

Zárthelyi dolgozat Valószínűesszámitás és statisztikából, 2024. október 22.

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozathoz nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírtól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. A $[0, 1]$ intervallumon egymás után (egymástól függetlenül) találomra választunk két számot. Mennyi a valószínűsége, hogy a két szám közül az elsőként választott szám a nagyobb és ez a szám is kisebb 0,75-nél, ugyanakkor a másodikként választott szám értéke is nagyobb 0,5-nél?

Megoldás.

(2 pont) A véletlen kísérlet megegyezik egy véletlen pont választásával a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzetben.

(1 pont) Ez az Ω eseménytér.

(3 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség $= \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\Omega}}$. (T_{Ω} helyett $T_{\text{összes}}$ vagy hasonló is jó.)

(1 pont) $T_{\Omega} = 1$ (indoklás nélkül is OK).

(4 pont) (x, y) -nal jelölve a véletlen pontot a négyzetben, a kedvező terület a négyzetnek az a része, ahol $0,5 < y < x < 0,75$.

(Ha nincs meg mind a három egyenlőtlenség, de kettő jó, akkor 2 pont, ha csak egy jó, akkor 1 pont. Ne vonjunk le pontot, ha nem szigorú egyenlőtlenségeket ír.)

(3 pont) jó ábra

(2 pont) A kedvező terület tehát a négyzetnek az $y = x$, $y = 0,5$ és $x = 0,75$ egyenletű egyenesek közötti része (elég, ha ez az ábráról derül ki, pl. besatírozza a kedvező területet).

(1 pont) Ez egy derékszögű egyenlőszárú háromszög 0,25 hosszú befogókkal,

(2 pont) tehát a területe $\frac{0,25 \cdot 0,25}{2} = 0,03125 = \frac{1}{32}$.

(Lehet másra is hivatkozni, pl. a kedvező terület egy bizonyos négyzet területének fele stb.)

(1 pont) Tehát a keresett valószínűség is 0,03125 (ha egyértelmű, hogy ezt a számot szánja végeredménynek, akkor ne vonjunk le pontot, ha nem hangsúlyozza, hogy le kell osztani az összes területtel, vagyis 1-gyel).

Megjegyzés: Mivel a geometriai valószínűségi mezős feladatok megoldásait a gyakorlatokon is ritkán írtuk fel ennyire részletesen, ebben a feladatban azokra a lépésekre is jár a pont, amiket a hallgató nem írt fel expliciten, de a későbbi megoldásból egyértelműen kiderül, hogy jól

használta őket. Pl. ha kihagyja az első lépést, de utána a megfelelő módon rajzol ábrát/számol területeket, akkor ez a 2 pont is jár, vagy ha nem írja fel, hogy mi Ω , de később világos, hogy jól határozza meg a területét (és nem csak véletlenül jön ki neki 1 megoldásként), akkor arra is jár pont stb. stb. Ha nincs ábra, de a szövegből/számításokból kiderül, hogy a megfelelő síkidomok területét számolja, akkor az ábrára is adjunk pontot. Ha azonban a későbbi lépés, ami a hiányzó jó, de expliciten nem szereplő lépést használná, hibás, akkor sajnos a hiányzó lépésre sem lehet pontot adni.

Ezen belül konkrétan: ha nem rajzol ábrát, de nemcsak a $0,5 < y < x < 0,75$ egyenlőtlenség-lánc van meg (amire fent külön járt pont), hanem az is, hogy geometriailag hogy néz ki/hogy számolható ki a kedvező terület, akkor helyes számolási mód (nem pusztán helyes végeredmény!) esetén elfogadható az ábra hiányában is annak megnevezése, hogy a kedvező terület egy derékszögű egyenlőszárú háromszög. Hibás számolás esetén azonban az ábrára adandó pontszám is elvész.

2. Az A , B és C eseményekről tudjuk, hogy páronként függetlenek (azaz bármely kettő független egymástól), $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$, továbbá $\frac{1}{9}$ annak a valószínűsége, hogy a három esemény közül egyik sem következik be. Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom esemény bekövetkezik? Együttesen független-e A , B és C ?

