(O\cap H) + \mathbb{P}(D\cap H)$ (ezt nem kell ilyen expliciten kimondani, de a következő pontnál szereplő $\frac{7}{30}$ és $\frac{3}{100}$ valószínűségek eredetére kell valami apró magyarázat, akár az a) megoldásának részleteire hivatkozva)
(1 pont) $= 2\cdot\frac{7}{30} + 1\cdot\frac{3}{100}$
(1 pont) $= \frac{149}{300}$ (jó tizedestört alakban, kerekítve is),
(1 pont) továbbá $\mathbb{E}(X) = \frac{79}{300}$,
(1 pont) mert... (itt vagy ki kell számolni, nagyon részletes indoklás nem kell; vagy arra kell hivatkozni, hogy X egy indikátorváltozó, ekkor ki lehet olvasni a táblázatból, hogy a várható értéke a vonatkozó esemény valószínűsége),
(1 pont) és $\mathbb{E}(Y) = 2\cdot\frac{7}{10} + 1\cdot\frac{3}{10}$

(1 pont) $= \frac{17}{10}$.
(1 pont) Tehát $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{149}{300} - \frac{1343}{3000} = \frac{147}{3000} = \frac{49}{1000} (= 0{,}049)$ (ha a kovariancia általános képlete már szerepelt, akkor itt nem jár pont a részletszámításokra, csak a végeredményre. Ha nem szerepelt, de itt az alapján számolt, akkor a fenti 1 pontot itt utólag meg lehet adni).
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \frac{79}{300} \cdot (1 - \frac{79}{300}) = \frac{17459}{90000} = 0{,}19398\dot{} \approx 0{,}1940$ (jó végtelen szakaszos tizedestört alakban, kerekítve és közönséges tört alakban is)
(1 pont) mert... (itt vagy ki kell számolni $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ alapján, ahol az jön ki, hogy $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X)$, hiszen indikátorváltozóról van szó, nagyon részletes indoklás nem kell; vagy arra kell hivatkozni, hogy X egy indikátorváltozó, ekkor ki lehet olvasni a táblázatból, hogy a várható értéke a vonatkozó esemény valószínűsége).

3. Egy csendes-óceáni szigeten gyakran fordulnak elő tájfunok. Egy bizonyos év kezdetétől fogva (korlátlan ideig) megfigyeljük a szigeten bekövetkező tájfunokat.

   (a) Az adott év alatt bekövetkező tájfunok számát egy Poisson-eloszlású X valószínűségi változóval modellezzük, és e^{-1} annak a valószínűsége, hogy az adott évben egyáltalán nem fordul elő tájfun. Mi a valószínűsége, hogy az adott évben legalább 3 tájfun fordul elő?

   (b) A megfigyelés kezdetétől az azt követő első tájfun bekövetkezéséig eltelő időt egy folytonos, örökifjú eloszlású valószínűségi változó írja le, amelyre

   $$\mathbb{P}(Y > 1) = \mathbb{P}(X = 0)$$

   teljesül. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y > 11 | Y > 5)$ feltételes valószínűség értékét és az $\mathbb{E}(Y^2)$ várható értéket.

(a) (9 pont)
(0 pont) Először a Poisson-eloszlás λ paraméterét kívánjuk meghatározni.
(1 pont) (A feladat szövege szerint) $\mathbb{P}(X = 0) = \mathrm{e}^{-1}$
(1 pont) $= \mathrm{e}^{-\lambda}$ (persze az is jó, ha $(\lambda^0/0!) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$-t ír)
(1 pont) tehát $\lambda = 1$.
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \geq 3)$
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X < 3)$
(2 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2)$ (az előző lépéssel összevonható)
(2 pont) $= 1 - \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} - \frac{1^2}{2!}\mathrm{e}^{-1} = 1 - 2{,}5 \cdot \mathrm{e}^{-2} (\approx 0{,}0803)$ (ebből 1 pont a helyes végeredményre, nem baj, ha csak tizedestört alakban vagy csak képlettel szerepel. 1 pont arra, hogy van legalább valami minimális indoklás; az nem baj, ha a $\frac{1^2}{2!}$ helyett csak 1/2 szerepel, de legyen visszakövethető, hogy melyik tag értéke mennyi).
(b) (11 pont)
(1 pont) arra, hogy ha Y eloszlása folytonos és örökifjú, akkor csak exponenciális lehet (és a paraméterét kellene meghatározni, amit itt μ-vel fogunk jelölni, mivel a λ jelölés már foglalt. Ha ezt is λ-val jelöli, azért ne vonjunk le pontot, de annak ki kell derülnie, hogy *a priori* nem egyértelmű, hogy ez a ráta ugyanaz, mint a Poisson-eloszlás paramétere, hanem majd a számításokból jön ki).
(1 pont) $\mathbb{P}(Y > 1) = \mathrm{e}^{-\mu}$ (itt az adható pontok alacsony száma miatt kivételesen nem várunk el részletes indoklást arra, hogy $\mathbb{P}(Y > 1) = \mathbb{P}(Y \geq 1)$)
(1 pont) és $\mathbb{P}(X = 0) = \mathrm{e}^{-1}$,
(1 pont) tehát $\mu = 1$.
(1 pont) Az örökifjúság miatt
(1 pont) $\mathbb{P}(Y > 11 | Y > 5) = \mathbb{P}(Y > 6)$
(1 pont) $= \mathrm{e}^{-6 \cdot 1} = \mathrm{e}^{-6}$ (itt sem várunk el arra indoklást, hogy $\mathbb{P}(Y > 6) = \mathbb{P}(Y \geq 6)$)
(0 pont) $(= 0{,}0025)$.
(2 pont) $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{D}^2(Y) + \mathbb{E}(Y)^2$

(1+1 pont) $= 1/1^2 + 1/1^2$ (a táblázat alapján, ezért nem kell indokolni, a négyzeteket természetesen el lehet hagyni)
(0 pont) $= 2$.

4. Egy falu futballcsapata egy bajnokság minden mérkőzésén a többi mérkőzéstől (együttesen) függetlenül 1/3 valószínűséggel nyer, 1/3 valószínűséggel játszik döntetlent és 1/3 valószínűséggel veszít. A labdarúgásban megszokott szabályok szerint minden győzelem 3 pontot, minden döntetlen 1 pontot és minden vereség 0 pontot ér.

   (a) Jelölje Y a csapat által egy adott mérkőzésen megszerzett pontok számát. Határozzuk meg Y szórásnégyzetét.

   (b) Jelölje X a csapat által 20 egymást követő mérkőzésen elért pontok számának összegét. Közelítsük a $\mathbb{P}(X \geq 20)$ valószínűséget alkalmas approximációval. (A valószínűség pontos értékének meghatározására itt nem jár pont.)

Megoldás.
(a) (6 pont)
(1 pont) $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$,
(1 pont) ahol $\mathbb{E}(Y) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}$
(1 pont) $= \frac{4}{3}$,
(1 pont) $\mathbb{E}(Y^2) = 9 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}$
(1 pont) $= \frac{10}{3}$,
(1 pont) tehát $\mathbb{D}^2(Y) = \frac{10}{3} - \frac{16}{9} = \frac{14}{9}$ (itt már csak a végeredményre jár pont, viszont ha a szórásnégyzet fenti általános képlete hiányzik, de itt az alapján számol, akkor azt a pontot utólag meg lehet adni).
(b) (14 pont)
(1 pont) arra az ötletre, hogy a CHT-t kellene használni. Ez jár akkor is, ha ez a későbbiekben nem sikerül, feltéve, hogy kiderül, hogy az általános CHT-ról és nem a de Moivre–Laplace-tételről van szó.
(1 pont) arra, hogy valamit mond arról, hogy miért lehet a CHT-t alkalmazni, pl. hogy az X valószínűségi változó 20 darab független, azonos eloszlású val. változó összege, amik az egyes meccsek pontszámai. Ezt nem kell nagyon formálisan és részletesen, de ha fölírja képlettel, hogy X ilyen val. változók összege, az elég, és ebben az esetben ezért az 1 pontért még a függetlenséget sem kell hangsúlyozni.
(4 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}(X \geq 20) = \mathbb{P}\Big(\frac{X - 20 \cdot \frac{4}{3}}{\sqrt{20}\sqrt{\frac{14}{9}}} \geq \frac{20 - 20 \cdot \frac{4}{3}}{\sqrt{20}\sqrt{\frac{14}{9}}}\Big),$$

