

Zárthelyi dolgozat

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontoszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontoszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontoszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozathoz nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontoszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírtól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Az A , B és C eseményekről tudjuk, hogy A és B közül legalább az egyik mindig bekövetkezik, A és C függetlenek, valamint $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0,6$ és $\mathbb{P}(C) = 0,1$. Válaszoljuk meg (indoklással!) az alábbi kérdéseket.
 - (a) Mennyi a valószínűsége, hogy A és C is (egyszerre) bekövetkezik?
 - (b) Mennyi a valószínűsége, hogy A és B is (egyszerre) bekövetkezik?
 - (c) Mennyi $\mathbb{P}(B|A)$?
 - (d) Mennyi a valószínűsége, hogy sem A , sem C nem következik be?

Megoldás.

(a) (4 pont)

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap C)$ (azt soha nem muszáj odaírni, hogy „a keresett valószínűség”, csak derüljön ki, hogy ezt számolja)

(1 pont) $= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(C)$

(1 pont) $= 0,06$ (közönséges tört alakban is jó),

(1 pont) mert függetlenek.

(b) (7 pont)

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap B)$.

(1 pont) A Poincaré-formula szerint (szitaformula szintén OK, de meg kell nevezni)

(2 pont) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,

(1 pont) átrendezve $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$. (Az előzővel összevonható, de csak ha helyesen szerepel, különben nem jár részpont.)

(1 pont) Mivel A és B közül legalább az egyik esemény mindig bekövetkezik, ezért $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$.

(1 pont) Így $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,6 + 0,6 - 1 = 0,2$ (ez OK részletszámítások nélkül is, $\frac{1}{5}$ alakban is).

(c) (3 pont)

(1 pont) (Definíció szerint – ezt nem kell odaírni) $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A \cap B) / \mathbb{P}(A)$

$$(1 \text{ pont}) = 0,2/0,6$$

$$(1 \text{ pont}) = \frac{1}{3} \text{ (tizedestört alakban is OK).}$$

(d) (6 pont)

$$(1 \text{ pont}) \text{ A keresett valószínűség } \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{C}).$$

Innen 1. megoldás.

(2 pont) Mivel A és C függetlenek, ezért $\overline{A}$ és $\overline{C}$ is.

$$(1 \text{ pont}) \text{ Tehát } \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(\overline{A}) \mathbb{P}(\overline{C})$$

$$(1 \text{ pont}) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(C))$$

$$(1 \text{ pont}) = 0,4 \cdot 0,9 = 0,36 \text{ (ez OK részletszámítások nélkül is, közös tizedestört alakban is).}$$

2. megoldás.

$$(1 \text{ pont}) \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup C}).$$

$$(1 \text{ pont}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup C).$$

(0 pont) Ismét a Poincaré-formula szerint

$$(1 \text{ pont}) \mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C)$$

$$(1 \text{ pont}) = 0,6 + 0,1 - 0,06 = 0,64,$$

$$(1 \text{ pont}) \text{ tehát a keresett valószínűség } 0,36.$$

2. Az I épület portáján 2 db kék, 3 db zöld, 1 db fekete és 2 db piros filctoll található. Valszám gyakorlat előtt véletlenszerűen (azonos valószínűséggel) kiválasztunk egyet a filctollak közül, amivel a gyakorlaton írni fogunk a táblára. Tudjuk, hogy egy kék filctoll $\frac{2}{5}$, egy zöld $\frac{1}{4}$, egy fekete $\frac{1}{5}$, egy piros pedig $\frac{1}{10}$ valószínűséggel fogy ki a gyakorlat végére.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy zöld filctollat választunk és az kifogy a gyakorlat végére?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a választott filctoll (akármilyen színű legyen is az) kifogy a gyakorlat végére?

(c) Feltéve, hogy a választott filctoll kifogyott a gyakorlat végére, mi a valószínűsége, hogy piros színű volt?