Megoldás. (13 pont az első, 7 a második kérdésre)

(1 pont) A feladat első részében a keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

(2 pont) A feladat szerint $\frac{1}{9} = \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ (a két lépés összevonható pontlevonás nélkül),

(1 pont) tehát $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \frac{8}{9}$ (ez az 1 pont akkor is jár, ha csak a későbbiekben derül ki, hogy ezzel számol).

(2 pont) A függetlenségek/páronkénti függetlenség miatt $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ és $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ (ha nem írja ki, hogy a páronkénti függetlenség miatt, de az megvan, hogy a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata, akkor ne vonjunk le pontot. De ha nem szerepel itt mind a három egyenlőtlenség és később sem derül ki, hogy mind igaz, akkor max. 1 pont),

(1 pont) tehát mindhárom kettes metszet valószínűsége $\frac{1}{9}$.

(1 pont) A Poincaré-formula szerint

(0 pont) $\frac{8}{9} =$

(3 pont) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

(1 pont) $= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ (ha nem írja ki ennyire részletesen a számokat, de kijön egy helyes numerikus eredmény és korábban már szerepeltek az egyes valószínűségek, az rendben van),

(1 pont) amiből $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{2}{9}$.

Innen látszik, hogy a feladat sajnos nem jó, mert $A \cap B$ valószínűsége kisebb, mint $A \cap B \cap C$ -é, tehát nem léteznek ilyen A, B, C események. Mivel erre a feladat kitűzésekor nem jöttünk rá, elfogadjuk a lenti megoldást, amely úgy tesz, mint ha léteznének. Ha valaki a $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ kiszámolása alapján rájön, hogy ez a probléma fennáll, akkor az együttes függetlenség kiszámolására járó 7 pontot automatikusan megkapja (vagy ha már azelőtt rájön, hogy $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ -t végigszámolta volna, és kellően megindokolja, hogy mi a probléma, akkor is jár a feladat hátralevő részére a maximális pontszám).

(3 pont) Az együttes függetlenséghez elég azt ellenőrizni, hogy $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ teljesül-e (ha ez csak impliciten derül ki, de megemlíti az egyenlet mindkét oldalát, akkor ebből jár 2 pont, és ha világos, hogy azt nézi meg, hogy egyenlőek-e, akkor 3 pont jár),

(1 pont) mivel azt tudjuk, hogy páronként függetlenek (vagy: mivel tudjuk, hogy a kettes metszetekre teljesül a függetlenség definíciója; ezt persze egyesével is ki lehet fejezni).

Ha valaki belátja, hogy $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, és ebből helyesen következtet arra, hogy emiatt A, B, C nem lehet együttesen független, akkor nem kell a páronkénti függetlenségre hivatkozni. De például ha valaki azt mondja, hogy $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ ekvivalens az együttes függetlenséggel, vagy (önmagában, a páronkénti függetlenség nélkül) következik belőle az együttes függetlenség, az nem jó.

(2 pont) $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$,

(0 pont) és láttuk, hogy $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{2}{9}$,

(1 pont) tehát nem együttesen függetlenek (az is jó, ha azt írja, hogy „nem függetlenek”).

A feladatnak ebben a részében nem adható részpontszám arra, ha úgy tippeli be, hogy nem együttesen függetlenek, hogy nem jelenik meg a megoldásban A, B és C (vagy esetleg a komplementereik) hármas metszete.

Lehetséges további jó megoldás pl.: megnézi, hogy $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ megegyezik-e $\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(\overline{C})$ -vel (ami ekvivalens a hármas metszetre vonatkozó feltétellel, mert ha A, B, C páronként függetlenek, akkor $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ is azok). Ekkor nem kell $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ értéke, mert $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{1}{9}$ a feladat szerint és $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - 1/3 = 2/3$.

Jó úgy is, hogy kiszámolja pl. $\mathbb{P}(C|A \cap B)$ -t és kijön neki, hogy ez nem $\mathbb{P}(C)$, ezért C nem lehet független $A \cap B$ -től és így az együttes függetlenség sem teljesülhet.

