Zárthelyi dolgozat Valószínűségszámítás és statisztikából, 2023. október 24.

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. A $[0,1]$ intervallumon egymástól függetlenül, találomra kiválasztunk két számot. Mi a valószínűsége, hogy a két szám összege nagyobb, mint a nagyobbik és a kisebbik szám különbségének kétszerese?

   Megoldás.
   (2 pont) A véletlen kísérlet megegyezik egy véletlen pont választásával a $[0,1] \times [0,1]$ négyzetben.
   (1 pont) Ez az Ω eseménytér.
   (2 pont) (x, y)-nal jelölve a véletlen pontot a négyzetben, a kedvező terület a négyzetnek az a része, ahol $x > y$ és $x + y > 2(x - y)$ vagy $y > x$ és $x + y > 2(y - x)$.
   (2 pont) arra, hogy ezeket az egyenleteket az ábra elkészítéséhez/kedvező terület kiszámításához használható alakra hozza: $x > y > x/3$ vagy $y > x > y/3$. (Vagy x-et fejezi ki y függvényeként, hasonlóan.)
   (2 pont) A kedvező terület tehát a négyzetnek az $y = x/3$ és az $y = x$, illetve az $y = x$ és az $y = 3x$ egyenesek közé eső része.
   (3 pont) jó ábra
   (3 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség $= \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_\Omega}$.
   (1 pont) $T_{\text{kedvező}} = 1 - T_{\text{kedvezőtlen}}$
   (1 pont) $T_\Omega = 1$
   (2 pont) $T_{\text{kedvezőtlen}} = 2 \times \frac{1 \cdot 1/3}{2} = 1/3$ (valahogy kiderül, hogy két derékszögű háromszög területének összegét számolja, megfelelő oldalhosszakkal)
   (0 pont) ezért $T_{\text{kedvező}} = 2/3$
   (1 pont) és így a kérdezett valószínűség is $2/3$.

   Ha egyből a kedvezőtlen területet kezdi el körülírni a kedvező helyett, az is jó. Ha máshogy számolja a kedvező területet, az is jó.

   Megjegyzés: Mivel a geometriai valószínűségi mezős feladatok megoldásait a gyakorlatokon is ritkán írtuk fel ennyire részletesen, ebben a feladatban azokra a lépésekre is jár a pont, amiket a hallgató nem írt fel expliciten, de a későbbi megoldásból egyértelműen kiderül, hogy jól használta őket. Pl. ha kihagyja az első lépést, de utána a megfelelő módon rajzol ábrát/számol területeket, akkor ez a 2 pont is jár, vagy ha nem írja fel, hogy mi Ω, de később világos, hogy jól határozza meg a területét (és nem csak véletlenül jön ki neki 1 megoldásként), akkor arra is jár pont stb. stb. Ha nincs ábra, de a szövegből/számításokból kiderül, hogy a megfelelő síkidomok területét számolja, akkor az ábrára is adjunk pontot. Ha azonban a későbbi lépés, ami a hiányzó jó, de expliciten nem szereplő lépést használná, hibás, akkor sajnos a hiányzó lépésre sem lehet pontot adni.

2. Egy erdőben kétfajta macskaféle fordul elő nagyon nagy példányszámban: házi macska és vadmacska. A vadmacskák a macskafélék teljes állományának tíz százalékát alkotják. Az összes vadmacska cirmos, továbbá öt házi macskából átlagosan egy példány cirmos.

   (a) Véletlenszerűen kiválasztva az erdőből egy macskafélét, mi a valószínűsége, hogy cirmos?

   (b) Az erdőben véletlenszerűen meglátunk egy cirmos macskafélét, de a távolból nem tudjuk megállapítani, hogy házi macska-e vagy vadmacska. Mi a valószínűsége, hogy házi macska?

   (c) Az erdőből véletlenszerűen kiválasztunk egy macskafélét. Függetlenek-e a következő események: $A = \{$a kiválasztott macskaféle nem cirmos$\}$ és $B = \{$a kiválasztott macskaféle házi macska$\}$?

Megoldás.
A megoldásban az egyszerűség kedvéért használjuk a (c) feladatban szereplő A és B eseményeket. Ez természetesen nem elvárás, és máshogy is lehet jelölni az eseményeket. Nem nagy baj, ha a megoldásban olyan kifejezések szerepelnek, mint pl. $\mathbb{P}$(cirmos), de azért a mintamegoldásban ettől tartózkodunk.
(a): 9 pont
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(\overline{A})$ (vagy valahogy a saját jelölése szerint leírja, hogy mit keresünk – ha ez később kiderül, akkor nem baj, hogy nem szerepel az elején expliciten).
(1 pont) $\mathbb{P}(B) = 9/10$,
(1 pont) tehát $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1/10$.
(1 pont) $\mathbb{P}(\overline{A}|B) = 1/5$
(1 pont) és $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B}) = 1$.
(1 pont) Mivel B és $\overline{B}$ teljes eseményrendszert alkotnak (diszjunktak és uniójuk Ω – ezt nem kell részletezni, de valami indoklás kell, hogy miért használható a TVT),
(1 pont) a teljes valószínűség tételéből
(1 pont) $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\overline{A}|B) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$
(0 pont) $= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \cdot 1$
(1 pont) $= \frac{7}{25} = 0{,}28$. (Tizedestört és bármilyen közönséges tört alakban is jók az eredmények, a feladat további részeiben is.)