(Nem kell fölírni általános $n\mathbb{E}(X_i)$-vel és $\sqrt{n}\mathbb{D}(X_i)$-vel, ahol az X_i-k az egyes meccsek pontszámai, de annak ki kell derülnie a megoldásból, hogy a sztenderdizálás során mit vonunk le, majd mivel osztunk. Ha viszont rossz numerikus értékek szerepelnek $n\mathbb{E}(X_i)$-nél és $\sqrt{n}\mathbb{D}(X_i)$-nél, akkor részpontszám csak akkor adható, ha szerepel az általános képlet is valamilyen elfogadható formában.)
(3 pont) amit $\mathbb{P}(Y \geq \frac{20-20\cdot\frac{4}{3}}{\sqrt{20}\sqrt{\frac{14}{9}}}) \approx \mathbb{P}(Y \geq -1{,}1952)$-vel közelítünk, ahol $Y \sim \mathrm{N}(0;1)$ (ebből 2 pont a standard normálissal való közelítésre, 1 pont a jobb oldal numerikus értékének kiszámítására, amit szabad ennél előbb vagy ennél később is megtenni, de előbb-utóbb szükség lesz rá, hogy ki lehessen olvasni valamit a táblázatból)
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(Y < -1{,}1952)$
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(Y > 1{,}1952)$
(1 pont) $\Phi(1{,}1952)$ (itt nem jár külön pont arra, hogy $\mathbb{P}(Y > ...) = \mathbb{P}(Y \geq ...)$, csak arra, hogy Φ-s alakra hozzuk a keresett valószínűséget. A Φ jelölés sem kötelező. Természetesen más

sorrendben is el lehet jutni ehhez az alakhoz, pl. $\mathbb{P}(Y \geq ...) = 1 - \mathbb{P}(Y \geq -...) = \mathbb{P}(Y < -...) = \Phi(-...)$)
(1 pont) $\approx \Phi(1{,}20)$ (ha az 1,1952 numerikus érték sehol nem szerepel, de az 1,20 már igen, az is OK)
(1 pont) $\approx 0{,}8849$ (a táblázat alapján).
Ha a de Moivre–Laplace tételt akarja használni (pl. úgy, hogy a győzelmeket akarja megszámolni, vagy a győzelmek és döntetlenek számának összegét), akkor a b) részben maximum 5 pont.

5. Legyen az X és az Y valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} -4x\mathrm{e}^{-2y}, & \text{ha } y > 0 \text{ és } -1 < x < 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}.$$

(a) Független-e X és Y?

(b) Milyen eloszlású Y és milyen paraméterrel?

(c) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

(a) (13 pont)
(2 pont) X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén (mivel (X,Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó; ezt nem muszáj odaírni. Részpontszám adható például, ha kifelejti, hogy ez minden x, y-ra igaz, de amúgy a képlet jó).
(2 pont) Ha $-1 < x < 0$, akkor $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} -4x\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y$ (a két lépés összevonható)
(0 pont) $= -4x\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y$
(1 pont) $= -4x\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2y}\right]_{y=0}^{\infty}$
(1 pont) $= -4x \cdot (0 + 1/2) = -2x$,
(1 pont) és ha $x \leq -1$ vagy $x \geq 0$, akkor $f_X(x) = 0$ (ezt nem kell részletesebben indokolni).
(2 pont) Ha $y > 0$, akkor $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} -4x\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}x$ (a két lépés összevonható)
(0 pont) $= -\mathrm{e}^{-2y}\int_{-1}^{0} 4x\mathrm{d}x$
(1 pont) $= -\mathrm{e}^{-2y}\left[2x^2\right]_{-1}^{0}$
(1 pont) $= -\mathrm{e}^{-2y} \cdot (0 - 2) = 2\mathrm{e}^{-2y}$,
(1 pont) és ha $y \leq 0$, akkor $f_Y(y) = 0$ (ezt sem kell részletesebben indokolni).
(1 pont) arra a következtetésre, hogy $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ az eddigiek alapján minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, és így X és Y független (nem szükséges további indoklás).
Részpontszámok részben jó megoldásokra:

- Ha az megvan, hogy $f_{X,Y}(x,y)$ pontosan azokra az (x,y)-okra 0, amelyekre $f_X(x)f_Y(y) = 0$, arra jár 2 pont, akár indoklás nélkül is.
- Ha szerepel, hogy függetlenek, azért önmagában még nem jár pont, de ha van valamilyen (akár rossz) indoklás is rá, akkor legalább 1 pont jár.
- Ha azt mutatja meg, hogy $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, az is jó, de ezt a megoldási lehetőséget itt nem részletezzük (tovább tart, mint a fenti mintamegoldás).
- Ha tudja a függetlenség kritériumát, és utána valami olyasmire hivatkozik, hogy a $-4x\mathrm{e}^{-2y}$ egy csak x-től függő és egy csak y-tól függő mennyiség szorzata, és ezért függetlenek, arra (az első 2 ponton felül) csak 4 pont jár, mert lehetne olyan is $f_{X,Y}$, hogy maga a képlet szorzatra bomlik, de szakaszonként van definiálva és az X-re és az Y-ra vonatkozó szakaszhatárok függenek egymástól. Teljes pontszámot akkor lehet integrálás nélkül elérni, ha valami olyasmire hivatkozik, hogy a tartomány, ahol $f_{X,Y}$ nem 0, pontosan annak a

két intervallumnak a Descartes-szorzata, ahol f_X, illetve f_Y nem 0, ezen a tartományon $f_{X,Y}(x,y)$ egy csak x-től és egy csak y-tól függő kifejezés szorzatára bomlik, és mindenhol máshol mind $f_{X,Y}$, mind $f_X f_Y$ konstans 0. Attól függően, hogy ezt mennyire sikerül értelmesen megfogalmazni, részpontszám is adható.

(b) (2 pont)
(0 pont) Az a) feladatban azt kaptuk, hogy

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2y}, & \text{ha } y > 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(2 pont) Ez alapján $Y \sim \mathrm{Exp}(2)$. (1 pont arra, hogy exponenciális, 1 pont pedig a paraméterre). Ha az a)-ban az eloszlásfüggvényt számolta ki, akkor abból is hasonlóan lehet levonni a következtetést. Ha pedig sem az eloszlásfüggvényt, sem a sűrűségfüggvényt nem számolta ki, akkor most az egyiket ki kell számolni!
Ha valahogy megsejti, hogy Exp(2), arra adjunk 1 pontot akkor is, ha hiányzik az indoklás/perem-sűrűségfüggvény/perem-eloszlásfüggvény. De ha csak azt tippeli, hogy exponenciális, arra ne adjunk pontot.
(c) (5 pont)
(1 pont) $x \in \mathbb{R}$ esetén $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$,
(1+1 pont) ami 0, ha $x \le -1$ és 1, ha $x \ge 0$ (ez OK indoklás nélkül is, még akkor is, ha nem tudta kiszámolni a perem-sűrűségfüggvényt és nem írta fel az előbbi integrált).
(1 pont) és ha $-1 < x < 0$, akkor $F_X(x) = \int_{-1}^{x}(-2t)\mathrm{d}t$ (az előző előtti lépéssel összevonható)
(1 pont) $= [-t^2]_{-1}^{x} = 1 - x^2$.
(Ha már korábban kiszámolta az eloszlásfüggvényt, akkor pontozzuk ott.)
Természetesen más módon is meg lehet határozni X eloszlásfüggvényét, pl. (X,Y) együttes eloszlásfüggvényét meghatározva és annak argumentumában y-nal végtelenhez tartva.

6. * a) Svindler Sándor jól jövedelmező kockajátékokkal keresi kenyerét. A mai nap a következő játékot kínálja az utcán felé tévedő járókelőknek: a vállalkozó szellemű játékos dob egy szabályos 6 oldalú dobókockával. Amennyiben 6-ost dob, Sándor fizet neki ("pöttyönként 2 000", azaz összesen) 12 000 forintot, és a játék véget ér. Ha azonban más számot dob a játékos, akkor ő fizet Sándornak hasonló szisztéma szerint, egészen pontosan, ha az eredmény $1 \le k \le 5$, akkor $k \cdot 1\,000$ forintot, majd ismét dob ugyanezen szabályok szerint. A dobások tehát egészen addig ismétlődnek, míg a játékos 6-ost nem dob, és a fenti szabályok érvényesek minden dobásnál. Mennyi Sándor játékonkénti profitjának várható értéke? (A játékonkénti profit Sándor bevételének és kiadásának különbsége egy játéknál, amely természetesen negatív szám is lehet.)

b) Sándornak az utóbbi időben nem ment túl jól az üzlet, ezért úgy döntött, hogy bevételnövelés céljából beveti cinkelt dobókockáját, melyet (hogy ne legyen túl feltűnő) 9 másik szabályos, külsőre a cinkelt kockával megegyező dobókocka közé kevert. A cinkelt kockán a hatosdobás valószínűsége $\frac{1}{6} - p$, míg az egyesdobás valószínűsége $\frac{1}{6} + p$ valamely $0 < p < \frac{1}{6}$ számra, minden egyéb érték pedig $\frac{1}{6}$ valószínűséggel adódik. A játékosok az újonnan bevezetett szabályok szerint egyenletesen véletlenszerűen választanak egyet a dobókockák közül, majd a választott dobókockával játsszák le a játékot az a) részben tárgyalt szabályoknak megfelelően. Határozzuk meg a p szám értékét, ha tudjuk, hogy Sándor játékonkénti profitjának várható értéke az új szabályok mellett 4 600 forintra változott.

Megoldás:

(a) (9 pont)
(2 pont) Legyen X a profit várható értéke, és legyen E_i az az esemény, hogy elsőre i értéket dob a játékos ($1 \le i \le 6$). Ekkor az $E_1, \ldots, E_6$ események teljes eseményrendszert alkotnak.
(2 pont) Mivel a dobások függetlenek, ezért amennyiben a játékos nem 6-osat dob, akkor (fizetés

után) a kezdeti szituáció áll elő, így
(1 pont) a teljes várható érték tétele szerint
(4 pont)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{E}(X \mid E_i)\,\mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{5}(i \cdot 1\,000 + \mathbb{E}(X)) - 12\,000\right) = \frac{5}{6}\,\mathbb{E}(X) + \frac{3\,000}{6},$$

amit átrendezve $\mathbb{E}(X) = 3\,000$ forint adódik. (Ebből 1 pont a teljes várható érték tétele megfelelő alakjára, 1 a megfelelő behelyettesítésre, 1 a megfelelő összegzésre és 1 a végeredményre.)

