Vizsgadolgozat Valószínűségszámítás és statisztikából (ÚJ Valszám), 2024.01.25.

1. (a) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, legyen $n \geq 1$ és legyenek $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ események. Milyen feltételek teljesülése esetén nevezzük az ezen eseményekből álló sorozatot teljes eseményrendszernek definíció szerint?

   (b) Mikor nevezünk egy X valószínűségi változót egyszerűnek?

   (c) Legyen $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$, és legyen Y egy $\mathrm{N}(\mu; \sigma^2)$ eloszlású és X egy $\mathrm{N}(0; 1)$ eloszlású valószínűségi változó. Ebben az esetben X milyen lineáris transzformáltjának eloszlása azonos Y eloszlásával?

   Megoldás.
   (a) (10 pont)
   (5 pont) Ha páronként kizáróak (megfogalmazható úgy is, hogy ha $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ minden $i \neq j$ esetén, de ha a „minden $i \neq j$ esetén”-t kihagyja, akkor max. 3 pont)
   (5 pont) és uniójuk Ω (leírható képlettel is, $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ stb. Kisebb szintaktikai hibák esetén részpont adható.).
   Ha ahelyett, hogy az uniójuk Ω, azt írja, hogy a valószínűségeik összege 1, arra adunk max. 4 pontot, ha szerepel mellette a páronkénti kizáróság is. Viszont ha az nem szerepel, akkor abból, hogy a valószínűségek összege 1, nem következik, hogy az uniójuk Ω, ezért ebben az esetben max. 1 pont.
   (jegyzet 2.2.5. Definíció)
   (b) (5 pont) Ha értékkészlete véges. / Ha csak véges sok értéket vesz/vehet fel. / Képlettel valahogy leírja (szintaktikai hibák esetén részpontok adhatók).
   Ha nem szerepel, hogy véges, 0 pont. Ha azt írja, hogy véges vagy megszámlálhatóan végtelen, max. 1 pont.
   (jegyzet 3.2.1. Definíció)
   (c) (5 pont) $\sigma X + \mu$ ugyanolyan eloszlású, mint Y.
   Ha azt írja, hogy $Y = \sigma X + \mu$, akkor max. 4 pont (mert van más $\mathrm{N}(\mu; \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változó is, pl. $Y = -\sigma X + \mu$ is az, akármi is a valószínűségi mező).
   Ha azt írja, hogy X és $\frac{Y-\mu}{\sigma}$ azonos eloszlásúak, akkor max. 2 pont. Ha azt, hogy $X = (Y - \mu)/\sigma$, akkor max. 1 pont. (jegyzet 8.2.2. Következmény)

2. Az A, B, C eseményekről tudjuk, hogy páronként függetlenek és $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{10}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{10}$, valamint $\frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy a három esemény közül egyik sem következik be. Együttesen független-e A, B és C? Feltéve, hogy a három esemény közül legalább az egyik bekövetkezik, mi a valószínűsége, hogy mindhárom esemény (egyszerre) bekövetkezik?
   Megoldás.
   (1 pont) A, B, C akkor lesznek együttesen függetlenek, ha $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$,
   (1 pont) mivel azt már tudjuk, hogy páratlanul függetlenek (itt azt még nem kell kifejteni, hogy a páronkénti függetlenség mit jelent, mert arra később adunk pontot).
   Megjegyzés: Ha azt igazolja, hogy $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, az önmagában is elég ezért a két pontért, hiszen ebből következik, hogy nem együttesen függetlenek, attól függetlenül, hogy páronként függetlenek-e.
   (1 pont) A Poincaré-formula szerint
   (1 pont) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.
   (1 pont) (A feladat szövege szerint) $1/2 = \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C})$ (lehet $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$-nek is írni, ha később kiderül, hogy tudja, hogy ennek a valószínűsége $1 - \mathbb{P}(A \cup B \cup C)$)
   (1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(A \cup B \cup C)$, tehát $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ szintén 1/2-del egyenlő.
   (3 pont) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{3}{50} (= 0{,}06)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \frac{3}{100} (= 0{,}03)$ és $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{50} (= 0{,}02)$
   (1 pont) a páronkénti függetlenség miatt.
   (2 pont) Így tehát $\frac{1}{2} = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{3}{50} - \frac{3}{100} - \frac{1}{50} + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$, vagyis $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{100} (=$