(b): 5 pont
(1 pont) A keresett (feltételes) valószínűség $\mathbb{P}(B|\overline{A})$.
(1 pont) A Bayes-tétel (vagy: Bayes-formula, egyszerű Bayes-tétel) szerint
(2 pont) $\mathbb{P}(B|\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A}|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(\overline{A}|B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})}$ (elég, ha azt írja, hogy $\mathbb{P}(B|\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A}|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(\overline{A})}$, mivel ennek a nevezőjét az (a) részben már kiszámoltuk)
(0 pont) $= \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{10}+1\cdot\frac{1}{10}}$
(1 pont) $= \frac{9}{14} = 0{,}6429$.

(c): 6 pont
Önmagában arra, hogy kimondja, hogy nem függetlenek, nem jár pont.

(1 pont) arra, ha kimondja és van valami indoklás, akkor is, ha az nem (teljesen) jó.
Indoklás: *1. megoldás.*
(1 pont) A függetlenség azt jelentené, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{18}{25}$,
(1 pont) és ezért $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$,
(1 pont) ahol $\mathbb{P}(A|B) = \frac{4}{5}$,
(1 pont) és így $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} = \frac{18}{25} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{18}{25} \cdot \frac{9}{10} = \frac{81}{125}$ (itt a pont csak annak a megállapítására jár, hogy a szükséges számításokat már elvégeztük és a két oldal tényleg nem egyenlő, nem is muszáj, hogy a 18/25 és a 81/125 végeredmények ott legyenek).
2. megoldás.
(1 pont) A függetlenség azzal ekvivalens, hogy $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$,
(1 pont) mivel $\mathbb{P}(B) > 0$ (ezt nem lehet megkerülni azzal, hogy „impliciten szerepel a megoldásban”!).
(1 pont) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{18}{25}$,
(2 pont) viszont $\mathbb{P}(A|B) = 4/5 \neq \frac{18}{25}$.
3. megoldás.
(1 pont) A függetlenség azzal ekvivalens, hogy $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$,
(1 pont) mivel $\mathbb{P}(A) > 0$ (ezt nem lehet megkerülni azzal, hogy „impliciten szerepel a megoldásban”!).
(1 pont) $\mathbb{P}(B|A) = 1$,
(1 pont) mert... (Bayes-tétellel vagy anélkül, de megindokolja, hogy nem cirmos macskaféle nem lehet vadmacska).
(1 pont) Így $\mathbb{P}(B|A) \neq \mathbb{P}(B) = \frac{9}{10}$.

További lehetséges megoldások. A és B pontosan akkor függetlenek, ha A és $\overline{B}$ függetlenek, avagy ha $\overline{A}$ és B, avagy ha $\overline{A}$ és $\overline{B}$. Erre jár 1 pont, ezután pedig annak megindokolására, hogy az említett ekvivalens függetlenség nem áll fent, további 4 pont (az (a)-ban már megkapott eredmények miatt $\overline{A}$-val könnyebb dolgozni, mint A-val).

3. Anna, Bea és Csilla egy pakli magyar kártyával kártyáznak. Keverés után mindhármuknak osztanak 8–8 lapot. (Egy pakli magyar kártyában 32 lap van, ebből pontosan 8 piros.)

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy osztás után Annánál nincs piros lap?

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy sem Beánál, sem Csillánál nincs piros lap?

   (c) Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom játékosnál van legalább egy piros lap?

Megoldás.
(a) (5 pont)
(1 pont) Jelöljük rendre A-val, B-vel és C-vel azt az eseményt, hogy Annánál, Beánál, illetve Csillánál van piros lap. Ekkor a $\mathbb{P}(\overline{A})$ valószínűséget keressük.
1. megoldás.
(1 pont) Az ötlet az, hogy nézzük meg, hogy melyik 8-as blokkban lehetnek piros lapok (az Annának, Beának, illetve Csillának osztottak és a maradék, ki nem osztott 8 közül).
(1 pont) Itt a kedvező lehetőségeket az adja, amikor csak Beánál, Csillánál és a maradékban lehet piros lap, tehát $\binom{24}{8}$-féleképpen oszthatjuk el a piros lapokat.
(1 pont) Az összes lehetőséget az adja, hogy bármelyik 8-asban lehetnek piros lapok, tehát $\binom{32}{8}$ lehetőség van.
(1 pont) Így tehát a keresett valószínűség $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$.
2. megoldás.