Megoldás.

Jelölje K, Z, F, P rendre azt az eseményt, hogy kék, zöld, fekete, illetve piros tollat választunk, B pedig azt az eseményt, hogy a választott toll kifogy. (Persze nem baj, ha ezeket nem nevezi el és úgy használja a tételeket.)

(a) (5 pont)

$$(1 \text{ pont}) \text{ A keresett valószínűség } \mathbb{P}(Z \cap B)$$

$$(1 \text{ pont}) = \mathbb{P}(Z) \mathbb{P}(B|Z) \text{ (ha ez megvan, akkor az előző pontot is meg lehet adni)}$$

$$(1+1 \text{ pont}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} \text{ (nem kell jobban indokolni, de } \mathbb{P}(Z) \text{ azért ennyi, mert 10 tollból 3 zöld és a valószínűségi mező klasszikus)}$$

$$(0 \text{ pont}) = \frac{3}{32} (= 0,09375),$$

(1 pont) ahol az első egyenlőségénél a szorzási szabályt használtuk (nem kell a szorzási szabályra hivatkozni, ha a feltételes valószínűség definíciójából levezeti a szorzási szabálynak megfelelő képletet).

(b) (8 pont)

$$(1 \text{ pont}) \text{ A keresett valószínűség } \mathbb{P}(B).$$

(1 pont) A teljes valószínűség tétele (elég: TVT) szerint

$$(1 \text{ pont}) \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(K) \mathbb{P}(B|K) + \mathbb{P}(Z) \mathbb{P}(B|Z) + \mathbb{P}(F) \mathbb{P}(B|F) + \mathbb{P}(P) \mathbb{P}(B|P)$$

$$(2 \text{ pont}) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{10} \text{ (az (a)-hoz hasonlóan; nem kell indokolni)}$$

$$(1 \text{ pont}) = \frac{16+15+4+4}{160} = \frac{39}{160} (= 0,24375). \text{ (OK további részletszámítások nélkül is, ha megvan, hogy honnan jön.)}$$

(1 pont) A TVT-t azért használhatjuk, mert a K, Z, F, P események teljes eseményrendszert

alkotnak,

(1 pont) mivel páronként kizáróak és az uniójuk a teljes eseménytér (ha ez megvan, akkor az előző pont is jár; több indoklás nem kell, mert nyilvánvalóan igaz a kijelentés, egyszerre csak egyfajta színű filctollat húzhatunk és egyfajta mindig kihúzunk).

Itt is igaz, hogy ha levezeti a TVT-t (akár csak az itt szükséges konkrét formáját) a feltételes valószínűség definíciójából, akkor az elég indoklásnak és nem kell hivatkozni semmi másra.

(c) (7 pont)

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(P|B)$.

(1 pont) Bayes-tétellel (szintén jó: Bayes-formula, vagy bármi, amiben benne van a Bayes. Az egyszerű Bayes-tétel nem jó, de ha utána jó képlet jön, akkor arra is megadjuk a pontot)

$$(2 \text{ pont}) \mathbb{P}(P|B) = \frac{\mathbb{P}(B|P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(K)\mathbb{P}(B|K)+\mathbb{P}(Z)\mathbb{P}(B|Z)+\mathbb{P}(F)\mathbb{P}(B|F)+\mathbb{P}(P)\mathbb{P}(B|P)}$$

(a két alakból elég az egyik. Az első alak esetén a Bayes-tétel helyett jó a szorzási szabályra is hivatkozni, illetve arra, hogy $\mathbb{P}(B)$ -t már kiszámoltuk. Ha a szorzási szabályra már egyszer hivatkozott az (a)-ban, akkor nem is kell még egyszer.)

$$(1+1 \text{ pont}) = \frac{\frac{2}{39} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{1}{160}}$$

$$(1 \text{ pont}) = \frac{4}{39} (\approx 0,1026).$$

3. Egy villamosvonalon mindennap egymástól függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel fordul elő üzemzavar.