(b) (11 pont)
(1 pont) Számoljuk ki először a várható értéket, ha a játékos a cinkelt kockát választja, azaz ha a hatos valószínűsége $\frac{1}{6} - p$, az egyesé pedig $\frac{1}{6} + p$, ahol p egy pozitív valós szám. (a többi dobás valószínűsége pedig 1/6). Jelölje ez utóbbi eseményt C.
(1 pont) Mivel a feltételes várható érték maga is egy (a feltételes valószínűség által meghatározott valószínűségi mérték szerinti) várható érték, így a fenti okoskodás, azaz a teljes várható érték tétele alkalmazható,
(2 pont) így tehát

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \mid C) &= \left(\frac{1}{6} + p\right) \cdot (1\,000 + \mathbb{E}(X \mid C)) - \left(\frac{1}{6} - p\right) \cdot 12\,000 + \frac{1}{6}\sum_{i=2}^{5}(i \cdot 1\,000 + \mathbb{E}(X \mid C)) \\ &= \left(\frac{5}{6} + p\right)\mathbb{E}(X \mid C) + 500 + p \cdot 13\,000,\end{aligned}$$

(1 pont) ezt átrendezve pedig

$$\left(\frac{1}{6} - p\right)\mathbb{E}(X \mid C) = \left(\frac{1 - 6p}{6}\right)\mathbb{E}(X \mid C) = 500 + p \cdot 13\,000,$$

(2 pont) azaz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \mid C) &= \frac{3\,000 + p \cdot 78\,000}{1 - 6p} = 3\,000 \cdot \frac{1 + 26p}{1 - 6p} \\ &= 3\,000\left(-4\frac{1}{3} + \frac{16}{3 - 18p}\right) = -13\,000 + 1\,000 \cdot \frac{16}{1 - 6p}.\end{aligned}$$

(1 pont) Mivel C és $\overline{C}$ teljes eseményrendszert alkot, így ezekre ismét a teljes várható érték tételét alkalmazva
(2 pont)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X \mid C)\,\mathbb{P}(C) + \mathbb{E}(X \mid \overline{C})\,\mathbb{P}(\overline{C}) \\ &= \left(-13\,000 + 1\,000 \cdot \frac{16}{1 - 6p}\right) \cdot \frac{1}{10} + 3\,000 \cdot \frac{9}{10} \\ &= -1\,300 + 100 \cdot \frac{16}{1 - 6p} + 2\,700 = 1\,400 + \frac{1\,600}{1 - 6p} = 4\,600,\end{aligned}$$

(1 pont) amiből $p = \frac{1}{12}$.

Másik (kevésbé elegáns) lehetséges megoldás vázlata: nem az első dobás eredményére feltételezünk, hanem arra, hogy hányadik dobásra lesz először hatos az eredmény, jelölje az első hatosdobás sorszámát Y.
(2 pont) Az (a) részben azt kell észrevenni, hogy bármely $k \in \{1, 2, \ldots\}$ esetén, feltéve, hogy $Y = k$,

Sándor bevétele úgy viselkedik, mint $k-1$ darab független valószínűségi változó összege, amelyek 1/5–1/5 valószínűséggel veszik fel az 1, 2, 3, 4, 5 értékeket.
(1 pont) arra, hogy az 1/5 valószínűségeket a feltételes valószínűség definíciója alapján megindokolja. Az egyes dobások függetlenségének és azonos eloszlásának (feltéve, hogy $Y = k$) formalizálása bonyolultabb, ezért ezt itt nem is várjuk el külön pontokért (és ezért sem ez az ajánlott megoldás, hanem az előző).
(2 pont) Mivel egy ilyen valószínűségi változó értéke 3 (a teljes pontszámért ezt indokolni kell)
(2 pont) és $Y \sim \mathrm{Geo}(1/6)$, tehát $\mathbb{E}(Y) = 6$,
(1 pont) a teljes várható érték tétele szerint
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = -12\ 000 + 1\ 000 \cdot 3 \cdot (\mathbb{E}(Y) - 1) = -12\ 000 + 15\ 000 = 3\ 000$.
A (b) részben szintén érdemes először megnézni, hogy mi történik, ha a cinkelt kockát választja a játékos (ezt az eseményt továbbra is C-vel jelöljük), majd a „Mivel C és $\overline{C}$ teljes eseményrendszert alkot” résztől ugyanúgy megy a megoldás, mint az előző.
(2 pont) Ha a cinkelt kockát választja, most bármely $k \in \{1, 2, \ldots\}$ esetén, feltéve, hogy $Y = k$, az 1. 2., …, $k-1$. dobás úgy viselkedik, mint $k-1$ független valószínűségi változó, amelyek $\frac{1/6}{5 \cdot 1/6+p} = \frac{1}{5+6p}$ valószínűséggel veszik fel a $2, 3, 4, 5$ értékeket és $\frac{1/6+p}{5 \cdot 1/6+p} = \frac{1+6p}{5+6p}$ valószínűséggel az 1 értéket.
(1 pont) Egy ilyen valószínűségi változó várható értéke

$$\frac{1+6p}{5+6p} + \sum_{k=2}^{5} \frac{k}{5+6p} = \frac{15+6p}{5+6p} = 3 - \frac{12p}{5+6p}.$$

(2 pont) Mivel feltéve C-t (azaz a $\mathbb{P}(\cdot|C)$ valószínűségi mérték szerint) és továbbá $\{Y = k\}$-ra ($k = 1, 2, \ldots$) feltételezve X megegyezik $k-1$ darab független és ilyen eloszlású valószínűségi változó összegével
(1 pont) és $Y \sim \mathrm{Geo}(1/6 - p)$,
(1 pont) a teljes várható érték tétele szerint
(2 pont)

$$\mathbb{E}(X|C) = -12\ 000 + 1\ 000 \cdot (3 - \frac{12p}{5+6p}) \cdot (\frac{1}{1/6-p} - 1).$$

(4 pont) Innen lásd a ‚Mivel C és $\overline{C}$ teljes eseményrendszert alkot” részt (további egyszerű algebrai átalakítások még szükségesek, de ezekre már nem jár pont).

Vizsgadolgozat Valószínűségszámítás és statisztikából (ÚJ Valszám), 2024.01.18.

1. (a) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező.
   i. Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ események. Milyen feltétel teljesülése esetén mondjuk azt definíció szerint, hogy A és B függetlenek?
   ii. Legyenek X és Y valószínűségi változók ezen a valószínűségi mezőn. Milyen feltétel teljesülése esetén mondjuk azt definíció szerint, hogy X és Y függetlenek? (Ezen kérdés megválaszolásához az i. részben már definiált fogalma(ka)t nem kell újra definiálni.)

   (b) Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségi változók egy sorozata és Z egy valószínűségi változó. Jelöljük X_i eloszlásfüggvényét F_{X_i}-vel ($i = 1, 2, \ldots$ esetén) és Z eloszlásfüggvényét F_Z-vel. Milyen feltétel teljesülése esetén mondjuk azt definíció szerint, hogy X_n eloszlásban konvergál Z-hez (amint $n \to \infty$)?

Megoldás.
(a) (11 pont)
i.
(5 pont) A és B (pontosan) akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.
Szorzatjel nem kötelező. Ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$-t vagy $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$-t ír, akkor 2 pont, ha hozzáírja, hogy a feltétel valószínűsége pozitív kell, hogy legyen, akkor még 1 pont.
(jegyzet 2.1.1. Definíció)
ii.
(4 pont) X és Y (pontosan) akkor függetlenek, ha az $\{X < x\}$ és az $\{Y < y\}$ események függetlenek
(az is jó, ha azt írja, hogy $\mathbb{P}(X < x, Y < y) = \mathbb{P}(X < x)\mathbb{P}(Y < y)$ vagy $\mathbb{P}(\{X < x\} \cap \{Y < y\}) = \mathbb{P}(X < x)\mathbb{P}(Y < y)$, illetve ha pl. $\{X < x\}$ helyett $\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\}$-et, az sem, de kisebb szintaktikai hibákért vonjunk le 1 pontot, pl. ha a metszetet halmazjelölések nélkül vagy hiányos halmazjelölésekkel írja. Ha pl. $\mathbb{P}(\{X < x\})$-et ír, az nem baj)
(2 pont) minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.
(jegyzet 6.1.1. Definíció)
(b) (9 pont)
(5 pont) X_n akkor konvergál eloszlásban Z-hez (amint $n \to \infty$), ha $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_Z(x)$ teljesül (vagy $F_{X_n}(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_Z(x)$, vagy $F_{X_n}(x) \to F_Z(x)$, amint $n \to \infty$; ha csak konvergenciajel szerepel, de nem derül ki, hogy $n \to \infty$ esetén értendő a határérték, akkor max. 3 pont)
(4 pont) minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol F_Z folytonos. (Kisebb szintaktikai hibákért 1–1 pont levonás. Ha azt írja, hogy minden $x \in \mathbb{R}$-re, azért 1 pont jár a 4-ből.)
(jegyzet 9.3.1. Definíció)

2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat adja meg.