(1 pont) Ahhoz, hogy Annánál ne legyen piros lap, az kell, hogy a 24 nem piros lap közül kapjon 8-at, míg összesen 32 lap van (és ha ez teljesül, akkor a maradékból Bea és Csilla bármit kaphat), míg az összes lehetőséget az adja, hogy 32 lapból húz 8-at, tehát
(2 pont) $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$ (ha ezt helyesen felírja, akkor jár az előző 1 pont is szöveges indoklás nélkül is)
(1 pont) $(= \frac{(24!)^2}{32!16!}) \approx 0,0699$.
3. megoldás.
(1 pont) Tegyük fel (az általánosság megszorítása nélkül, a játékosok közti szimmetria miatt), hogy Anna, Bea, Csilla sorrendben osztjuk ki a lapokat. Ha Annánál nincs piros lap, ő a 24 nem piros lap közül kap 8-at, majd Bea a még ki nem osztott 24 lap közül 8-at, majd Csilla a maradék 16 lap közül 8-at. Az összes lehetőséget pedig az adja, hogy Anna a 32 lapból kap meg 8-at, Bea a maradék 24-ből 8-at, majd Csilla a még mindig fennmaradó 16-ból 8-at.
(2 pont) Tehát $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{\binom{24}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}}$ (ha ezt helyesen felírja, akkor jár az előző 1 pont is szöveges indoklás nélkül is)
(1 pont) $(= \frac{(24!)^2}{32!16!}) \approx 0{,}0699$.
Ha máshogy számolja ki, de jól megindokolja, az is rendben van.

(b) (5 pont)
(1 pont) Az előbbi jelöléssel most $\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C})$-t keressük.
1. megoldás.
(2 pont) Az előbbi 1. megoldás gondolatmenete alapján most az adja a kedvező lehetőségeket, ha csak Anna lapjai és a ki nem osztott 8 lap között lehetnek pirosak.
(1 pont) Ez tehát $\binom{16}{8}$ lehetőség.
(0 pont) Az összes lehetőség száma még mindig $\binom{32}{8}$.
(1 pont) Így tehát a keresett valószínűség $\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}}$.
2. megoldás.
(1 pont) Tegyük fel most (az általánosság megszorítása nélkül), hogy Bea, Csilla, Anna sorrendben osztjuk ki a lapokat. Ahhoz, hogy se Beánál, se Csillánál ne legyen piros lap, az kell, hogy Bea a 24 nem piros lap közül kapjon 8-at, Csilla pedig az ezután fennmaradó 16 nem piros lap közül 8-at (ami után Anna bármit húzhat a maradékból), míg az összes lehetőséget az adja, hogy Bea 32 lapból, majd Csilla az általa nem húzott 24 lapból húz 8-at (Anna pedig ezután bármit húzhat a maradékból).
(2 pont) Tehát $\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{\binom{24}{8}\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}}$ (ha ezt helyesen felírja, akkor jár az előző 1 pont is szöveges indoklás nélkül is)
(1 pont) $(= \frac{16!24!}{32!8!}) \approx 0{,}0012$.
3. megoldás. Ugyanez, csak az (a) 3. megoldásához hasonlóan az összes játékos húzására való lehetőségek számát figyelembe vesszük, így az összes kedvező eset számának $\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{16}{8}$ és az összes eset számának $\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}$ felel meg.

(c) (10 pont) (1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.
(1 pont) összesen arra az ötletre, hogy a komplementer esemény valószínűségét kellene kiszámolni és a valószínűség $1 - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$.
(1 pont) összesen arra, ha valahogy kiderül a megoldásból, hogy $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{C})$ és $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C})$.
Ha ezt nem veszi észre, de külön-külön mindet kiszámolja, jár ez az 1 pont.
(1 pont) A Poincaré-formula szerint

(1 pont) $\mathbb{P}(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}) = (\mathbb{P}(\overline{A})+\mathbb{P}(\overline{B})+\mathbb{P}(\overline{C})-\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B})-\mathbb{P}(\overline{B}\cap\overline{C})-\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{C})+\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})) = 3\mathbb{P}(\overline{A}) - 3\mathbb{P}(\overline{B}\cap\overline{C}) + \mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$.
(1 pont) Leírja, hogy $\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$-t milyen gondolatmenet alapján lehet kiszámolni.
A korábbi 1. megoldásokra emlékeztető megoldás: Most mind a 8 piros lapnak a nem kiosztottak között kell lennie (vagyis pontosan a piros lapokat nem osztjuk ki). Ez 1 lehetőség, míg az összes lehetőség száma továbbra is $\binom{32}{8}$.
A korábbi 2. megoldásokra emlékeztető megoldás: Ha az $\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ esemény bekövetkezik, akkor pl. Anna, Bea, Csilla sorrendben kiosztva a lapokat, Anna a 24 nem piros lapból kap nyolcat, Bea a 16 maradék nem pirosból 8-at és Csilla megkapja a fennmaradó 8 nem piros lapot, míg az összes lehetőséget az adja, hogy Anna 32, Bea az általa nem húzott 24 és Csilla az általuk nem húzott 16 lapból kap 8-at. Ezért
(2 pont) $\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{B}) = \frac{1}{\binom{32}{8}}$ avagy $\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) = \frac{\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}}$ (ha ezek valamelyikét helyesen felírja, akkor jár az előző 1 pont is szöveges indoklás nélkül is)
(1 pont) $(= \frac{24!8!}{32!}) \approx 9{,}507 \cdot 10^{-6}$.
(1 pont) Behelyettesítve a fenti formulákba, $\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B})(= 1 - \mathbb{P}(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}) = ... = 0{,}7939$.