0,01) (ebből 1 pont $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ értékére, és 1 pont arra, hogy legalább annyira részletezi a számításokat, hogy abból számológéppel és egyszerű összevonásokkal kijöjjön az értéke),
(1 pont) viszont $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{3}{500} \neq \frac{1}{100}$, ezért nem együttesen függetlenek.
(3 pont) A második kérdésben a keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap B \cap C | A \cup B \cup C)$ (ebből 1–1 pont jár a két esemény azonosítására, és 1 arra, hogy a megfelelő feltételes valószínűséget írja fel),
(1+1 pont) $= \frac{\mathbb{P}((A\cap B\cap C)\cap(A\cup B\cup C))}{\mathbb{P}(A\cup B\cup C)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(A\cup B\cup C)}$ (a két pont összevonható, elég, ha a második kifejezés szerepel)
(1 pont) $= \frac{1/100}{1/2}$ (az a) rész szerint; nem kell indokolni)
(1 pont) $= \frac{1}{50} (= 0{,}02)$.
Megjegyzés: Az első rész valójában gyorsabban megoldható úgy, hogy az A, B, C események komplementereinek valószínűségeit számítja ki és meggyőződik arról, hogy ez nem egyenlő $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1/2$-del. Erre is lehet 13 pontot kapni az első kérdésnél. Ebben az esetben viszont a második kérdésnél az utolsó 2 pont csak akkor jár, ha $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$-t helyesen kiszámolja.

3. Legyenek $X \sim \mathrm{N}(1; 9)$ és $Y \sim \mathrm{N}(-1; 16)$ független valószínűségi változók.

   (a) Határozzuk meg (indoklással!) $\mathbb{P}(2 < X < 3)$ értékét.

   (b) Legyen $Z = X + Y + 2024$ és $W = Y - 2X$. Határozzuk meg $\mathrm{cov}(Z, W)$ értékét.

   (c) Mennyi $X + Y$ várható értéke és szórásnégyzete (és miért)?

Megoldás.
(a) (8 pont)
(2 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}(2 < X < 3) = \mathbb{P}\left(\frac{2-1}{3} < \frac{X-1}{3} < \frac{3-1}{3}\right),$$

(1 pont) $= \mathbb{P}(\frac{1}{3} < V < \frac{2}{3})$, ahol $V \sim \mathrm{N}(0; 1)$,
(1 pont)[a] mert az $(X-1)/3$ (vagy: $(X - \mathbb{E}(X))/\mathbb{D}(X)$) val. változó (az előadáson tanultak szerint) standard normális eloszlású. (Az elég, ha impliciten derül ki, hogy 1 a várható érték és $3 = \sqrt{9}$ a szórás.)
(1 pont) $\mathbb{P}(1/3 < V < 2/3) = \mathbb{P}(V < 2/3) - \mathbb{P}(V < 1/3)$ (itt nem kell hivatkozni a folytonosságra, mert kevés pont jár a feladatra)
(1 pont) $\Phi(2/3) - \Phi(1/3)$ (az előzővel összevonható)
(1 pont) $\approx \Phi(0{,}67) - \Phi(0{,}33)$
(1 pont) $\approx 0{,}7486 - 0{,}6293 = 0{,}1193$. (A Φ jelölés nem kötelező, meg lehet maradni végig az eloszlásfüggvényes jelölés mellett.)
(b) (8 pont)
(1 pont) $\mathrm{cov}(Z, W) = \mathrm{cov}(X + Y, X - 2Y)$ (elég, ha a következő lépések valamelyikéből derül ki, hogy az additív konstanst el lehet hagyni. Ha nem hagyja el az additív konstanst, akkor ez a pont abban az esetben jár, ha a végén rájön, hogy a konstanst tartalmazó tag értéke 0)
(2 pont) $= \mathrm{cov}(X, Y) - 2\mathrm{cov}(X, X) + \mathrm{cov}(Y, Y) - 2\mathrm{cov}(X, Y)$ (ebből 1 pont a tagokra bontásra, 1 a 2-es szorzók kiemelésére, ami összevonható egy lépésbe, ahogy itt is írtam)
(0 pont) $= -2\mathrm{cov}(X, X) + \mathrm{cov}(Y, Y) - \mathrm{cov}(X, Y)$, (1 pont) ahol $-2\mathrm{cov}(X, X) = -2\mathbb{D}^2(X) = -18$,
(1 pont) $\mathrm{cov}(Y, Y) = \mathbb{D}^2(Y) = 16$, (1 pont) és $\mathrm{cov}(Y, X) = 0$,
(1 pont) mert függetlenek,
(1 pont) tehát $\mathrm{cov}(Z, W) = -2$.