Y \ X	1	2
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Határozzuk meg X és Y kovarianciáját és korrelációját, valamint Y-nak X-re vett regressziós egyenesét.
Megoldás.
(1 pont) $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$,
(1 pont) ahol $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k \in \mathrm{Ran}(XY)} k\mathbb{P}(XY = k)$ (ha a következő lépés jó, akkor ez a pont jár az általános képlet feltüntetése nélkül is)
(1 pont) $= \frac{1}{12} \cdot 1 + (\frac{1}{4} + \frac{1}{12}) \cdot 2 + \frac{1}{12} \cdot 4 = \frac{13}{12}$,
(1 pont) valamint mivel $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/2$ (ezt persze táblázatosan is fel lehet

tüntetni),
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \cdot (1+2) = \frac{3}{2}$,
(1 pont) és mivel $\mathbb{P}(Y=1) = 1/3$ és $\mathbb{P}(Y=2) = 1/6$ (és így $\mathbb{P}(Y=0) = 1/2$, de ezt nem muszáj odaírni, mert a várható érték és szórás kiszámításához úgysem kell),
(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{2}{3}$,
(1 pont) tehát $\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{12}$.
(1 pont) $\operatorname{corr}(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}$,
(1 pont) ahol $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$ és Y esetén hasonlóan (de ha csak az egyiket írja oda, azért ne vonjunk le pontot),
(1 pont) és $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}(1^2+2^2) = \frac{5}{2}$,
(1 pont) tehát $\mathbb{D}(X) = \sqrt{5/2 - (3/2)^2} = \sqrt{1/4} = 1/2$,
(1 pont) valamint $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 = 1$,
(1 pont) így $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{1-(2/3)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,
(1 pont) emiatt $\operatorname{corr}(X,Y) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \approx 0{,}2236$ (a tört alakú és a numerikus végeredmény közül elég, ha az egyiket írja ki).
(1 pont) A regressziós egyenes képlete $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = \beta x + \alpha\}$,
(1+1 pont) ahol $\beta = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)} = \frac{\frac{1}{12}}{1/4} = \frac{1}{3}$
(1+1 pont) és $\alpha = \mathbb{E}(Y) - \beta\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$.

3. Egy X folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_X \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1, \\ \ln x, & \text{ha } 1 < x < \mathrm{e}, \\ 1, & \text{ha } x \ge \mathrm{e}, \end{cases}$$

ahol $\mathrm{e} \approx 2{,}71\ldots$.

(a) Határozzuk meg X várható értékét és szórásnégyzetét.

(b) Számítógéppel szimuláltunk 100 darab független, azonos eloszlású valószínűségi változót az (a) feladatban szereplő F_X eloszlásfüggvénnyel. Becsüljük meg alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy ezek összege legfeljebb 180 (a valószínűség pontos értékének kiszámításáért itt nem jár pont).

Tanács: A (b) részfeladatban érdemes az (a) részfeladat megoldásának megfelelően kerekített numerikus eredményeivel dolgozni szimbolikus értékek helyett.

Megoldás.
(a) (8 pont)
(1 pont) $f_X(x) = \frac{1}{x}$, ha $1 < x < \mathrm{e}$
(1 pont) és $f_X(x) = 0$ különben,
(1 pont) tehát $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 1 \mathrm{d}x$ (elég, ha a második képlet szerepel)
(1 pont) $= [x]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - 1 (\approx 1{,}7183)$.
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$,
(1 pont) ahol $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x \mathrm{d}x$
(1 pont) $= [x^2/2]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2} (\approx 3{,}1945)$.
(1 pont) Tehát $\mathbb{D}^2(X) = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2} - (\mathrm{e}-1)^2 \approx 0{,}2420$. (Nem baj, ha itt nem szerepel numerikus eredmény, de előbb-utóbb hiányozni fog.)
(b) (12 pont)
(1 pont) arra az ötletre, hogy a CHT-t kellene használni. Ez jár akkor is, ha ez a későbbiekben

nem sikerül, feltéve, hogy kiderül, hogy az általános CHT-ról és nem a de Moivre–Laplace-tételről van szó.
(1 pont) Jelölje $X_1, \dots, X_{100}$ a szimulált valószínűségi változókat, ekkor a keresett valószínűség $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{100} X_i \le 180)$.
(5 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{100} X_i \le 180\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{100}\mathbb{D}(X_1)} \le \frac{180 - 100\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{100}\mathbb{D}(X_1)}\Big) \approx \mathbb{P}\Big(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 171{,}8282}{4{,}9197} \le 1{,}6610\Big)$$

(Ebből 3 pont a középső lépés, 2 pont az utolsó, amiből 1 az, hogy a szórásnégyzetből gyököt vonva kiszámolja a szórást.) (Kisebb kerekítési hibákért, ha pl. már az (a) részben kiszámolta a várható értéket és a szórásnégyzetet és most a négy tizedesjegyre kerekített értékekkel számol, ne vonjunk le pontot. Ha a középső kifejezés nincs ott szimbolikusan, de ott van $\mathbb{E}(X_1)$ és $\mathbb{D}(X_1)$ már ismert értékeivel, az is jó, és a két lépés össze is vonható, ha kiderül, hogy mi micsoda. Ha a jobb oldalon csak szimbolikus értékek szerepelnek, azért ne vonjunk le pontot, de mint már említettem, a numerikus eredmények előbb-utóbb hiányozni fognak.)
(1 pont) $\approx \mathbb{P}(Y \le 1{,}6610)$, ahol $Y \sim \mathrm{N}(0;1)$,
(1 pont) ami megegyezik $\mathbb{P}(Y < 1{,}6610)$-mal, mert Y folytonos valószínűségi változó (ha nem hivatkozik a folytonosságra, azért ne vonjunk le pontot, de legalább annyi legyen kimondva, hogy a két valószínűség egyenlő. Mivel X_i és így $\sum_{i=1}^{100} X_i$ is folytonos valószínűségi változó, a „$\le$”-ról „$<$”-ra már az előző lépésben át lehet térni, de ott indokolni kell a folytonosságot.)
(1+1 pont) és $\mathbb{P}(Y < 1{,}6610)(= \Phi(1{,}6610)) \approx \Phi(1{,}66)$ (nem muszáj használni a Φ jelölést, jó a $\mathbb{P}(Y < 1{,}66)$ is)
(1 pont) $\approx 0{,}9515$.

4. Egy X és egy Y valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & \text{ha } 0 < y < 1 \text{ és } 0 < x < y, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $c > 0$ egy alkalmasan választott valós szám.

(a) Határozzuk meg c értékét.

(b) Határozzuk meg az f_X és f_Y perem-sűrűségfüggvényeket.

(c) Független-e X és Y? Azonos eloszlású-e X és Y?

Megoldás.
(a) (5 pont)
(1 pont) $f_{X,Y}$ akkor lesz együttes sűrűségfüggvény, ha (c nemnegatív – ez meg van adva, ezért nem jár rá pont – és) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
(1 pont) $= \int_0^1 \int_0^y c\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (ha ez jó, akkor az előző pontot az előző képlet hiányában is megadjuk)
(1 pont) $= c\int_0^1 [x]_{x=0}^{y}\mathrm{d}y = c\int_0^1 y\mathrm{d}y$
(1 pont) $= c[y^2/2]_{y=0}^1 = c/2$,
(1 pont) amiből $c = 2$.
Alternatív megoldás: a geometriai valószínűségi mezővel érvelünk. A sűrűségfüggvény konstans azon a tartományon, ahol nem 0. Ez a tartomány pedig az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x < y < 1\}$ derékszögű egyenlőszárú háromszög, vagyis az egységnégyzet $y = x$ szögfelező-egyenes feletti fele, amelynek amelynek területe 1/2. Az (X,Y) valószínűségi vektorváltozó 1 valószínűséggel ebbe a tartományba esik, és itt a valószínűség a területtel arányos (mert a sűrűségfüggvény konstans), ami azt jelenti, hogy c-szer a háromszög területe éppen 1, vagyis $c = 2$. (5 pont, indoklás szükséges, de ha lényegében helyes, csak nem elég precíz, akkor ne vonjunk le túl sok pontot.)
(b) (8 pont)

(1 pont) Ha $0 < x < 1$, akkor $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y$
(1 pont) $= \int_x^1 2\mathrm{d}y$ (ha ez jó, akkor az előző pontot az előző képlet hiányában is megadjuk)
(1 pont) $= \Big[2y\Big]_{y=x}^{1} = 2 - 2x$,
(1 pont) és ha $x \le 0$ vagy $x \ge 1$, akkor $f_X(x) = 0$,
(1 pont) valamint ha $0 < y < 1$, akkor $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_0^y 2\mathrm{d}x$ (ha ez jó, akkor az előző pontot az előző képlet hiányában is megadjuk)
(1 pont) $= \Big[2x\Big]_{x=0}^{y} = 2y$,
(1 pont) és ha $y \le 0$ vagy $y \ge 1$, akkor $f_Y(y) = 0$.
(c) (7 pont)
Önmagában arra a kijelentésre, hogy nem függetlenek, nem jár pont.
(1 pont) Nem függetlenek, mert... (valahogy megindokolja, akkor is, ha rosszul).
(2 pont) X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $f_X(x)f_Y(y) = f_{X,Y}(x,y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesül (ha kihagyja, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, akkor max. 1 pont).
(2 pont) arra, hogy választ egy olyan x és egy olyan y értéket, amelyre $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$, pl. $x = y = 1/4$.
(1 pont) arra az ötletre, hogy pontosan akkor lennének azonos eloszlásúak, ha ugyanaz lenne a sűrűségfüggvényük (mivel mindkét peremeloszlás folytonos, de ezt nem kell odaírni. Szabad az eloszlásfüggvényeket is kiszámolni és az alapján következtetni, de fölösleges),
(1 pont) arra, hogy ez itt nem teljesül, ezért nem azonos eloszlásúak. (Ezt nem kell részletezni, de $t \in (0,1) \setminus \{1/2\}$ esetén $f_X(t) \neq f_Y(t)$. Az utolsó két pont természetesen összevonható.)