Egyéb megjegyzések a pontozáshoz. Ha teljesen rossz eseménytérrel számol, de az kiderül, hogy klasszikus a valószínűségi mező / kedvező és összes esetek számának arányával próbál számolni, akkor max. 1 pont.
Tudomásul vesszük, hogy egyszerűbb számológépek is tudnak binomiális együtthatókat kiszámolni, emiatt a zárójelben szereplő, faktoriálisokból álló kifejezéseket nem muszáj kiírni.
Ha valahogy brute force-szal Poincaré nélkül kiszámolja helyesen a keresett valószínűségeket (ami elég valószínűtlen), azért jár a max. pont is, ha kellően megindokolja.

4. Egy egyetem hallgatói képviseletének programszervező bizottságában kétféle programlehetőség merült fel egy adott időpontra, nevezzük ezeket A és B opciónak. Egy kilenctagú bizottság dönt arról, hogy a két programlehetőség közül melyik valósuljon meg; a bizottság tagjai számára a szavazás kötelező, tartózkodni nem lehet. A bizottság három tagja biztosan az A opcióra szavaz, két tagja biztosan a B opcióra, négy tagja pedig bizonytalan, ezért ők egymástól függetlenül feldobnak egy-egy szabályos pénzérmét, és ha az eredmény fej, akkor az A opcióra szavaznak, ha pedig írás, akkor a B opcióra. Jelölje X az A opcióra szavazó bizottsági tagok számát.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik opció több mint két szavazat különbséggel nyer?
   (b) Milyen eloszlású az $X - 3$ valószínűségi változó és milyen paraméterrel/paraméterekkel?
   (c) Jelölje Y a B opcióra szavazó bizottsági tagok számát. Határozzuk meg X és Y együttes eloszlását és a peremeloszlásaikat (lehetőleg táblázatos formában, de elég $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$-t, $\mathbb{P}(X = k)$-t és $\mathbb{P}(Y = l)$-t minden olyan k-ra és l-re megadni, amelyre azok pozitívak).

Megoldás. Ami zárójelben van, azt nem muszáj odaírni.
(a) (7 pont)
(1 pont) $\mathbb{P}$(több mint két szavazattal nyer valamelyik opció) $= \mathbb{P}$(A nyer több mint 2 szavazattal) $+\mathbb{P}$(B nyer több mint 2 szavazattal).
(Ha a következő lépések jók, ezt át szabad ugrani pontlevonás nélkül.)
(1 pont) $\mathbb{P}$(A nyer több mint 2 szavazattal) $= \mathbb{P}$(A-ra (pontosan) 6-an szavaznak) $+\mathbb{P}$(A-ra 7-en szavaznak)
$(= \mathbb{P}$(A-ra 3 bizonytalan szavaz) $+ \mathbb{P}$(B-re 4 bizonytalan szavaz) $(= \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 7))$
(1+1 pont) $= \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4$ (a $\binom{4}{3}$ helyett 4, a $\binom{4}{4}$ helyett 1 vagy semmi is jó persze)
(0 pont) $= \frac{5}{16} (= 0{,}3125)$.
(1 pont) Hasonlóan: $\mathbb{P}$(B nyer több mint 2 szavazattal) $= \mathbb{P}$(B-ra (pontosan) 6-an szavaznak) $(= \mathbb{P}$(A-ra 0 bizonytalan szavaz)) $(= \mathbb{P}(X = 3))$.

(1 pont) $= \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^4$
(0 pont) $= \frac{1}{16}$,
(1 pont) tehát a keresett valószínűség $3/8$($= 0{,}375$, más közönséges tört alakban is jó).
Ha valamiért külön-külön számolja ki, hogy mi a valószínűsége, hogy A, illetve B legalább 2 szavazattal nyer, és nem adja össze ezeket, azért 1 pontot vonjunk le.

(b) (3 pont)
(2 pont) $(X-3) \sim \mathrm{B}(4;1/2)$ (1 pont arra, hogy binomiális, további 1 pont arra, ha mindkét paraméter jó és világos, legalább impliciten, hogy melyik az n és melyik a p),
(1 pont) mert... (valahogy megindokolja, hogy 4 független kísérletet végzünk és mind 1/2 valószínűséggel sikerül, ahol a siker az, hogy egy adott bizonytalan fejet dob, és $X-3$ a sikerek száma. Nem baj, ha az indoklás nem egészen teljes, de indoklás hiányában nem jár a pont).
Jó megoldás az is, hogy $\mathbb{P}(X-3=k)$ hiányzó értékeit (amiket még nem számoltunk ki az (a)-ban: $k=1,2$) kiszámolja és utána állapítja meg, hogy pont a $B(4;1/2)$ súlyfüggvényét kapta. Ebben az esetben nem szükséges a binomiális eloszlás interpretációjával érvelni, 1 pont jár összesen a hiányzó értékek kiszámítására.
Ha valaki tökéletesen megadja $X-3$ eloszlását (pl. a súlyfüggvény összes nem 0 értékével), de nem írja oda, hogy binomiális, vagy odaírja, de azt nem, hogy milyen paraméterekkel, arra 2 pont jár. Ebből részpontszám adható (pl. ha egy-két értéket kifelejt, de nem többet, vagy ha leírja minden egyes értékhez a kedvező esetek számát, de nem magukat a valószínűségeket stb.).