Ilyen megoldásoknál a teljes pontszámhoz kell az itt megadott teljes indoklás (ami bővebb, mint a standard megoldás esetén).

3. Egy cégnek két irodája van, az egyik Prágában, a másik pedig Isztambulban, ahol a cég dolgozóinak fele-fele dolgozik. A prágai irodában dolgozók egyharmadának kedvenc itala a kávé, másik egyharmadának az ásványvíz, harmadik egyharmadának pedig a sör. Az isztambuli irodában dolgozók felének kedvenc itala szintén a kávé, másik felének pedig a tea. (Minden dolgozónak pontosan egy kedvenc itala van, a felsoroltak közül.)

Véletlenszerűen kiválasztjuk a cég egy dolgozóját.

- (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a dolgozó kedvenc itala a kávé?
- (b) Feltéve, hogy a dolgozó kedvenc itala a kávé, mi a valószínűsége, hogy Isztambulban dolgozik?
- (c) Feltéve, hogy a dolgozó kedvenc itala nem a kávé, mi a valószínűsége, hogy a sör az?

Megoldás.

Megjegyzés: Ez egy viszonylag hosszú feladat 20 pontért (ellentétben pl. az 1. és a 2. feladatban), ezért bizonyos lépésekre, amikért más feladatban külön-külön is járhatna pont, itt csak összevonva jár.

(0 pont) Jelölje K azt az eseményt, hogy a kiválasztott dolgozó kedvenc itala a kávé, S azt, hogy a sör (a többi italra nem lesz szükségünk külön-külön), P azt, hogy a kiválasztott dolgozó Prágában dolgozik és I azt, hogy Isztambulban.

(a) (9 pont)

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(K)$ (elég, ha ez impliciten derül ki).

(1 pont) A P és I események teljes eseményrendszer alkotnak,

(1 pont) mert egymás komplementerei (ehelyett az is jó, ha ellenőrzi, hogy kizáróak és az uniójuk Ω ; ha az egyik eseményt eleve a másik komplementereként jelöli és úgy mondja ki, hogy teljes eseményrendszer alkotnak, akkor további indoklás nélkül is jár a pont).

(1 pont) A feladat szerint $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(I) = 1/2$

(1 pont) és $\mathbb{P}(K|P) = 1/3$, $\mathbb{P}(K|I) = 1/2$,

(1 pont) így a teljes valószínűség tétele (elég: TVT) szerint

(2 pont) $\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(P)\mathbb{P}(K|P) + \mathbb{P}(I)\mathbb{P}(K|I)$.

(0 pont) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$

(1 pont) $= \frac{5}{12}$.

(b) (5 pont)

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(I|K)$.

(1 pont) Bayes-tétellel (ez a pont a tétel megnevezésére jár)

(1 pont) $\mathbb{P}(I|K) = \frac{\mathbb{P}(K|I)\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(K)}$ (természetesen az is jó, ha itt a nevezőre újra felírja a TVT-s képletet)

(1 pont) $= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{12}}$ (az (a) feladat alapján, tehát nem kell indokolni)

(1 pont) $= \frac{3}{5}$.

Nem tilos a Bayes-tétel használata nélkül kiszámolni $\mathbb{P}(I|K)$ -t. Ekkor valahogy ki kell számolni $\mathbb{P}(I \cap K)$ -t, aminél lehet a szorzási szabályra hivatkozni vagy a feltételes valószínűség definíciója alapján (amire nem muszáj hivatkozni) újra levezetni a szorzási szabálynak megfelelő számítást. Ilyen esetben a Bayes-tételre való hivatkozás helyett a szorzási szabályra való hivatkozásra, illetve ilyen hivatkozás hiányában a (konkrét példában) a szorzási szabálynak megfelelő számítás levezetésére jár az 1 pont.