(a) 20 napon keresztül mindennap megfigyeljük, hogy aznap előfordult-e üzemzavar a vonalon. Jelölje X azon napok számát a 20 nap közül, amikor előfordult üzemzavar. Adjuk meg X várható értékét és szórását, valamint a $\mathbb{P}(X > 2)$ valószínűséget.

(b) Egy adott naptól kezdve – nevezzük ezt az 1. napnak – mindennap megfigyeljük, hogy volt-e üzemzavar a vonalon, egészen addig, amíg az első üzemzavart nem tapasztaljuk. Mennyi a valószínűsége, hogy ez az első üzemzavar pontosan a 3. napon fog bekövetkezni? És feltéve, hogy az első három nap egyikén sem volt üzemzavar, mi a valószínűsége, hogy az első öt nap egyikén sem tapasztalunk üzemzavart?

Megoldás.

(a) (10 pont)

(1 pont) X binomiális eloszlású

(1+1 pont) $n = 20$ és $p = \frac{1}{10}$ paraméterrel. (Elég: $X \sim \text{Bin}(20; \frac{1}{10})$). (Nem kell indokolni, de az indoklás a szokásos: n kísérletet végzünk, amelyek egymástól függetlenül p valószínűséggel sikeresek, ahol a siker itt az üzemzavart jelenti, és X a sikerek száma. Nem baj, ha nem használja az n és a p jelöléseket, ha később kiderül, hogy helyesen használja a paramétereket.).

$$(1 \text{ pont}) \text{ Ezért } \mathbb{E}(X) = np = 2$$

$$(1 \text{ pont}) \text{ és } \mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$$

$$(1 \text{ pont}) = \sqrt{np(1-p)} \text{ (ha ez megvan, akár konkrét } n\text{-nel és } p\text{-vel behelyettesítve, akkor az előző pont is OK)}$$

$$(1 \text{ pont}) = \sqrt{1,8} \approx 1,3416.$$

$$(1 \text{ pont}) \mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2)$$

$$(1 \text{ pont}) = 1 - (1 - 0,1)^{20} - 20 \cdot 0,1 \cdot (1 - 0,1)^{19} - \underbrace{\binom{20}{2} 0,1^2 \cdot (1 - 0,1)^{18}}_{=190} \text{ (} n\text{-nel és } p\text{-vel is OK,}$$

behelyettesítve is OK; itt azt használtuk, hogy $\binom{20}{0} = 1, \binom{20}{1} = 20$)

$$(1 \text{ pont}) \approx 0,3231.$$

(b) (10 pont)

(1 pont) Jelölje Y azon nap sorszámát, amikor először fordul elő üzemzavar. Ekkor Y geometriai eloszlású

$$(1 \text{ pont}) p = \frac{1}{10} \text{ paraméterrel (indokolni itt sem kell, elég: } Y \sim \text{Geo}(\frac{1}{10})).$$

(1 pont) Az első keresett valószínűség $\mathbb{P}(Y = 3)$

(1 pont) $= (1 - 0,1)^{3-1} 0,1$ (p -vel is OK)

(1 pont) $= 0,081$.

(1 pont) A másik keresett (feltételes) valószínűség $\mathbb{P}(Y > 5 | Y > 3)$,

(1 pont) ami a geometriai eloszlás örökifjúsága (elég: örökifjúság) miatt

(1 pont) $\mathbb{P}(Y > 2)$ -vel egyenlő,

(1 pont) és $\mathbb{P}(Y > 2) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2) = 1 - 0,1 - 0,9 \cdot 0,1$

(1 pont) $= 0,81$.

Ha pl. $\mathbb{P}(Y \geq 4 | Y \geq 2)$ -t ír, az is jó (bár ebben az esetben nehezebb lesz az örökifjúságot jól használni).