(c) (10 pont)
A helyes táblázat (peremeloszlásokkal együtt):

$Y \backslash X$	3	4	5	6	7	p_Y
2	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
4	0	0	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$
5	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
6	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$
p_X	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	(1)

A táblázatban szereplő értékek indoklásáról lásd a következő *gyorsított pontozási útmutató*t.

Gyorsított pontozási útmutató tökéletes együttes eloszlás esetén (ha $\mathbb{P}(X=k, Y=l)$-re minden olyan (k,l)-re helyes érték szerepel, amelyre az nem 0):
(3 pont), ha az együttes eloszlásban szereplő pozitív értékek helyesek, akár mindenfajta indoklás nélkül is. A feladat megfogalmazása miatt nem jár levonás azért, ha csak ezeket számolja ki és nem említi meg, hogy minden más kimenetel valószínűsége 0.
(1 pont) annak megemlítésére, hogy $\mathbb{P}(X=3, Y=6)$, $\mathbb{P}(X=6, Y=3)$ és $\mathbb{P}(X=7, Y=2)$ értékeit már kiszámolta az (a) vagy a (b) részben, vagy ha nem számolta még ki, akkor ezek kiszámítására összesen. Ha (a)-ban vagy (b)-ben már észrevette, hogy tulajdonképpen ezeket a valószínűségeket számolta ki, az is jó.
(1 pont) $\mathbb{P}(X=4, Y=5)$ kiszámítására (itt természetesen lehet a (b)-re hivatkozni és azt mondani, hogy ez $\mathbb{P}(X=4)$, avagy $\mathbb{P}(X-3=1)$, de nem muszáj. Elég, ha az szerepel, hogy $\mathbb{P}(X=4, Y=5) = \binom{4}{1}(\frac{1}{2})^4 = 1/4$).

(1 pont) $\mathbb{P}(X=5,Y=4)$ kiszámítására (hasonlóan).
(2 pont) X peremeloszlására, ha az is helyes.
(2 pont) Y peremeloszlására, ha az is helyes.

Általános javítási útmutató (hibás vagy hiányos együttes eloszlás esetére):
Az együttes eloszlásra összesen 6 pont jár.
(1 pont) arra az ötletre, hogy $X+Y$ mindig 9-cel egyenlő, másképp fogalmazva $Y=9-X$ (1 valószínűséggel vagy mindig). Ha ez a megoldásból derül ki, akkor is jár rá a pont. Ha van táblázat, ez ekvivalens azzal, hogy a „mellékátlón" kívüli elemek 0-val egyenlők.
(1 pont) arra, hogy $\mathbb{P}(X=k,Y=l)$ pontosan akkor nem 0, ha $k=3,\ldots,7$ és $l=9-k$. Ez is elég, ha a végén a táblázatból kiderül, illetve ha nincs táblázat, de ezek az értékek mind pozitívak és az összegük 1 (és az összes többi $\mathbb{P}(X=k,Y=l)$ vagy 0, vagy nincs is megemlítve), akkor jár ez a pont, további indoklás nélkül is.
(1 pont) Valahogy kiderül az, hogy $\mathbb{P}(X=k,Y=l)$ értékét $k=3,6,7$-re már kiszámoltuk az (a) részben. Ehhez is elég, ha a táblázatba írja a helyes értékeket.
(1 pont) $\mathbb{P}(X=4,Y=5)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$.
(Ha ez így szerepel, akkor már nem kell tovább indokolni. Lehet azt is mondani, hogy $p=1/2$ miatt/szimmetria miatt ez ugyanannyi, mint $\mathbb{P}(X=6,Y=3)$, amit már kiszámoltunk.)
(1 pont) $\mathbb{P}(X=5,Y=4)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$.
(Plusz hasonló megjegyzések a javításhoz, mint az előző pontnál.)
(0 pont) Ezek alapján elkészül a táblázat (ha van).
További megjegyzés: A (c) részből eddig, ha a táblázatban szereplő nem 0 értékek részben vagy teljesen rosszak, de az jó, hogy melyik értékek nem 0-k (illetve hogy melyik értékek vannak felsorolva, ha a 0 értékeket nem sorolja fel), akkor max. 3 pont.