5. Egy trópusi barlangban a hőmérséklet egész évben közel állandó. A hőmérsékletet 6 időpontban megmértük és (Celsius-fokban mérve) az

$$x_1 = 18{,}6 \quad x_2 = 18{,}0 \quad x_3 = 19{,}2 \quad x_3 = 17{,}4 \quad x_5 = 16{,}8 \quad x_6 = 18{,}0$$

adatpontokat kaptuk. Az $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_6)$ vektort egy $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_6)$ fae. $\mathrm{N}(\mu; 4)$ eloszlású minta realizációjának tekintjük, ahol a μ várható érték ismeretlen.

(a) A minta alapján adjunk 97% szintű konfidenciaintervallumot a μ paraméterre.

(b) Egy régi földrajztankönyv azt állítja, hogy $\mu = 17{,}5$ °C. Felmerült, hogy a klímaváltozás miatt ez az állítás már sajnos nem tartható. Vizsgáljuk $\varepsilon = 0{,}05$ terjedelmű próbával, hogy a minta alapján igaz-e az állítás. Adjuk meg H_0-t, H_1-et, a próbastatisztika értékét, a döntést és azt, hogy mi alapján döntöttünk.

Megoldás.
(a) (9 pont)
(1 pont) arra, hogy mivel a szórás ismert, az ismert szóráshoz tartozó (a képletgyűjteményben az u-próbánál szereplő) képletet használjuk a konfidenciaintervallumra. Elég, ha ez impliciten derül ki.
(1 pont) $n = 6$ és $\varepsilon = 0{,}03$ (elég, ha ezek is csak impliciten derülnek ki a későbbiekben), (1 pont) $\overline{x_6} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i$
(1 pont) $= 18$,
(1 pont) és $\sigma = \sqrt{4} = 2$.
(1 pont) $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2) = \Phi^{-1}(0{,}985)$
(1 pont) $\approx 2{,}17$ (a normális eloszlás táblázata alapján).
(2 pont) Így a konfidenciaintervallum $(\bar{x}_n - \frac{\sigma u_{\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + \frac{\sigma u_{\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}) = (18 - \frac{2 \cdot 2{,}17}{\sqrt{6}}, 18 + \frac{2 \cdot 2{,}17}{\sqrt{6}}) \approx (16{,}2282, 19{,}7718)$ (itt csak a számolásra, illetve a végeredményekre jár pont, mert arra már adtunk pontot, hogy melyik képletet kell használni).
(b) (11 pont)

(1 pont) ismét jár arra, hogy mivel a szórás ismert, u-próbát kell használni, és a próba egymintás, (elég, ha ez később impliciten derül ki).
(2 pont) arra, hogy kétoldali próbára van szükség (ez a földrajztankönyvben szereplő állításból következik). Ezt nem kell expliciten kimondani, ha jó a nullhipotézis.
Ha ezt elrontja a hallgató, akkor ezt a két pontot elveszti, illetve az alternatíva lentebbi értékelésénél a $H_0\colon \mu \leq 17{,}5$ vs. $H_1\colon \mu > 17{,}5$ alternatívára maximum 1 pont jár, a $H_0\colon \mu \geq 17{,}5$ vs. $H_1\colon \mu < 17{,}5$ alternatívára pedig nem jár pont. Ezután viszont a továbbiakban úgy értékeljük a megoldást, mintha az alternatíva helyes lenne (feltéve, hogy szintaktikailag értelmezhető), tehát az adott egyoldali alternatívának megfelelően az $1-\varepsilon$-kvantilis egyszerese, illetve -1-szerese a helyes és azzal kell összehasonlítani az u-statisztikát és az alapján dönteni.
(2 pont) Tehát az alternatíva $H_0\colon \mu = 17{,}5$ vs. $H_1\colon \mu \neq 17{,}5$ (itt μ jelöli a mintaelemek várható értékét, de ezt nem muszáj odaírni).
(1 pont) (Mivel egymintás u-próbáról van szó), a próbastatisztika értéke $u(x_1,\dots,x_6) = \frac{\bar{x}_n-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ (elég, ha ez impliciten derül ki a következő lépésből. Ha csak u-t ír $u(x_1,\dots,x_6)$ helyett, azért ne vonjunk le pontot, mert a táblázatban is az van)
(1 pont) $= \frac{18-17{,}5}{2}\sqrt{6} \approx 0{,}6124$.
(1 pont) H_0-t pontosan akkor fogadjuk el, ha $|u(\mathbf{x}_1,\dots,x_n)| \leq u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1-\varepsilon/2)$,
(1 pont) ahol ε a terjedelem, vagyis 0,05, tehát $\Phi^{-1}(1-\varepsilon/2) = \Phi^{-1}(0{,}975)$
(1 pont) $\approx 1{,}96$.
(1 pont) Ezért H_0-t elfogadjuk (vagyis arra jutunk, hogy a várható érték [még] 17,5 °C-kal egyenlőnek tekinthető).

6. * Az $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ valószínűségi vektorváltozóról tudjuk, hogy várható érték vektora $\begin{pmatrix} 42 \\ -1 \end{pmatrix}$, valamely U, V független normális eloszlású valószínűségi változókra és a, b, c, e, f, g valós számokra $X = aU + bV + c$ és $Y = eU + fV + g$ teljesül, valamint $\mathbb{D}^2(X) > 0, \mathbb{D}^2(Y) > 0$, és $\mathbb{E}(Y|X) = X + d$, ahol $d \in \mathbb{R}$ egy alkalmasan választott konstans.

   (a) Határozzuk meg d értékét.

   (b) Határozzuk meg Y-nak X-re vett regressziós egyenesét.

   (c) Független-e X és Y?

   (d) Diagonális-e $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixa?

Megjegyzés: Ha az (a) *részben nem sikerült d-t kiszámítani, a többi részfeladatot paraméteresen is megoldhatjuk.*
Technikai megjegyzés: Ez az eredeti feladat módosított verziója, átfogalmazva úgy, hogy ne szerepeljen benne a többdimenziós normális eloszlás fogalma. Emiatt viszont a feladat megfogalmazása kissé nehezebb az eredetinél. A megoldás szinte változatlan.
Megoldás. (a) (7 pont)
(1 pont) A teljes várható érték tétele szerint
(2 pont) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$
(1 pont) $= \mathbb{E}(X + d)$.
(1 pont) $= \mathbb{E}(X) + d$ (az előző egyenlettel összevonható)
(1 pont) $= 42 + d$, aminek -1-gyel kell megegyeznie (a megadott várható érték vektor alapján),
(1 pont) tehát $d = -43$.
(b) (5 pont)
(1 pont) arra, hogy független normálisok összegei/lineáris kombinációi esetén a regresszió megegyezik a lineáris regresszióval (ez a pont akkor is jár, ha a konkrét szituációra nem tudja megfelelően alkalmazni. A normalitásra és függetlenségre viszont mindenképpen hivatkozni kell).

(2 pont) Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{E}(Y|X) = \beta X + \alpha$, ahol β és α a lineáris regresszió képletében szereplő kifejezések (nem kell kiírni, hogy mi β és α képlete, de az valahogy derüljön ki, hogy a lineáris regressziónak felelnek meg).
(1 pont) Ezért $\beta = 1$ és $\alpha(= d) = -43$,
(1 pont) vagyis a regressziós egyenes $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x - 43\}$.
(c) (3 pont)
(1 pont) arra, hogy ha X és Y függetlenek lennének, akkor $\mathbb{E}(Y|X)$ megegyezne $\mathbb{E}(Y)$-nal.
(2 pont) Ez viszont itt nem teljesülhet, hiszen $\mathbb{E}(Y|X) = (X + d =)X - 43$, és X (vagy: $X - 43$) nem konstans valószínűségi változó, mivel a szórásnégyzete pozitív, míg $\mathbb{E}(Y)(= d = -43)$ egy konstans.
(d) (5 pont)
(1 pont) A kovarianciamátrix pontosan akkor diagonális, ha $\text{cov}(X, Y) = 0$.
(1 pont) ennek megindoklására (pl. kimondja a kovarianciamátrix definícióját, vagy azt mondja, hogy a kovarianciamátrix egy 2×2-es szimmetrikus mátrix, amelyben a főátlón kívül mindkét helyen $\text{cov}(X, Y)$ áll).
(2 pont) Ha $\text{cov}(X, Y) = 0$ teljesülne (vagyis ha X és Y korrelálatlanok lennének), akkor viszont függetlenek is lennének, mert X és Y (ugyanazon) független normálisok összege/lineáris kombinációja.
(1 pont) És mivel láttuk, hogy nem függetlenek, ezért korrelálatlanok sem lehetnek, tehát a kovarianciamátrix nem diagonális.