4. Egy kalapba beteszünk egy cédulát, amelyikre a 3-as számot írtuk, és egy olyat, amelyikre a 4-eset. Egy másik kalapba pedig egy olyan cédulát teszünk, amelyikre a 2-es számot írtuk, és egy olyat, amelyikre a 3-ast. Véletlenszerűen kihúzzunk mindkét kalapból egy-egy számot. Defináljuk az X és Y valószínűségi változókat a következőképpen: legyen az X valószínűségi változó értéke 2, ha az első kalapból a 4-es számot húztuk ki, különben pedig legyen X értéke 1, Y értéke pedig legyen azon kalapok száma, ahonnan 3-as számot húztunk. (Például ha az első kalapból a 3-as számot húztuk, a másodikból pedig a 2-eset, akkor $X = 1$ és $Y = 1$.)

- (a) Határozzuk meg X és Y együttes eloszlását (azaz $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$ értékét minden olyan k -ra és ℓ -re, amire ez a valószínűség pozitív) táblázatos formában.
- (b) Határozzuk meg X és Y peremeloszlásait is.
- (c) Független-e X és Y ?
- (d) Határozzuk meg az X^3 (figyelem, harmadik hatvány!) valószínűségi változó várható értékét.

Megoldás.

$Y \backslash X$	1	2	p_Y
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
p_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(1)

Pontozás:

(a) (6 pont)

(6 pont) Tökéletes együttes eloszlás táblázat.

Ha nem tökéletes: minden helyes nem 0 értékre 1–1 pont jár.

Ha a táblázatban negatív vagy 1-nél nagyobb valószínűség is előfordul, akkor az (a)-ra egyből 0 pont!

Ha a táblázatban szereplő valószínűségek összege nem 1, akkor összesen max. 3 pont.

(b) (5 pont)

(3 pont) Y súlyfüggvényének értékeit a megfelelő sorok összegzésével kapjuk (nem kell indokolni) – ezt nem kell kijelenteni, csak alkalmazni. Ha csak kijelenti, de nem számolja végig, arra 1 pont.

(2 pont) X súlyfüggvényének értékeit a megfelelő oszlopok összegzésével kapjuk.

Ha X és Y szerepét összekeveri, akkor az (a)-ra max. 4, a (b)-re max. 2 pont. Szabad a táblázatot transzponálva is felrajzolni, de akkor annak megfelelően kell a peremeloszlásokat is kiszámolni.

Az (a)-beli hibák továbbgörgetéséért itt nem kell újra pontot levonni, de negatív vagy 1-nél nagyobb valószínűségek itt sem jár pont, és ha valamelyik peremeloszlásnál az összeg nem 1,

akkor arra a peremeloszlásra max. 1 pont.

(c) (4 pont)

Önmagában annak a kijelentésére, hogy nem függetlenek, indoklás nélkül nem jár pont.

(1 pont) Nem függetlenek, mert... (valami indoklás, ami nem is helyes, de el lehet hinni, hogy komolyan gondolta)

(1 pont*) a függetlenséghez az kellene, hogy minden $k \in \text{Ran}(X)$ -re és $\ell \in \text{Ran}(Y)$ -ra $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = \ell)$ teljesüljön.

(1 pont) Talál egy olyan (k, ℓ) párt, ahol $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \neq \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = \ell)$ (ez az előző lépéssel összevonható).

(1 pont) Meggyőződik arról, hogy ezek tényleg nem egyenlőek, pl. odaírja, hogy mennyi ebben a konkrét esetben a megfelelő $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$ és $\mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = \ell)$ értéke (nem kell nagyon részletezni). Adott esetben az is elég, hogy az együttes valószínűség 0, a marginálisok szorzata meg nem 0.

*Megjegyzés: Mivel itt csak azt kell belátni, hogy *nem* függetlenek, ehhez elég, ha mutat egy ellenpéldát, és leírja, hogy ezekre a metszet valószínűsége nem a valószínűségek szorzata. Így ha minden más megvan, akkor jár a (c)-re a maximális pontszám akkor is, ha nem mondja ki, hogy a függetlenséghez ennek minden k -ra és ℓ -re teljesülnie kellene.