A peremeloszlásokra 4 pont jár (ha van táblázat, akkor az alapján, további indoklás nélkül is):
(1 pont) X és Y értékkészlete is jó, és minden olyan értékre, amire $\mathbb{P}(X=k)$, illetve $\mathbb{P}(Y=l)$ nem 0, meg van adva egy-egy nem 0 érték, és ezen értékek összege X és Y esetén is 1.
(1+1 pont) $p_Y(l)=\sum_k p_{(X,Y)}(k,l)$ minden l-re és $p_X(k)=\sum_l p_{(X,Y)}(k,l)$ minden k-ra teljesül a hallgató által megadott megoldásban.
(1 pont) jár végül arra, ha a perem-súlyfüggvények értékei nemcsak az eddig felsoroltakat teljesítik, hanem tényleg mind jók is.
További megjegyzések: Ha nem írja le a peremeloszlásokat, akkor ebből a 4 pontból csak az értékkészletekre lehet pontot adni, illetve esetleg ha az (a) vagy a (b) részből kiderül még valami a peremeloszlásokra vonatkozóan, akkor arra.
Ha az együttes eloszlást nem tudja jól megadni, de X súlyfüggvényét (pl. a binomiális eloszlás képlete alapján) jól meg tudja adni, arra jár a (c)-ben max. 4 pont. Ha rájön, hogy $(Y-2)\sim \mathrm{B}(4;1/2)$ és ez alapján Y súlyfüggvényét is jól meghatározza, arra további max. 4 pont.

5. Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f_X(x)=\frac{c}{x^2}$, ha $x>1$ és $f_X(x)=0$ különben, ahol $c>0$ egy megfelelően választott konstans.

   (a) Határozzuk meg c értékét.

   (b) Definiáljuk az Y diszkrét valószínűségi változót a következőképpen:

$$Y=\begin{cases}3, & \text{ha } X<3,\\ 0, & \text{ha } 3\le X<4,\\ 4, & \text{különben.}\end{cases}$$

   Határozzuk meg $\mathbb{P}(Y=k)$-t minden olyan $k\in\mathbb{R}$-re, amelyre ez a mennyiség pozitív.

(c) Határozzuk meg Y várható értékét és szórását.

Megoldás.
(a) (6 pont)
(1 pont) f_X akkor lesz sűrűségfüggvény, ha nemnegatív (ezt elég csak megemlíteni, $c > 0$ miatt világos, hogy ez teljesül)
(2 pont) és $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{c}{x^2}\mathrm{d}x$
($\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x$-t ki lehet hagyni és egyből $\int_1^{\infty} \frac{c}{x^2}\mathrm{d}x$-szel kezdeni, de ha csak az előbbi szerepel, akkor csak 1 pont)
(1 pont) $= [-c/x]_1^{\infty}$
(1 pont) $(= 0 + c) = c$,
(1 pont) tehát $c = 1$.

Ha c-t rosszul határozta meg, de továbbszámol a rossz értékkel, akkor a további részekre lehet pontot adni, de ha a $\mathbb{P}(Y = k)$-k összegére nem 1 jön ki neki, akkor vonjunk le még 1 pontot.

(b) (7 pont)
(1 pont) $\mathrm{Ran}(Y) = \{0, 3, 4\}$ (ha ez hiányzik, de később szerepel $\mathbb{P}(Y = k)$ minden $k \in \{0, 3, 4\}$ esetén és ezek összege 1, vagy kimondja, hogy más értéket nem vesz fel Y, akkor is jár ez a pont)
(1 pont) $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(X < 3)(= \mathbb{P}(1 < X < 3) = \int_1^3 f_X(x)\mathrm{d}x) = \int_1^3 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$
(1 pont) $(= [-1/x]_1^3) = 1 - 1/3 = 2/3$. (A primitív függvényre itt nem jár külön még egy pont, mert az (a) részben már adtunk, így nem baj, ha egyből a behelyettesítéssel kezdi.)
(1 pont) Hasonlóan $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(3 \leq X < 4)(= \int_3^4 f_X(x)\mathrm{d}x) = \int_3^4 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ (ha itt nem indokolja meg, hogy ez az eloszlásfüggvény/a val. változó folytonossága miatt igaz, akkor is jár ez a pont)
(1 pont) $(= [-1/x]_3^4) = 1/3 - 1/4 = 1/12$. ($0,8\dot{3}$ tizedes tört alakban, illetve 4 értékes jegyre kerekítve is jó, az előbbi 2/3 is.)
(1 pont) Végül $\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(X \geq 4)(= \int_4^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x) = \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$
(1 pont) $(= [-1/x]_4^{\infty}) = 0 + 1/4 = 1/4$.
(Ha $\mathbb{P}(Y = k)$ a három releváns k pontból kettőben már megvan, a harmadikat szabad komplementer valószínűséggel is számolni.)