(c) (6 pont – Bayes-tétellel is megoldható, amire szintén hivatkozni kell, itt ezt nem részletezzük)

(1 pont) $\mathbb{P}(\bar{K}) = 1 - \mathbb{P}(K) = \frac{7}{12}$ (az (a) feladat alapján, tehát nem kell rá hivatkozni),

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(S|\bar{K}) = \frac{\mathbb{P}(S \cap \bar{K})}{\mathbb{P}(\bar{K})}$

(1 pont) $= \frac{\mathbb{P}(S)}{7/12}$. (Elég, ha impliciten derül ki, hogy $S \cap \bar{K}$ ugyanaz, mint S , és az is OK, ha eleve S -sel kezdi $S \cap \bar{K}$ helyett.)

(1 pont) $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S|P)\mathbb{P}(P)$ (itt most nem jár külön pont a szorzási szabályra való hivatkozásra)

(1 pont) $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$,

(1 pont) vagyis $\mathbb{P}(S|\bar{K}) = \frac{1/6}{7/12} = \frac{2}{7}$.

4. Egy épületben négy lift van. Minden lift mindennap $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nem működik, függetlenül attól, hogy a többi lift közül aznap melyikek működnek, és függetlenül attól is, hogy a többi napon melyik liftek működnek (ideértve az adott liftet is).

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott napon legfeljebb két lift nem működik?

(b) Egy adott naptól kezdve mindennap megfigyeljük, hogy melyik napon melyik liftek működnek, nevezzük ezt az első napnak. Jelölje Y azon nap sorszámát, amikor először fordul elő, hogy egyik lift sem működik.

i. Milyen eloszlású Y és milyen paraméterrel/paraméterekkel?

Az erre a kérdésre adott választ kivételesen nem kell indokolni.

ii. Határozzuk meg Y szórását és Y^2 várható értékét.

iii. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y > 2024|Y > 2022)$ feltételes valószínűség értékét.

Megoldás.

(a) (7 pont)

(1 pont) A nem működő liftek számát jelöljük X -szel, ekkor X binomiális eloszlású (itt az indoklásra nem jár külön pont)

(1 pont) $n = 4$ és $p = 1/2$ paraméterrel.

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \leq 2)$

(1 pont) $= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$

(2 pont) $= \binom{4}{0} \cdot (1/2)^4 + \binom{4}{1} \cdot (1/2) \cdot (1/2)^3 + \binom{4}{2} \cdot (1/2)^2 \cdot (1/2)^2$ (a $\binom{4}{0}$ elhagyható és a $\binom{4}{1}$ helyett jó az is, hogy 4, a $\binom{4}{2}$ helyett az, hogy $\frac{4 \cdot 3}{2}$, és ha azt írja, hogy 6, jelöljük meg, hogy ez így hiányos, de ne vonjunk le pontot, illetve lehet minden tagnál $(1/2)^4$ -t írni),

(1 pont) $= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16} = 0,6875$ (szabad négy értékes jegyre kerekíteni és az is jó, ha

eleve numerikus értékekkel számol – ha kiderül, hogy hogyan számolt, beleértve azt is, hogy $\binom{4}{2} = 6$. Elég közönséges tört alakban megadni a végeredményt.).

Természetesen lehet azt a Z val. változót is tekinteni, amelyik a működő liftek számát jelöli, ekkor $Z \sim B(4; 1/2)$ és $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = 4 - k)$, ha $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Nem kötelező a binomiális eloszlásra hivatkozni, meg lehet magyarázni kombinatorikai alapon is, hogy miért ezek a valószínűségek lesznek. Ekkor azonban kell egy megfelelő eseménytér és arra is hivatkozni kell, hogy a valószínűségi mező klasszikus (vagy: kedvező/összes képlettel számolhatunk) és el kell mondani, hogy hány eleme van; erre jár az 1+1 pont a binomiális eloszlás és paramétere helyett.

(b) (összesen 13 pont)

(i) (2 pont):

(1 pont) Y geometriai eloszlású

(1 pont) $p = (1/2)^4 = 1/16 (= 0,0625)$ paraméterrel. (Ha végig kerekített tizedestört alakokkal számol és sok/jelentős a kerekítési hiba, akkor vonjunk le 1 pontot.)