[a] Ha azt mondja, hogy a CHT miatt közelít azzal a standard normálissal, ami X standardizáltját valójában nem csupán közelíti, hanem megegyezik vele, akkor ez a pont nem jár (még akkor sem, ha hivatkozik a CHT-re, mert nem approximálni akarunk, hanem pontos eredményt kapni – a táblázat pontosságának erejéig). A többi pont ilyen esetben is megszerezhető.

(c) (4 pont)
1. megoldás.
(1+1 pont) $X + Y \sim \mathrm{N}(-1+1; 9+16) = \mathrm{N}(0; 25)$, vagyis $\mathbb{E}(X) = 0$ és $\mathbb{D}^2(X) = 25$,
(1 pont) mert független normálisok összege normális
(1 pont) és a paraméterek összeadódnak (utóbbira jár 1 pont akkor is, ha ezt nem írja le ilyen általánosan, de az visszakövethető a megoldásból, hogy a várható értékeket és a szórásnégyzeteket is összeadja).
2. megoldás.
(1 pont) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1 - 1 = 0$ (nem kell indokolni)
(1+1 pont) és $\mathbb{D}^2(X+Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) = 9 + 16 = 25$ (1 pont arra, hogy a szórásnégyzetek összeadódnak és 1 a konkrét értékekre és azok összeadására),
(1 pont) mert függetlenek.

4. Megfigyelünk két villanykörtét, amelyek egymás mellett függnek egy terem mennyezetén. A megfigyelésünk kezdetén még mindkét körte üzemképes. A két villanykörte kiégéséig hátralévő időt egy-egy folytonos és örökifjú eloszlású, 100 nap várható értékű valószínűségi változó írja le, amelyek egymástól függetlenek. Pontosan 100 nappal a megfigyelés kezdete után visszatérünk a terembe és megvizsgáljuk, hogy kiégtek-e már a körték.

   (a) Mi a valószínűsége, hogy a bal oldali villanykörte ekkor még üzemképes (azaz nem égett ki már korábban)?

   (b) Definiáljuk az X és Y diszkrét valószínűségi változókat a következőképpen: $X = 1$, ha a bal oldali körte már korábban kiégett és $X = -1$ különben, és $Y = 0$, ha a jobb oldali körte már korábban kiégett és $Y = 3$ különben. Határozzuk meg $\mathrm{cov}(XY) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ értékét.

Megoldás.
(a) (9 pont)
(1 pont) A bal oldali villanykörte hátralévő élettartamát leíró valószínűségi változókat jelöljük T-vel, a jobb oldaliét pedig U-val. (Nem baj, ha nem vezet be erre külön jelölést, de ha ezt nem teszi meg és később van ezzel összefüggésbe hozható szintaktikai hiba vagy jelölési következetlenség, akkor ez a pont nem jár.)
(1 pont) Ekkor T és U (független) exponenciális eloszlású valószínűségi változók[b],
(1 pont) mivel eloszlásuk folytonos és örökifjú (és így csak exponenciális lehet).
(1 pont) Ha az eloszlás paramétere λ, akkor a valószínűségi változó várható értéke $1/\lambda$,
(1 pont) ezért $\lambda = 1/100$.
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(T \geq 100)$ (vagy: $\mathbb{P}(T > 100)$-zal is OK, a későbbiekben is hasonlóan, és a folytonosságra nem kell külön hivatkozni, azaz $\mathbb{P}(T > 100) = 1 - \mathbb{P}(T < 100)$ alkalmazása indoklás nélkül is OK pontlevonás nélkül)
(2 pont) $= 1 - \mathbb{P}(T < 100) = \mathrm{e}^{-1/100 \cdot 100}$ (a két lépés összevonható; nem baj, ha a hallgató tudja, hogy $\mathbb{P}(T > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$)
(1 pont) $= \mathrm{e}^{-1} (\approx 0{,}3679)$.
(b) (11 pont)
1. megoldás.
(1 pont) $\mathrm{cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$ (tehát elég $\mathbb{E}(XY)$-t meghatározni). (Ha valaki kiszámolja $\mathrm{cov}(X, Y)$-t és $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$-t, az is jó, de $\mathbb{E}(XY)$ kiszámításán felül minden másra összesen csak 1 pont jár. $\mathbb{E}(X) = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$, $\mathbb{E}(Y) = 3\mathrm{e}^{-1}$.)
(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = \sum_{XY \in \mathrm{Ran}(XY)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)$
(1 pont) $= -3\mathbb{P}(T \geq 100, U \geq 100) + 3\mathbb{P}(T < 100, U \geq 100)$ (lehet persze metszetekkel is

[b] Az (a) rész megoldásához U-t egyáltalán nem kell megemlíteni. Viszont ha soha nem említi meg, hogy U ugyanolyen eloszlású, mint amit T-re kimond, csak használja, akkor a (b)-ben 1 pont levonás (feltéve, hogy egyáltalán írt valamit a (b)-hez, ami U-ra vonatkozik).