(c) (7 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = 3\mathbb{P}(Y = 3)(+0\mathbb{P}(Y = 0)) + 4\mathbb{P}(Y = 4)$
(1 pont) $= 3 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 3$. (Az előző pont akkor is jár, ha egyből „$\mathbb{E}(Y) =$” után írja a behelyettesített számszerű értékekkel a várható érték képletét, vagy ha a várható érték általános képletét írja le először és utána egyből mindent behelyettesít.)
(1 pont) $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$,
(1 pont) ahol $\mathbb{E}(Y^2) = 9\mathbb{P}(Y = 3)(+0\mathbb{P}(Y = 0)) + 16\mathbb{P}(Y = 4)$
(1 pont) $= 9 \cdot \frac{2}{3} + 16 \cdot \frac{1}{4} = 10$, (A várható érték pontozásához hasonlóan elfogadunk ennél tömörebb megoldásokat.)
(1 pont) így $\mathbb{D}^2(Y) = 10 - 3^2 = 1$,
(1 pont) tehát $\mathbb{D}(Y)(= \sqrt{\mathbb{D}^2(Y)} = \sqrt{1}) = 1$.

Megjegyzés: Ha valaki a (b) részben nem tudta Y eloszlását meghatározni, de próbálja általánosan/paraméteresen meghatározni $\mathbb{E}(X)$-et és $\mathbb{D}^2(X)$-et, akkor a (c)-re max. 3 pont. Pontozás attól függően, hogy mennyire hihető, hogy az ezekre vonatkozó képleteket nem csak ismeri, hanem konkrét val. változókra is jól tudja alkalmazni. A teljes 3 ponthoz mindenképpen szükséges, hogy Y értékkészletét felismerje (a 0 értéket persze ki lehet hagyni a momentumok meghatározásánál).

6. * Legyen X egy olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ ($\mathrm{e} \approx 2{,}71...$). Felhasználhatjuk, hogy ez egy eloszlásfüggvény (lásd 5. feladatsor).

(a) Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $\mathbb{P}(X \le \varepsilon) < 1/2$.

(b) Legyen $Y = \mathrm{e}^{-X}$. Határozzuk meg Y sűrűségfüggvényét és szórását.

Megoldás.
(a) (6 pont)
1. megoldás.
(1 pont) $\mathbb{P}(X < 0) = F_X(0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-0}}$
(0 pont) $= 1/\mathrm{e}$ (vagy: e^{-1}; $1/\mathrm{e} \approx 0{,}3679$, de látni fogjuk, hogy a pontos numerikus érték nem olyan fontos. Az előző lépésből az "$= F_X(0)$" kihagyható és egyből jöhet a képlet, de ha egyből a végeredmény jön, akkor csak 1 pont jár a 2-ből).
(1 pont) Tehát $F_X(0) < 1/2$ (ezt nem kell tovább indokolni akkor sem, ha nem adta meg $1/\mathrm{e}$ numerikus értékét, higgyük el, hogy tudja, hogy $\mathrm{e} > 2$).
(1 pont) Az eloszlásfüggvény folytonos,
(1 pont) mert... (valahogy megindokolja: pl. azért, mert folytonos függvények kompozíciója, vagy azért, mert minden pontban differenciálható – ha ezt írja, higgyük el neki akár anélkül is, hogy lederiválná – és ezért minden pontban folytonos),
(1 pont) ezért van olyan $\varepsilon > 0$ is, amelyre $F_X(\varepsilon) < 1/2$,
(1 pont) és szintén a folytonosság miatt $\mathbb{P}(X \le \varepsilon) = F_X(\varepsilon)$, amiből következik a bizonyítandó állítás.

(Ne vonjunk le pontot, ha egyszer már hivatkozott a folytonosságra és most nem teszi, illetve csak egy pontot vonjunk le összesen, ha nem hivatkozott rá egyáltalán. A legelső 1 pont jár akkor is, ha nem írta oda, hogy $F_X(0) = \mathbb{P}(X < 0)$, tehát ennek hiányában akár maximális pontszám is kapható, viszont az utolsó pont csak akkor jár, ha szerepel, hogy $F_X(\varepsilon) = \mathbb{P}(X \le \varepsilon)$.)

Alternatív jó megoldások például:

- A folytonosságot a 0-ban alkalmazza és azt írja, hogy $\mathbb{P}(X \le 0) = 1/\mathrm{e} < 1/2$, és utána (szintén a folytonosság miatt) $\mathbb{P}(X \le \varepsilon) < 1/2$ is teljesül, ha $\varepsilon > 0$ elég kicsi. Itt tulajdonképpen nem $x \mapsto \mathbb{P}(X < x)$, hanem $x \mapsto \mathbb{P}(X \le x)$ folytonosságára kell hivatkozni, de ha ez az egyetlen probléma, azért ne vonjunk le pontot.
- A folytonosság helyett arra hivatkozik, hogy $\mathbb{P}(X = c) = 0$ valamilyen $c \in \mathbb{R}$-re (pl. $c = 0, \varepsilon$ stb.). Ez ugyanúgy jó, de valahogy meg kell indokolni, pl. azzal, hogy X folytonos val. változó, más szavakkal azzal, hogy van sűrűségfüggvénye (erre jár 1 pont a folytonosság helyett), amit szintén meg kell indokolni, pl. azzal, hogy az eloszlásfüggvény mindenütt differenciálható (erre jár 1 pont a folytonosság megindoklása helyett).
- Eljut addig, hogy $\mathbb{P}(X < \varepsilon) < 1/2$ valamely $\varepsilon > 0$-ra, és utána nem az eloszlásfüggvény folytonosságára hivatkozik, hanem azt mondja, hogy ekkor valamely (bármely) $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$-re $\mathbb{P}(X \le \varepsilon') < 1/2$.
  (Ez a valószínűség monotonitásából következik, de nem kell indokolni.)