(d) (5 pont)

(0 pont) A transzformált várható értékére vonatkozó képlet szerint

(3 pont) $\mathbb{E}(X^3) = 1^3 \mathbb{P}(X = 1) + 2^3 \mathbb{P}(X = 2)$

(nem kell ennél általánosabb képletből kiindulni. Ha csak valami ennél általánosabb képletet ad meg, pl. $g(X)$ várható értéke van benne vagy $\text{Ran}(X)$, amit aztán nem jól konkretizál, akkor max. 2 pont. De ha nincs általánosabb képlet és a konkrét rossz, akkor nem jár részpont, pl. ha az értékek helyett a valószínűségeket emeli köbre.)

(1 pont) $= \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2}$

(1 pont) $= \frac{9}{2} (= 4,5)$.

5. Egy X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} ax, & \text{ha } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol a egy alkalmasan választott valós konstans.

(a) Határozzuk meg a értékét.

(b) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

(c) Határozzuk meg X várható értékét.

Megoldás.

(a) (7 pont)

(1 pont) Ahhoz, hogy f_X sűrűségfüggvény legyen, az kell, hogy f_X nemnegatív legyen (tehát a legyen nemnegatív – a megoldásból látni fogjuk, hogy ez teljesül. Nem baj, ha ezt csak egyszer említi, de legalább egyszer gondoljon rá)

(1 pont) és teljesüljön, hogy $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx$

(2 pont) $= \int_1^2 ax dx$ (az előzővel összevonható)

(1 pont) $= [ax^2/2]_{x=1}^2$

(1 pont) $= a(2^2/2 - 1^2/2) = \frac{3}{2}a$,

(1 pont) tehát $a = \frac{2}{3}$.

(b) (7 pont)

(1 pont) Ha $x \leq 1$, akkor $F_X(x) = 0$. (Nem kell indokolni, de ez azért van, mert $\text{Ran}(X) = (1, 2)$ alsó határáig 0 az eloszlásfüggvény értéke, mert $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$.)

- (1 pont) Ha $x \geq 2$, akkor $F_X(x) = 1$.
 (1 pont) Ha $1 < x < 2$, akkor $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$
 (2 pont) $= \int_1^x \frac{2}{3} t dt$ (az előzővel összevonható)
 (1 pont) $= [\frac{1}{3} t^2]_{t=1}^x$
 (1 pont) $= \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{3}$.
 (c) (6 pont)
 (1 pont) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$
 (2 pont) $= \int_1^2 \frac{2}{3} x^2 dx$
 (1 pont) $= [\frac{2}{9} x^3]_1^2$
 (2 pont) $= \frac{2}{9} \cdot 8 - \frac{2}{9} \cdot 1 = \frac{14}{9}$.

6. * A $(0; 2)$ nyílt intervallumon találomra (egyenletes eloszlással) választunk egy y véletlen számot. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ síkon azt a derékszögű háromszöget, amely csúcspontjainak koordinátái: $(0, 0)$, $(1, 0)$ és $(0, y)$. Jelölje X ezen háromszög átfogójának hosszúságát (vagyis az $(1, 0)$ és a $(0, y)$ csúcspontok távolságát).

- (a) Mi a valószínűsége, hogy X kisebb, mint 2?
 (b) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.
 (c) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét.
 (d) Határozzuk meg az $Z := \frac{2\sqrt{X^2 - 1}}{X}$ valószínűségi változó várható értékét. (Z eloszlását nem kötelező meghatározni.)

Megoldás.