írni. Az előző lépéssel akkor vonható össze, ha kiderül, hogy a 3 és a -3 honnan származik. Az $XY = 0$-hoz tartozó valószínűségeket nem kötelező felírni, kiszámolni meg pláne nem.).
(2 pont) $\mathbb{P}(T \geq 100, U \geq 100) = \mathbb{P}(T \geq 100)\mathbb{P}(U \geq 100) = \mathbb{P}(T \geq 100)^2$ (összevonható egy lépésbe),
(1+1 pont) mert függetlenek és azonos eloszlásúak (utóbbit szabad kevésbé formálisan is megfogalmazni).
(1 pont) $= (\mathrm{e}^{-1})^2 = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}1353$ (elég csak a szimbolikus vagy csak a numerikus eredmény).
(1 pont) $\mathbb{P}(T < 100, U \geq 100) = \mathbb{P}(T < 100)\mathbb{P}(U \geq 100)$ (mert függetlenek, de ezt az indoklást elég, ha egyszer írja oda; ha csak itt és a másiknál nem, akkor jár a fenti 1 pont)
(1 pont) $= (1 - \mathrm{e}^{-1})\mathrm{e}^{-1}$ (nem kell jobban indokolni)
$= \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}2325$ (elég csak a szimbolikus eredmény bármelyik formában vagy csak a numerikus eredmény).
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(XY) = -3\mathrm{e}^{-2} + 3(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}) = 3\mathrm{e}^{-1} - 6\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}2916$ (elég csak a szimbolikus vagy csak a numerikus eredmény).
2. (elegánsabb, de több ötletet igénylő) megoldás vázlata.
(1 pont) $\mathrm{cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$ (tehát elég $\mathbb{E}(XY)$-t meghatározni).
(1 pont) Mivel T és U független, X és Y is független,
(1 pont) és ezért $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. (Arra is jó hivatkozni is, hogy mivel függetlenek, a kovarianciájuk 0.)
(1 pont) Továbbá $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X = -1)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(T < 1) - \mathbb{P}(T \geq 1)$ (az előző lépéssel összevonható)
(1 pont) $= 1 - \mathrm{e}^{-1} - (\mathrm{e}^{-1})$
(1 pont) $= 1 - 2\mathrm{e}^{-1} (\approx 0{,}2642)$,
(1 pont) és $\mathbb{E}(Y) = (0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0)+)3 \cdot \mathbb{P}(Y = 3)$
(1 pont) $= 3 \cdot \mathbb{P}(U \geq 1)$
(1 pont) $= 3\mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}1036$,
(1 pont) tehát $\mathbb{E}(XY) = 6\mathrm{e}^{-2} - 3\mathrm{e}^{-1} = 0{,}2916$.

5. Egy X és egy Y valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/4, & \text{ha } 1 < x < 3 \text{ és } 2 < y < 2x, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg $f_{Y|X}(y|x)$ értékét minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.
(b) Ez alapján bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{E}[Y|X] = X + 1$.
(c) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X < 2)$ valószínűséget.

Megoldás.
(a) (10 pont)
(1 pont) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$,
(1 pont) ha $f_X(x) > 0$ (az $f_X(x) = 0$ esetre a megoldás során később visszatérünk).
(1 pont) Határozzuk meg először $f_X(x)$-et, $f_X(x) = 0$, ha $x \leq 1$ vagy $x \geq 3$,
(1 pont) és ha $1 < x < 3$, akkor $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}y$
(1 pont) $= \int_2^{2x} \frac{1}{4}\mathrm{d}y$ (az előző lépéssel összevonható, elég, ha az utóbbi képlet szerepel, de az fontos, hogy $1 < x < 3$)
(1 pont) $\left[\frac{1}{4}y\right]_{y=2}^{y=2x}$
(1 pont) $= x/2 - 1/2$.
(1 pont) Tehát ha $1 < x < 3$ (vagy: ha $f_X(x) > 0$), akkor: ha $2 < y < 2x$, akkor $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1/4}{x/2-1/2} = \frac{1}{2x-2}$,
(1 pont) ha pedig $y \leq 2$ vagy $y \geq 2$, akkor $f_{Y|X}(y|x) = 0$.