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Vizsgadolgozat Valószínűségszámítás és statisztikából (ÚJ Valszám), 2024.01.25.

1. (a) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, legyen $n \geq 1$ és legyenek $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ események. Milyen feltételek teljesülése esetén nevezzük az ezen eseményekből álló sorozatot teljes eseményrendszernek definíció szerint?

   (b) Mikor nevezünk egy X valószínűségi változót egyszerűnek?

   (c) Legyen $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$, és legyen Y egy $\mathrm{N}(\mu; \sigma^2)$ eloszlású és X egy $\mathrm{N}(0; 1)$ eloszlású valószínűségi változó. Ebben az esetben X milyen lineáris transzformáltjának eloszlása azonos Y eloszlásával?

   Megoldás.
   (a) (10 pont)
   (5 pont) Ha páronként kizáróak (megfogalmazható úgy is, hogy ha $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ minden $i \neq j$ esetén, de ha a „minden $i \neq j$ esetén”-t kihagyja, akkor max. 3 pont)
   (5 pont) és uniójuk Ω (leírható képlettel is, $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ stb. Kisebb szintaktikai hibák esetén részpont adható.).
   Ha ahelyett, hogy az uniójuk Ω, azt írja, hogy a valószínűségeik összege 1, arra adunk max. 4 pontot, ha szerepel mellette a páronkénti kizáróság is. Viszont ha az nem szerepel, akkor abból, hogy a valószínűségek összege 1, nem következik, hogy az uniójuk Ω, ezért ebben az esetben max. 1 pont.
   (jegyzet 2.2.5. Definíció)
   (b) (5 pont) Ha értékkészlete véges. / Ha csak véges sok értéket vesz/vehet fel. / Képlettel valahogy leírja (szintaktikai hibák esetén részpontok adhatók).
   Ha nem szerepel, hogy véges, 0 pont. Ha azt írja, hogy véges vagy megszámlálhatóan végtelen, max. 1 pont.
   (jegyzet 3.2.1. Definíció)
   (c) (5 pont) $\sigma X + \mu$ ugyanolyan eloszlású, mint Y.
   Ha azt írja, hogy $Y = \sigma X + \mu$, akkor max. 4 pont (mert van más $\mathrm{N}(\mu; \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változó is, pl. $Y = -\sigma X + \mu$ is az, akármi is a valószínűségi mező).
   Ha azt írja, hogy X és $\frac{Y-\mu}{\sigma}$ azonos eloszlásúak, akkor max. 2 pont. Ha azt, hogy $X = (Y-\mu)/\sigma$, akkor max. 1 pont. (jegyzet 8.2.2. Következmény)

2. Az A, B, C eseményekről tudjuk, hogy páronként függetlenek és $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{10}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{10}$, valamint $\frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy a három esemény közül egyik sem következik be. Együttesen független-e A, B és C? Feltéve, hogy a három esemény közül legalább az egyik bekövetkezik, mi a valószínűsége, hogy mindhárom esemény (egyszerre) bekövetkezik?
   Megoldás.
   (1 pont) A, B, C akkor lesznek együttesen függetlenek, ha $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$,
   (1 pont) mivel azt már tudjuk, hogy páratlanul függetlenek (itt azt még nem kell kifejteni, hogy a páronkénti függetlenség mit jelent, mert arra később adunk pontot).
   Megjegyzés: Ha azt igazolja, hogy $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, az önmagában is elég ezért a két pontért, hiszen ebből következik, hogy nem együttesen függetlenek, attól függetlenül, hogy páronként függetlenek-e.
   (1 pont) A Poincaré-formula szerint
   (1 pont) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.
   (1 pont) (A feladat szövege szerint) $1/2 = \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C})$ (lehet $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$-nek is írni, ha később kiderül, hogy tudja, hogy ennek a valószínűsége $1 - \mathbb{P}(A \cup B \cup C)$)
   (1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(A \cup B \cup C)$, tehát $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ szintén 1/2-del egyenlő.
   (3 pont) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{3}{50} (= 0{,}06)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \frac{3}{100} (= 0{,}03)$ és $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{50} (= 0{,}02)$
   (1 pont) a páronkénti függetlenség miatt.
   (2 pont) Így tehát $\frac{1}{2} = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{3}{50} - \frac{3}{100} - \frac{1}{50} + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$, vagyis $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{100} (=$

0,01) (ebből 1 pont $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ értékére, és 1 pont arra, hogy legalább annyira részletezi a számításokat, hogy abból számológéppel és egyszerű összevonásokkal kijöjjön az értéke),
(1 pont) viszont $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{3}{500} \neq \frac{1}{100}$, ezért nem együttesen függetlenek.
(3 pont) A második kérdésben a keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap B \cap C | A \cup B \cup C)$ (ebből 1–1 pont jár a két esemény azonosítására, és 1 arra, hogy a megfelelő feltételes valószínűséget írja fel),
(1+1 pont) $= \frac{\mathbb{P}((A \cap B \cap C) \cap (A \cup B \cup C))}{\mathbb{P}(A \cup B \cup C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(A \cup B \cup C)}$ (a két pont összevonható, elég, ha a második kifejezés szerepel)
(1 pont) $= \frac{1/100}{1/2}$ (az a) rész szerint; nem kell indokolni)
(1 pont) $= \frac{1}{50} (= 0{,}02)$.
Megjegyzés: Az első rész valójában gyorsabban megoldható úgy, hogy az A, B, C események komplementereinek valószínűségeit számítja ki és meggyőződik arról, hogy ez nem egyenlő $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1/2$-del. Erre is lehet 13 pontot kapni az első kérdésnél. Ebben az esetben viszont a második kérdésnél az utolsó 2 pont csak akkor jár, ha $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$-t helyesen kiszámolja.

3. Legyenek $X \sim \mathrm{N}(1; 9)$ és $Y \sim \mathrm{N}(-1; 16)$ független valószínűségi változók.

   (a) Határozzuk meg (indoklással!) $\mathbb{P}(2 < X < 3)$ értékét.

   (b) Legyen $Z = X + Y + 2024$ és $W = Y - 2X$. Határozzuk meg $\mathrm{cov}(Z, W)$ értékét.

   (c) Mennyi $X + Y$ várható értéke és szórásnégyzete (és miért)?

Megoldás.
(a) (8 pont)
(2 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}(2 < X < 3) = \mathbb{P}\Big(\frac{2-1}{3} < \frac{X-1}{3} < \frac{3-1}{3}\Big),$$

(1 pont) $= \mathbb{P}(\frac{1}{3} < V < \frac{2}{3})$, ahol $V \sim \mathrm{N}(0; 1)$,
(1 pont)[a] mert az $(X-1)/3$ (vagy: $(X - \mathbb{E}(X))/\mathbb{D}(X)$) val. változó (az előadáson tanultak szerint) standard normális eloszlású. (Az elég, ha impliciten derül ki, hogy 1 a várható érték és $3 = \sqrt{9}$ a szórás.)
(1 pont) $\mathbb{P}(1/3 < V < 2/3) = \mathbb{P}(V < 2/3) - \mathbb{P}(V < 1/3)$ (itt nem kell hivatkozni a folytonosságra, mert kevés pont jár a feladatra)
(1 pont) $\Phi(2/3) - \Phi(1/3)$ (az előzővel összevonható)
(1 pont) $\approx \Phi(0{,}67) - \Phi(0{,}33)$
(1 pont) $\approx 0{,}7486 - 0{,}6293 = 0{,}1193$. (A Φ jelölés nem kötelező, meg lehet maradni végig az eloszlásfüggvényes jelölés mellett.)
(b) (8 pont)
(1 pont) $\mathrm{cov}(Z, W) = \mathrm{cov}(X + Y, X - 2Y)$ (elég, ha a következő lépések valamelyikéből derül ki, hogy az additív konstanst el lehet hagyni. Ha nem hagyja el az additív konstanst, akkor ez a pont abban az esetben jár, ha a végén rájön, hogy a konstanst tartalmazó tag értéke 0)
(2 pont) $= \mathrm{cov}(X, Y) - 2\mathrm{cov}(X, X) + \mathrm{cov}(Y, Y) - 2\mathrm{cov}(X, Y)$ (ebből 1 pont a tagokra bontásra, 1 a 2-es szorzók kiemelésére, ami összevonható egy lépésbe, ahogy itt is írtam)
(0 pont) $= -2\mathrm{cov}(X, X) + \mathrm{cov}(Y, Y) - \mathrm{cov}(X, Y)$, (1 pont) ahol $-2\mathrm{cov}(X, X) = -2\mathbb{D}^2(X) = -18$,
(1 pont) $\mathrm{cov}(Y, Y) = \mathbb{D}^2(Y) = 16$, (1 pont) és $\mathrm{cov}(Y, X) = 0$,
(1 pont) mert függetlenek,
(1 pont) tehát $\mathrm{cov}(Z, W) = -2$.