(ii) (6 pont):

(1 pont) $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$

(1 pont) $= \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$

(1 pont) $= \sqrt{\frac{15/16}{1/16^2}} = \sqrt{15 \cdot 16} = \sqrt{240} \approx 15,4919$ (elég, ha az utóbbi kettő közül egy szerepel, és 15,5 már jó).

Ne vonjunk le pontot, ha nem írja oda az $\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$ -et általános p -re, de kiderül, hogy a konkrét p -re ezt használja. Ha azonban rossz képletbe helyettesít be és az általános képlet hiányzik, akkor az utolsó két pontból egyik sem jár.

(1 pont) $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{D}^2(Y) + \mathbb{E}(Y)^2$.

(1 pont) $\mathbb{E}(Y)^2 = \frac{1}{p^2} = 16^2 = 256$,

(erre itt csak 1 pont jár, mert különben túl sok lenne, de nem baj, ha nem szerepel általános p -re az eredmény, sőt a 256 a 16^2 és az $1/p^2$ nélkül is elfogadható)

(1 pont) így $\mathbb{E}(Y^2) (= 240 + 256) = 496$.

(iii) (5 pont)

(1 pont) arra az ötletre, hogy az örökifjúságra kell hivatkozni, még ha ezt nem is sikerül megfelelően kivitelezni.

(1 pont) $\mathbb{P}(Y > 2024 | Y > 2022) = \mathbb{P}(Y > 2)$ (a geometriai eloszlás örökifjúsága miatt – ennek indoklására az előző pont jár)

(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 2) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2)$ (a két lépés összevonható)

(1 pont) $= 1 - p - p(1 - p) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{16}$ (ehhez az 1 ponthoz elég, ha csak a konkrét p -re szerepel a számolás)

(1 pont) $= \frac{256 - 16 - 15}{256} = \frac{225}{256} = 0,87890625$ (elég négy értékes jegyre kerekítve).

A végeredményeket elfogadjuk közönséges tört és tizedestört alakban is, kivéve az (ii)-nél a szórást, ahol a végeredmény irracionális szám. Normálisan levonnánk 1 pontot azért, ha nincs numerikus érték a szórásnál, de itt túl kicsi az összpontszám, ezért kivételesen nem vonjuk le.

5. Egy három vízszintesen elhelyezett képkockából álló kép kockáit egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel feketére és $1/2$ valószínűséggel fehérre színeztük. Jelölje X a fehér képkockák számát, Y pedig azt, hogy hány képkockából áll a legnagyobb összefüggő fekete terület.

(Például az ábrán látható szituációban X és Y értéke is 1.)



- (a) Határozzuk meg X és Y együttes eloszlását (lehetőleg táblázatos formában, de elég $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$ -t megadni minden olyan k -ra és ℓ -re, ahol ez pozitív).
- (b) Határozzuk meg X és Y peremeloszlásait.
- (c) Határozzuk meg $\mathbb{E}(XY)$ értékét.

(Minden válaszhoz indoklást is várunk, táblázatos megadás esetén is.)

Megoldás.

(a) (10 pont)

$Y \backslash X$	0	1	2	3	p_Y
0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
p_X	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	(1)

(6 pont) Tökéletes együttes eloszlás (az indoklásra és a peremeloszlásokra majd később jár pont; a táblázatban szereplő nullákat csak akkor kell figyelembe venni, ha táblázatban adja meg az együttes eloszlást).

Részpontszám a következőkre adható:

- Az öt nem 0 valószínűség közül ahányat eltalált, annyi pont (akkor is, ha a többi elem nem stimmel, pl. a 0-k helyére nem mind 0-kat írt).
- Ezen felül +1 pont, ha az összes olyan elemre, aminek 0-nak kéne lennie, azt írja, hogy 0 (vagy ha nem táblázattal csinálja, akkor egyikről sem említi, hogy pozitív). Ennél az nem baj, ha máshova is ír 0-t.
- Ha az együttes eloszlás táblázatában szereplő számok összege nem 1, akkor viszont az eddigieken felül összesen -1 pont, ha pedig a táblázatban negatív vagy 1-nél nagyobb is szám előfordul, akkor még összesen további -1 pont (kivéve ha ezektől az (a) teljes pontszáma negatívvá válna; abban az esetben az (a)-ra 0 pont).