Alternatív „brute force” megoldás, szintén teljes pontszámért: választ valami tetszőleges 0-nál nagyobb ε számot, amire $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\varepsilon}} < 1/2$ (pl. $\varepsilon = 1/4$ jó). Ebből kijön az, hogy $F_X(\varepsilon) = \mathbb{P}(X < \varepsilon) < 1/2$ (4 pont), és ezután meg kell indokolni, hogy ebből miért következik, hogy $\mathbb{P}(X \le \varepsilon) < 1/2$ (pl. folytonosság, 1 pont), amit az előbbiekhez hasonlóan szintén meg kell indokolni (1 pont).
Alternatív megoldás megint csak az, hogy $\mathbb{P}(X < \varepsilon) < 1/2$-ből azt vezeti le, hogy akkor valamilyen (bármely) $\varepsilon' \in (0, 1/2)$-re $\mathbb{P}(X \le \varepsilon') < 1/2$.
Ha ezzel próbálkozik, de nem jó ε-t választ, akkor az első 4 pontból max. 2 pont, utána az

utolsó 2 pontot még megkaphatja akár mind az indoklás jóságától függően.

(b) (14 pont, ami zárójelben van, azt nem kötelező odaírni)
(1 pont) arra az ötletre, hogy Y sűrűségfüggvénye kiszámításához először az eloszlásfüggvényét kellene meghatározni (akkor is, ha ezután semmi más jó nincs. Ha csak az látszik, hogy az eloszlásfüggvényt próbálja felírni, és szintaktikailag értelmezhető dolgot ír, akkor jár az 1 pont)
(1 pont) $\mathrm{Ran}(Y) = (0, \infty)$ (elfogadjuk $=$ helyett $\subseteq$-val és/vagy $(0, \infty)$ helyett $[0, \infty)$-vel is. Ha később kiderül, hogy $F_Y(x) = 0$ minden $x \leq 0$-ra, akkor ez az 1 pont jár.)
(1 pont) és ezért $F_Y(x)(= \mathbb{P}(Y < x)) = 0$ minden $x \leq 0$-ra.
(1 pont) Ha $x > 0$, akkor $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x)$
(0 pont) $= \mathbb{P}(\mathrm{e}^{-X} < x)$
(2 pont) $(= \mathbb{P}(-X < \ln x)) = \mathbb{P}(X > -\ln x)$
(2 pont) $(= 1 - \mathbb{P}(X \leq -\ln x) = 1 - F_X(\ln x)) = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(-\ln x)}} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
(Ebből 1 pont jár a komplementer valószínűségre, 1 pont az átalakításra az azonosságok segítségével. Itt ugye megint használjuk F_X folytonosságát, de többször már nem jár rá pont.)
(2 pont) Tehát $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$,
(1 pont) és így (a táblázat alapján) $f_Y(x) = \mathrm{e}^{-x}$, ha $x > 0$
(1 pont) és $f_Y(x) = 0$, ha $x \leq 0$ (ha a 0-t a másik szakaszhoz veszi, az is OK),
(1 pont) valamint (szintén a táblázat alapján) $\mathbb{D}^2(Y) = 1$,
(1 pont) és így $\mathbb{D}(Y) = 1$.

Ha az eloszlásfüggvény alapján nem veszi észre, hogy Y exponenciális eloszlású: 1 pont jár arra, hogy $f_Y(x) = 0$, ha $x \leq 0$, 1 pont arra, hogy $x > 0$ esetén $f_Y(x)$-et az eloszlásfüggvény deriválásával lehet megkapni, és 2 pont arra, hogy ezt a deriválást jól el is végzi.
Ha ezután a sűrűségfüggvényéről sem ismeri fel az exponenciális eloszlást, akkor sajnos sokat kell dolgozni az utolsó 2 pontért, ráadásul fél pontokat nem is adhatunk. A szórást $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2}$ képlettel kell meghatározni (0 pont), amihez ki kell számolni $\mathbb{E}(X)$-et (1 pont, $1\times$ parc. int. vagy $\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty (1 - F_Y(x))\mathrm{d}x$) és $\mathbb{E}(Y^2)$-et ($2\times$ parc. int., esetleg az első után kapott képletben fel lehet ismerni a már kiszámolt várható értéket), majd elvégezni a szükséges kivonást és gyökvonást (összesen 1 pont).

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X = k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n; p)$	$\{0, 1, ..., n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0, 1, ...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1, 2, ...\}$	$(1-p)^{k-1} p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$