[a] Ha azt mondja, hogy a CHT miatt közelít azzal a standard normálissal, ami X standardizáltját valójában nem csupán közelíti, hanem megegyezik vele, akkor ez a pont nem jár (még akkor sem, ha hivatkozik a CHT-re, mert nem approximálni akarunk, hanem pontos eredményt kapni – a táblázat pontosságának erejéig). A többi pont ilyen esetben is megszerezhető.

(c) (4 pont)
1. megoldás.
(1+1 pont) $X+Y \sim \mathrm{N}(-1+1; 9+16) = \mathrm{N}(0; 25)$, vagyis $\mathbb{E}(X) = 0$ és $\mathbb{D}^2(X) = 25$,
(1 pont) mert független normálisok összege normális
(1 pont) és a paraméterek összeadódnak (utóbbira jár 1 pont akkor is, ha ezt nem írja le ilyen általánosan, de az visszakövethető a megoldásból, hogy a várható értékeket és a szórásnégyzeteket is összeadja).
2. megoldás.
(1 pont) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1 - 1 = 0$ (nem kell indokolni)
(1+1 pont) és $\mathbb{D}^2(X+Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) = 9+16 = 25$ (1 pont arra, hogy a szórásnégyzetek összeadódnak és 1 a konkrét értékekre és azok összeadására),
(1 pont) mert függetlenek.

4. Megfigyelünk két villanykörtét, amelyek egymás mellett függnek egy terem mennyezetén. A megfigyelésünk kezdetén még mindkét körte üzemképes. A két villanykörte kiégéséig hátralévő időt egy-egy folytonos és örökifjú eloszlású, 100 nap várható értékű valószínűségi változó írja le, amelyek egymástól függetlenek. Pontosan 100 nappal a megfigyelés kezdete után visszatérünk a terembe és megvizsgáljuk, hogy kiégtek-e már a körték.

   (a) Mi a valószínűsége, hogy a bal oldali villanykörte ekkor még üzemképes (azaz nem égett ki már korábban)?

   (b) Definiáljuk az X és Y diszkrét valószínűségi változókat a következőképpen: $X = 1$, ha a bal oldali körte már korábban kiégett és $X = -1$ különben, és $Y = 0$, ha a jobb oldali körte már korábban kiégett és $Y = 3$ különben. Határozzuk meg $\mathrm{cov}(XY) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ értékét.

Megoldás.
(a) (9 pont)
(1 pont) A bal oldali villanykörte hátralévő élettartamát leíró valószínűségi változókat jelöljük T-vel, a jobb oldaliét pedig U-val. (Nem baj, ha nem vezet be erre külön jelölést, de ha ezt nem teszi meg és később van ezzel összefüggésbe hozható szintaktikai hiba vagy jelölési következetlenség, akkor ez a pont nem jár.)
(1 pont) Ekkor T és U (független) exponenciális eloszlású valószínűségi változók[b],
(1 pont) mivel eloszlásuk folytonos és örökifjú (és így csak exponenciális lehet).
(1 pont) Ha az eloszlás paramétere λ, akkor a valószínűségi változó várható értéke $1/\lambda$,
(1 pont) ezért $\lambda = 1/100$.
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(T \geq 100)$ (vagy: $\mathbb{P}(T > 100)$-zal is OK, a későbbiekben is hasonlóan, és a folytonosságra nem kell külön hivatkozni, azaz $\mathbb{P}(T > 100) = 1 - \mathbb{P}(T < 100)$ alkalmazása indoklás nélkül is OK pontlevonás nélkül)
(2 pont) $= 1 - \mathbb{P}(T < 100) = \mathrm{e}^{-1/100 \cdot 100}$ (a két lépés összevonható; nem baj, ha a hallgató tudja, hogy $\mathbb{P}(T > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$)
(1 pont) $= \mathrm{e}^{-1} (\approx 0{,}3679)$.
(b) (11 pont)
1. megoldás.
(1 pont) $\mathrm{cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$ (tehát elég $\mathbb{E}(XY)$-t meghatározni). (Ha valaki kiszámolja $\mathrm{cov}(X, Y)$-t és $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$-t, az is jó, de $\mathbb{E}(XY)$ kiszámításán felül minden másra összesen csak 1 pont jár. $\mathbb{E}(X) = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$, $\mathbb{E}(Y) = 3\mathrm{e}^{-1}$.)
(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = \sum_{XY \in \mathrm{Ran}(XY)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)$
(1 pont) $= -3\mathbb{P}(T \geq 100, U \geq 100) + 3\mathbb{P}(T < 100, U \geq 100)$ (lehet persze metszetekkel is

[b] Az (a) rész megoldásához U-t egyáltalán nem kell megemlíteni. Viszont ha soha nem említi meg, hogy U ugyanolyen eloszlású, mint amit T-re kimond, csak használja, akkor a (b)-ben 1 pont levonás (feltéve, hogy egyáltalán írt valamit a (b)-hez, ami U-ra vonatkozik).

írni. Az előző lépéssel akkor vonható össze, ha kiderül, hogy a 3 és a -3 honnan származik. Az $XY = 0$-hoz tartozó valószínűségeket nem kötelező felírni, kiszámolni meg pláne nem.).
(2 pont) $\mathbb{P}(T \geq 100, U \geq 100) = \mathbb{P}(T \geq 100)\mathbb{P}(U \geq 100) = \mathbb{P}(T \geq 100)^2$ (összevonható egy lépésbe),
(1+1 pont) mert függetlenek és azonos eloszlásúak (utóbbit szabad kevésbé formálisan is megfogalmazni).
(1 pont) $= (\mathrm{e}^{-1})^2 = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}1353$ (elég csak a szimbolikus vagy csak a numerikus eredmény).
(1 pont) $\mathbb{P}(T < 100, U \geq 100) = \mathbb{P}(T < 100)\mathbb{P}(U \geq 100)$ (mert függetlenek, de ezt az indoklást elég, ha egyszer írja oda; ha csak itt és a másiknál nem, akkor jár a fenti 1 pont)
(1 pont) $= (1 - \mathrm{e}^{-1})\mathrm{e}^{-1}$ (nem kell jobban indokolni)
$= \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}2325$ (elég csak a szimbolikus eredmény bármelyik formában vagy csak a numerikus eredmény).
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(XY) = -3\mathrm{e}^{-2} + 3(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}) = 3\mathrm{e}^{-1} - 6\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}2916$ (elég csak a szimbolikus vagy csak a numerikus eredmény).
2. (elegánsabb, de több ötletet igénylő) megoldás vázlata.
(1 pont) $\mathrm{cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$ (tehát elég $\mathbb{E}(XY)$-t meghatározni).
(1 pont) Mivel T és U független, X és Y is független,
(1 pont) és ezért $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. (Arra is jó hivatkozni is, hogy mivel függetlenek, a kovarianciájuk 0.)
(1 pont) Továbbá $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X = -1)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(T < 1) - \mathbb{P}(T \geq 1)$ (az előző lépéssel összevonható)
(1 pont) $= 1 - \mathrm{e}^{-1} - (\mathrm{e}^{-1})$
(1 pont) $= 1 - 2\mathrm{e}^{-1} (\approx 0{,}2642)$,
(1 pont) és $\mathbb{E}(Y) = (0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) +) 3 \cdot \mathbb{P}(Y = 3)$
(1 pont) $= 3 \cdot \mathbb{P}(U \geq 1)$
(1 pont) $= 3\mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}1036$,
(1 pont) tehát $\mathbb{E}(XY) = 6\mathrm{e}^{-2} - 3\mathrm{e}^{-1} = 0{,}2916$.

5. Egy X és egy Y valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/4, & \text{ha } 1 < x < 3 \text{ és } 2 < y < 2x, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg $f_{Y|X}(y|x)$ értékét minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

(b) Ez alapján bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{E}[Y|X] = X + 1$.

(c) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X < 2)$ valószínűséget.

Megoldás.
(a) (10 pont)
(1 pont) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$,
(1 pont) ha $f_X(x) > 0$ (az $f_X(x) = 0$ esetre a megoldás során később visszatérünk).
(1 pont) Határozzuk meg először $f_X(x)$-et, $f_X(x) = 0$, ha $x \leq 1$ vagy $x \geq 3$,
(1 pont) és ha $1 < x < 3$, akkor $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}y$
(1 pont) $= \int_2^{2x} \frac{1}{4}\mathrm{d}y$ (az előző lépéssel összevonható, elég, ha az utóbbi képlet szerepel, de az fontos, hogy $1 < x < 3$)
(1 pont) $\left[\frac{1}{4}y\right]_{y=2}^{y=2x}$
(1 pont) $= x/2 - 1/2$.
(1 pont) Tehát ha $1 < x < 3$ (vagy: ha $f_X(x) > 0$), akkor: ha $2 < y < 2x$, akkor $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1/4}{x/2-1/2} = \frac{1}{2x-2}$,
(1 pont) ha pedig $y \leq 2$ vagy $y \geq 2$, akkor $f_{Y|X}(y|x) = 0$.