Az indoklásra az alábbiak szerint jár pont:

(1 pont) arra, hogy ha $X = 0$, akkor Y mindenképpen 3 kell, hogy legyen, és ha $X = 3$, akkor Y mindenképpen 0 kell, hogy legyen. (Ez még önmagában nem igazán teljes indoklás, de pont már jár érte. A rendes indoklás az, hogy ha $X = 0$, akkor nincs fehér képkocka, tehát mindhárom képkocka fehér, amelyek összefüggő területet alkotnak, így $Y = 3$. Ha pedig $X = 3$, akkor három egybefüggő fekete képkocka van, vagyis nincs fehér képkocka.) Ezt nyilván fordítva is el lehet mondani: ha $Y = 0$, abból $X = 3$, és ha $Y = 3$, abból $X = 0$ következik.

(1 pont) arra, hogy ha $X = 2$, akkor Y mindenképpen 1 kell, hogy legyen. (Ennyire is jár a pont; a rendes indoklás az, hogy ha $X = 2$, akkor egyetlen fekete képkocka van, így szükségképpen $Y = 1$.)

(2 pont) $\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 2/8 = 1/4$ és $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/8$ megindoklására. Itt szükséges valami érdemi esetszétválasztás: ha $X = 1$, akkor ez az egy fehér képkocka vagy a kép szélén van (ennek a valószínűsége $2/8$) és ekkor a két fekete kocka egymás mellé kerül, azaz $Y = 2$ lesz, vagy a kép közepén van (ennek a valószínűsége $1/8$) és ekkor a fehér képkocka két részre vágja a fekete területet, ezért $Y = 1$ lesz.

Ha lerajzolja a lehetséges eseteket és leírja, hogy mikor mennyi X és Y értéke, az bőven elég.

(b) (4 pont)

Helyes peremeloszlások az előbbi táblázatban.

(2 pont) $p_X(k)$ -t a k -nak megfelelő oszlop összegeként kapja minden k -ra (részpontszám adható, ha ez csak részben sikerül).

(2 pont) $p_Y(\ell)$ -t az k -nek megfelelő sor összegeként kapja minden ℓ -re (részpontszám adható, ha ez csak részben sikerül).

Ezeket a pontokat akkor is megadjuk, ha hibás együttes eloszlás táblázatból számolja a peremeloszlásokat. De ha a $p_X(k)$ -k vagy a $p_Y(l)$ -ek összege nem 1 és ezt nem veszi észre, akkor legfeljebb 1–1 pont. Ha valamelyik peremeloszlásban negatív vagy 1-nél nagyobb $p_X(k)$ vagy $p_Y(l)$ értékek is megjelennek, akkor pedig arra a peremeloszlásra 0 pont.

(c) (6 pont)

1. *megoldás*: XY eloszlásával számolva.

(1 pont) $\text{Ran}(XY) = \{0, 1, 2\}$ (ha olyan halmazt ír, ami ezt a három elemet tartalmazza és még esetleg néhány olyan elemet, amik előállnak a 0, 1, 2, 3 számok közül kettő szorzataként, azt is el lehet fogadni). Elég, ha ez a későbbiekben impliciten derül ki.

(1 pont) $\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/8$,

(2 pont) $\mathbb{P}(XY = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 3/8 + 1/4 = 5/8$,

(0 pont) $\mathbb{P}(XY = 0) = 1 - 1/8 - 5/8 = 1/4$.

(1 pont) Így $\mathbb{E}(XY) = 1 \cdot 1/8 + 2 \cdot 5/8 (+ 0 \cdot 1/4)$

(1 pont) $= \frac{11}{8}$.