- (a) (6 pont)
 (1 pont) $X^2 = 1^2 + y^2$ a Pitagorasz-tétel szerint (nem kell levonni pontot, ha nem hivatkozik a Pitagorasz-tételre).
 (1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X < 2)$
 (1 pont) $= \mathbb{P}(1 + y^2 < 2^2) = \mathbb{P}(y < \sqrt{3})$ (nem kell abszolút érték, mivel y csak pozitív értékeket vehet fel – de ha megvan az értékkészlet, akkor ezt már nem kell külön indokolni)
 (1 pont) $= \frac{\text{kedvező hosszúság}}{\text{összes hosszúság}}$ (valahogy hivatkozik az [egydimenziós] geometriai valószínűségi mezőre, vagy arra, hogy y egyenletes eloszlású; az nem baj, ha nem írja oda, hogy geometriai. Hivatkozásnak elfogadjuk egy jó ábrát is.)
 (1+1 pont) $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660$ (ebből 1 pont a kedvező és 1 az összes hosszúságra, az eredményt elég csak a képlettel vagy csak numerikus formában megadni).
 (b) (6 pont)
 (1 pont) $\text{Ran}(X) = (1; \sqrt{5})$ (az (a) alapján; elég, ha ez később, implicit módon derül ki).
 (1 pont) Az eloszlásfüggvény értéke az x pontban (ahol $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges) $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$.
 (1 pont) Így $F_X(x) = 0$, ha $x \leq 1$
 (1 pont) és $F_X(x) = 1$, ha $x \geq \sqrt{5}$.
 (2 pont) $1 < x < \sqrt{5}$ esetén ugyanaz a számolás, mint az (a)-ban $x = 2$ esetén, azt adja, hogy $\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(1 + y^2 < x^2) = \mathbb{P}(y < \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2}$. (Itt indoklásnak jó az is, ha végigszámolja, – de nem kell újra a geometriai val. mezős indoklás – és jó az is, ha azt mondja, hogy ez analóg az (a)-val, csak x más. Ha semmi indoklás nincs, akkor max. 1 pont.)
 Az (a)-(b)-ben, ha hiányzik a formális megoldás, de van egy jó és előremutató, nem hiányos ábra, amiből kiderül, hogy mi X és hogyan lehet y segítségével kiszámolni a hosszúságát, arra lehet adni 1 pontot. Ha az is kiderül az ábrából, hogy hol van rajta az $\{X < 2\}$ vagy $\{X < x\}$ esemény, akkor még 1 pontot.
 (c) (4 pont)
 (1 pont) Ha $1 < x < \sqrt{5}$, akkor $f_X(x) = F'_X(x)$

(2 pont) $= \frac{2x}{2 \cdot 2\sqrt{x^2-1}}$ ($= \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}}$. Ha csak egy kis hiba van, például hiányzik egy 2-es vagy 1/2-es szorzó, akkor a 2 pontból 1-et meg lehet adni. Ha elfelejt beszorozni a belső függvény deriváltjával, akkor nem.).

(1 pont) $f_X(x) = 0$, ha $x \leq 1$ vagy $\sqrt{5} \leq x$. (Nem kell külön indokolni. Ha $x < 1$ vagy $x > 5$, akkor itt is igaz, hogy $f_X(x) = F'_X(x)$.)

(d) (4 pont)

(0 pont) A transzformált várható értékére vonatkozó képlet szerint

(1 pont) $\mathbb{E}(Z) \left(= \mathbb{E}\left(\frac{2\sqrt{X^2-1}}{X}\right) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} f_X(x) dx$

(1 pont) $= \int_1^{\sqrt{5}} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}} dx$ (az előzővel összevonható)

(1 pont) $= \int_1^{\sqrt{5}} 1 dx$

(1 pont) $= [x]_1^{\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1 \approx 1,236$ (nem baj, ha nem hangsúlyozza külön a primitív függvényt, és elég csak a képlettel vagy csak numerikus formában megadni).

Tudnivalók: A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. Hivatkozni csak az előadáson elhangzottakra lehet. A zárthelyi első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.