(1 pont) Továbbá $f_{Y|X}(y|x) = 0$ (minden y-ra, de nem baj, ha ezt nem hangsúlyozza), ha $f_X(x) = 0$, azaz ha $x \leq 1$ vagy $x \geq 3$.
(b) (6 pont)
(1 pont) A regressziós függvény $\mathbb{E}[Y|X = x] = g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y$ (a két jelölésből az egyik elég, és nem kell odaírni szöveggel, hogy regressziós függvény),
(1 pont) $= \int_2^{2x} \frac{y}{2x-2}\mathrm{d}y$ (a két lépés összevonható, ha világos, hogy honnan jön az y és honnan az $1/(2x-2)$ mint szorzó)
(0 pont) $= \frac{1}{2x-2}\int_2^{2x} y\mathrm{d}y$
(1 pont) $= \frac{1}{2x-2}\left[y^2/2\right]_{y=2}^{2x}$
(1 pont) $= \frac{1}{2x-2}(2x^2-2)$
(1 pont) $= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$.
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(Y|X)(= g(X)) = X+1$, amit bizonyítani kellett.

2. megoldás.
(1 pont) Az (a) feladat szerint $y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$ adott $1 < x < 3$ esetén konstans a $(2, 2x)$ intervallumon és különben 0 (ez az 1 pont akkor is jár, ha nem írja oda, hogy különben 0),
(2 pont) ezért feltéve, hogy $X = x$, Y egyenletes eloszlású a $(2, 2x)$ intervallumon (vagy még jobb: X ismeretében Y egyenletes eloszlású a $(2, 2X)$ intervallumon; ha ezt írja, akkor nem kell semmit x-szel leírni, csak X-szel),
(2 pont) tehát $\mathbb{E}[Y|X = x]$ (a $(2, 2x)$ intervallum középpontjával, azaz) $\frac{2+2x}{2} = x+1$-gyel egyenlő,
(1 pont) így $\mathbb{E}[Y|X] = X+1$.

Ha valami olyasmit ír a számolásokat kihagyva és az (a) eredményének felhasználása nélkül (vagy abban az esetben, ha az (a)-ra rossz megoldást kapott), hogy feltéve, hogy X ismeretében Y egyenletes eloszlású a $[2, 2X]$ intervallumon és ezért $\mathbb{E}[Y|X = x] = \frac{2+2x}{2} = x+1$, arra lehet adni max. 3 pontot, és arra, hogy ebből $\mathbb{E}[Y|X] = X+1$ is következik, jár még 1 pont. A maradék 2 pont akkor jár, ha ezt valahogy értelmesen megindokolja, pl. azt mondja, hogy mivel az együttes sűrűségfüggvény konstans azon a derékszögű háromszögön, ahol nem 0, adott $x \in (1, 3)$ esetén $y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$ is konstans $(2, 2x)$-en (itt nemcsak az fontos, hogy konstans, hanem hogy hol).

(c) (4 pont)
1. megoldás.
(1+1 pont) Felhasználva, hogy f_X-et már meghatároztuk (ezt nem muszáj odaírni), $\mathbb{P}(X < 2) = \int_{-\infty}^{2} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{d}x$ (a két lépés összevonható, elég, ha a második kifejezés szerepel)
(1 pont) $= \left[x^2/4 - \frac{x}{2}\right]_1^2$
(1 pont) $= 4/4 - 2/2 - 1/4 + 1/2$
(0 pont) $= 1/4$.
2. megoldás: klasszikus együttes sűrűségfüggvényes számolással. Itt az erőfeszítések mértékéhez képest sajnos viszonylag kevés pont jár.
(1 pont) $\mathbb{P}(X < 2)(= \mathbb{P}(1 < X < 2, 2 < Y < 2X)) = \int_1^2 \frac{1}{4}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ (ez a két lépés összevonható és elég, ha a második kifejezés szerepel, viszont ha a második nincs meg, de az első még helyes, arra jár egy pont)
(1 pont) $= \int_1^2 \left[\frac{1}{4}y\right]_{y=2}^{2x}\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_1^2 (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{x=1}^{2}$
(0 pont) $= \frac{4-4-1+2}{4} = \frac{1}{4}$.

3. megoldás: geometriai valószínűségi mezővel. Szintén
(1 pont) Az (X, Y) véletlen pont választása megegyezik egy (egyenletes) véletlen pont választásával az

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x < 3, 2 < y < 2x\}$$

derékszögű háromszögben. (Ehelyett a formális leírás helyett jó egy helyes, értelmezhető ábra is. Ezért az 1 pontért nem kell indokolni; az indoklás az, hogy a sűrűségfüggvény pont ezen a háromszögön konstans és nem 0, mindenhol máshol pedig 0.)
(1 pont) (Ez az Ω eseménytér,) ennek a területe 4.
(1 pont) A kedvező terület ennek a háromszögnek az $x = 2$ egyenestől balra eső része. Ez egy (az Ω-val hasonló) derékszögű háromszög, amelynek az oldalhosszai 1 és 2, tehát a területe 1.
(1 pont) Így a geometriai valószínűségi mező képlete szerint a keresett valószínűség a kedvező és az összes terület hányadosa, vagyis 1/4.

6. * Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek $X_1, \ldots, X_n$ fae. $\mathrm{U}(0; \vartheta)$ eloszlású valószínűségi változók, ahol $\vartheta > 0$ egy ismeretlen paraméter.

   (a) A minta rögzített $x_1, \ldots, x_n$ realizációja esetén határozzuk meg a likelihood-függvény $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n)$ értékét.

   (b) Adjunk a minta alapján maximum likelihood becslést ϑ-ra.

Megoldás.
Ez a példa nagyon hasonló a jegyzetkiegészítésben szereplő 14.2.10. Példához.
(a) (8 pont)
(3+1 pont) (Az egyenletes eloszlás tulajdonságai miatt) az f_ϑ sűrűségfüggvény

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta}, & \text{ha } x \in (0, \vartheta), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}.$$

(Az 1. sorban 1 pont a képletre, 1–1 a határokra, 1 pont a 2. sorra.)
(3+1 pont) Így a likelihood-függvény $(X_1, \ldots, X_n)$ bármely $(x_1, \ldots, x_n)$ realizációja esetén

$$L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta^n}, & \text{ha } x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \vartheta), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(Az 1. sorban 1 pont a képletre, összesen 1 pont a határokra, ami csak akkor jár, ha tökéletes, és 1 pont arra, hogy az összes x_i ebbe az intervallumba esik. 1 pont a 2. sorra.)
(b) (12 pont)
(3 pont) Az intervallum hosszát mindaddig csökkenthetjük (és ezzel a likelihood-függvényt növelhetjük), amíg az $(x_1, \ldots, x_n)$ az $(X_1, \ldots, X_n)$ egy realizációja marad,
(2 pont) azaz amíg

$$\max\{x_1, \ldots, x_n\} < \vartheta.$$

(3 pont) Így a likelihood-függvény éppen abban a határesetben lesz maximális, amikor $\max\{x_1, \ldots, x_n\} = \vartheta$. (Ha ezt máshogy jól megindokolja, akkor is jár az előbbi 3+2 pont is.) (Ebben az esetben $(x_1, \ldots, x_n)$ már éppen nem realizáció, de bármely $\vartheta > \max\{x_1 \ldots, x_n\}$ esetén igen – ezt nem kell odaírni.)
(2 pont) Ezért az $(x_1, \ldots, x_n)$ realizációhoz tartozó maximum likelihood becslésünk

$$\vartheta_*(x_1, \ldots, x_n) = \max\{x_1, \ldots, x_n\},$$

(2 pont) a maximum likelihood becslésünk pedig

$$\vartheta_*(X_1, \ldots, X_n) = \max\{X_1, \ldots, X_n\} = X_n^*.$$

(Az X_n^* jelölést nem szükséges használni, de ha használja, akkor az elég önmagában is.)

További megjegyzések a javításhoz:

- Ha a maximumot összekeveri a minimummal vagy az előjeleket rontja el, akkor összesen 2–2 pont levonás.
- Ha arra hivatkozik, hogy ez ugyanaz, mint a jegyzetkiegészítésbeli példa, és emiatt mindent -1-szer kell venni és a $-\min$ helyett max lesz, arra önmagában is jár a b)-ben 6 pont. A teljes pontszám akkor jár, ha helyesen leírja, hogy az $x \mapsto -x$ transzformáció hogyan hat a likelihood-függvényre.
- Ha a b)-ben log-likelihood-függvényes módszerrel próbálkozik, akkor a log-likelihood-függvény helyes levezetéséért 2 pont jár, ϑ szerinti parciális deriválására szintén 2 pont. Annak megállapítására, hogy a deriváltnak sehol nincs zérushelye ott, ahol $(x_1, \ldots, x_n)$ realizáció, jár 3 pont. További 3 pont jár arra, ha megnézi a határokat és úgy megtalálja a helyes likelihood becslést adott realizáció esetén, végül 2 pont jár a maximum likelihood becslés megadására. (A log-likelihood függvényt nem muszáj meghatározni, lehet a likelihood-függvényt közvetlenül deriválni, amire jár összesen 4 pont, onnan pedig a pontozás a log-likelihood-függvényes módszerhez hasonlóan megy tovább a derivált zérushelyeinek elemzésével.) Ez a megoldás igen munkaigényes a javasolt megoldáshoz képest, és végeredményben csak az indoklást helyettesíti a log-likelihood-függvényes módszer, magát a megoldást ugyanúgy kell levezetni, mint a javasolt módszer esetén.