Ha $\mathbb{P}(XY = 0)$ jó, de semmi másra nem járna pont a (c)-ben, akkor erre lehet adni 1 pontot.

2. *megoldás*: eloszlástranszformáció-szerűen számolva.

(1 pont) Megadja az $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k=0}^3 \sum_{\ell=0}^3 k\ell \mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$ képletet vagy valami hasonlót; a lehetetlen (k, ℓ) párokat persze nem kötelező belevenni. Elég, ha impliciten derül ki, hogy ezt a képletet használja (ha a következő konkrét képlet jó, akkor ez a pont is jár).

(3 pont) $\mathbb{E}(XY) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = Y = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 1, Y = 2)$ (a 0-s szorzatokat is oda lehet írni, de nem kötelező)

(1 pont) $= 1/8 + 2 \cdot 3/8 + 2 \cdot 1/4$

(1 pont) $= \frac{11}{8}$.

Ha az megvan, hogy XY melyik cellákban 0, de semmi másra nem járna pont a (c)-ben, akkor erre lehet adni 1 pontot.

Ha semmi nem jön össze a megoldásból, de az legalább egyértelműen kiderül, hogy egy 8 elemű eseménytérrel van szó ÉS klasszikus valószínűséggel kell számolni, akkor lehet adni összesen az egész feladatra max. 2 pontot. De csak akkor, ha semmi másra nem járna pont a feladatban, és ebből a 2 pontból is levonunk 1–1 pontot a nem 0 összegekre és a negatív vagy 1-nél nagyobb valószínűségekre (úgy, hogy az összpontszám legalább 0 legyen).

6. * Az X valószínűségi változó $f_X(x)$ sűrűségfüggvényének értéke $\frac{1}{x^4}$ a $(-\infty, -c)$ és (c, ∞) intervallumokon, ahol $c > 0$ egy pozitív valós szám. Tudjuk továbbá, hogy f_X a $[-c, c]$ intervallumon konstans, és hogy folytonos a teljes valós számegyenesen. Határozzuk meg c értéket és X várható értékét. (Azt felhasználhatjuk bizonyítás nélkül, hogy $\mathbb{E}(|X|) < \infty$.)

Megoldás (12 pont c -re, 8 a várható értékre).

(2 pont) A folytonossághoz az kell, hogy $f_X(x) = 1/c^4$ legyen, ha $-c < x < c$. (Nem kell külön indokolni.)

(1 pont) Ahhoz, hogy f_X sűrűségfüggvény legyen, az kell, hogy f_X nemnegatív legyen (erről elég ennyit mondani, nem kell indokolni, hogy miért teljesül)

(1 pont) és teljesüljön, hogy $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx$

(3 pont) $= \int_{-\infty}^{-c} \frac{1}{x^4} dx + \int_{-c}^c \frac{1}{c^4} dx + \int_c^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$.

(Ha nincs meg neki, hogy $f_X(x) = 1/c^4$, ha $-c < x < c$, de felírja ugyanezt paraméteresen a megfelelő konstanssal, akkor is jár ez a 3 pont. Részpontszám adható.)

(2 pont) $\int_{-\infty}^{-c} \frac{1}{x^4} dx = \left[-\frac{1}{3}x^{-3} \right]_{-\infty}^{-c} = -\frac{1}{3}(-c)^{-3} = \frac{1}{3c^3}$ (1 a primitív függvényre, 1 az azt követő számolásra),

(1 pont) és hasonlóan $\int_c^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3c^3}$.

(1 pont) $\int_{-c}^c \frac{1}{x^4} dx = \frac{2c}{c^4} = \frac{2}{c^3}$.

(1 pont) Így tehát $(2 + 2 \cdot \frac{1}{3}) \frac{1}{c^3} = 1$, vagyis $c^3 = 8/3$, tehát $c = \sqrt[3]{8/3} \approx 1,3867$.

Kb. teljes megoldás a várható értékre:

(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$,

(1 pont) mivel $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ (ennyi elég, de bővebben: mivel $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, X várható értékét értelmezzük és a fenti képlettel számolhatjuk ki).

(1 pont) $= \int_{-\infty}^{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} \frac{x}{x^4} dx + \int_{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}}^{\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} \frac{x}{\frac{16}{3^{4/3}}} dx + \int_{\frac{2}{\sqrt[3]{3}}}^{\infty} \frac{x}{x^4} dx$ (paraméteresen/korábban kapott rossz c -értékkel is OK, és az előző ponttal összevonható, tehát elég a konkrét esetre vonatkozó képlet, de ha rossz, akkor az előző pont csak akkor jár, ha az általános képlet minimális szintaktikai hibától eltekintve jó)

(1 pont) $\int_{-\infty}^{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} \frac{x}{x^4} dx = \int_{-\infty}^{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{-\infty}^{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} = -\frac{3^{2/3}}{8} + 0$. (Numerikusan is jó: $-\frac{3^{2/3}}{8} \approx -0,26001$.)

(1 pont) Hasonlóan adódik, hogy $\int_{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}}^{\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} \frac{x}{x^4} dx$ pont ennek az ellentettje, tehát $\frac{3^{2/3}}{8}$.

(2 pont) Végül $\int_{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}}^{\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} \frac{x}{c^4} = \left[\frac{x^2}{2 \cdot \frac{16}{3^{4/3}}} \right]_{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}}^{\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} = 0$.

(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(X) = 0$.

Valószínűsítjük, hogy aki meg tudja oldani ezt a feladatot, az előbb-utóbb a szimmetriára fog hivatkozni és nem fogja végigszámolni az egészet..

Ezen belül 1. lehetőség: a 3 konkrét integrál kiszámítása után jön rá, hogy a szimmetriát kell használni és 0 lesz az eredmény.

(2 pont) Az első 2 pont: mint a *kb. teljes megoldásnál*.

(3 pont) A szimmetria miatt 0 lesz az eredmény (ez a 3 pont további indoklás nélkül is jár, de a további pontok nem. Ha nem hivatkozik a szimmetriára sem, vagy semmi ezzel ekvivalens dologra, akkor számolás nélkül összesen max. 1 pont arra, hogy 0 lesz a várható érték.)

Alternatíva erre a 3 pontra: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N x f_X(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} 0 = 0$ (az utolsó előtti lépés elhagyható). Ennél a verziónál is meg kell említeni, hogy ez azért biztos, hogy jó, mert $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, amire lentebb adunk pontot.

(1 pont) Az első és a harmadik integrál egyenlő egymással, mert a 0-ra szimmetrikus intervallumokon integrálunk és az integrandus páratlan függvény/a primitív függvény páros (ezt valahogy értelmesen megfogalmazza, számolni nem kell. Ez jó úgy is, hogy a $-\infty$ -tól 0-ig és 0-tól ∞ -ig terjedő részekre bontja szét az integrálást, ekkor a következő 2 pont is jár).

(1 pont) A középső integrál 0, mert szintén egy 0-ra szimmetrikus intervallumon integrálunk és az integrandus páratlan függvény/a primitív függvény páros.

(1 pont) Végül $\mathbb{E}(X)$ értelmes/létezik, mert $\mathbb{E}(|X|) < \infty$.

(0 pont) Így $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = 0$.

2. lehetőség: már az általános képlet felírása után észreveszi, hogy a szimmetriát lehet használni és 0 lesz az eredmény. Ekkor a szimmetriát valahogy indokolni kell, ha nem is írja fel a 3 szakaszt, pl. a legegyszerűbb itt is az, ha a $-\infty$ -tól 0-ig és 0-tól ∞ -ig terjedő részekre bontja szét az integrálást.

Eloszlás neve	Jelölés	$\text{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X = k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$p, 1 - p$		p	$p(1 - p)$
binomiális	$B(n; p)$	$\{0, 1, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$		np	$np(1 - p)$
Poisson	$\text{Pois}(\lambda)$	$\{0, 1, \dots\}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\text{Geo}(p)$	$\{1, 2, \dots\}$	$(1 - p)^{k-1} p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$U(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\text{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$