(1 pont) Továbbá $f_{Y|X}(y|x) = 0$ (minden y-ra, de nem baj, ha ezt nem hangsúlyozza), ha $f_X(x) = 0$, azaz ha $x \le 1$ vagy $x \ge 3$.
(b) (6 pont)
(1 pont) A regressziós függvény $\mathbb{E}[Y|X = x] = g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y$ (a két jelölésből az egyik elég, és nem kell odaírni szöveggel, hogy regressziós függvény),
(1 pont) $= \int_2^{2x} \frac{y}{2x-2}\mathrm{d}y$ (a két lépés összevonható, ha világos, hogy honnan jön az y és honnan az $1/(2x-2)$ mint szorzó)
(0 pont) $= \frac{1}{2x-2}\int_2^{2x} y\mathrm{d}y$
(1 pont) $= \frac{1}{2x-2}\left[y^2/2\right]_{y=2}^{2x}$
(1 pont) $= \frac{1}{2x-2}(2x^2 - 2)$
(1 pont) $= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$.
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(Y|X)(= g(X)) = X + 1$, amit bizonyítani kellett.

2. megoldás.
(1 pont) Az (a) feladat szerint $y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$ adott $1 < x < 3$ esetén konstans a $(2, 2x)$ intervallumon és különben 0 (ez az 1 pont akkor is jár, ha nem írja oda, hogy különben 0),
(2 pont) ezért feltéve, hogy $X = x$, Y egyenletes eloszlású a $(2, 2x)$ intervallumon (vagy még jobb: X ismeretében Y egyenletes eloszlású a $(2, 2X)$ intervallumon; ha ezt írja, akkor nem kell semmit x-szel leírni, csak X-szel),
(2 pont) tehát $\mathbb{E}[Y|X = x]$ (a $(2, 2x)$ intervallum középpontjával, azaz) $\frac{2+2x}{2} = x + 1$-gyel egyenlő,
(1 pont) így $\mathbb{E}[Y|X] = X + 1$.

Ha valami olyasmit ír a számolásokat kihagyva és az (a) eredményének felhasználása nélkül (vagy abban az esetben, ha az (a)-ra rossz megoldást kapott), hogy feltéve, hogy X ismeretében Y egyenletes eloszlású a $[2, 2X]$ intervallumon és ezért $\mathbb{E}[Y|X = x] = \frac{2+2x}{2} = x + 1$, arra lehet adni max. 3 pontot, és arra, hogy ebből $\mathbb{E}[Y|X] = X + 1$ is következik, jár még 1 pont. A maradék 2 pont akkor jár, ha ezt valahogy értelmesen megindokolja, pl. azt mondja, hogy mivel az együttes sűrűségfüggvény konstans azon a derékszögű háromszögön, ahol nem 0, adott $x \in (1, 3)$ esetén $y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$ is konstans $(2, 2x)$-en (itt nemcsak az fontos, hogy konstans, hanem hogy hol).

(c) (4 pont)
1. megoldás.
(1+1 pont) Felhasználva, hogy f_X-et már meghatároztuk (ezt nem muszáj odaírni), $\mathbb{P}(X < 2) = \int_{-\infty}^{2} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{d}x$ (a két lépés összevonható, elég, ha a második kifejezés szerepel)
(1 pont) $= \left[x^2/4 - \frac{x}{2}\right]_1^2$
(1 pont) $= 4/4 - 2/2 - 1/4 + 1/2$
(0 pont) $= 1/4$.
2. megoldás: klasszikus együttes sűrűségfüggvényes számolással. Itt az erőfeszítések mértékéhez képest sajnos viszonylag kevés pont jár.
(1 pont) $\mathbb{P}(X < 2)(= \mathbb{P}(1 < X < 2, 2 < Y < 2X)) = \int_1^2 \frac{1}{4}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ (ez a két lépés összevonható és elég, ha a második kifejezés szerepel, viszont ha a második nincs meg, de az első még helyes, arra jár egy pont)
(1 pont) $= \int_1^2 \left[\frac{1}{4}y\right]_{y=2}^{2x}\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_1^2(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{x=1}^{2}$
(0 pont) $= \frac{4-4-1+2}{4} = \frac{1}{4}$.

3. megoldás: geometriai valószínűségi mezővel. Szintén
(1 pont) Az (X, Y) véletlen pont választása megegyezik egy (egyenletes) véletlen pont választásával az

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x < 3, 2 < y < 2x\}$$

derékszögű háromszögben. (Ehelyett a formális leírás helyett jó egy helyes, értelmezhető ábra is. Ezért az 1 pontért nem kell indokolni; az indoklás az, hogy a sűrűségfüggvény pont ezen a háromszögön konstans és nem 0, mindenhol máshol pedig 0.)
(1 pont) (Ez az Ω eseménytér,) ennek a területe 4.
(1 pont) A kedvező terület ennek a háromszögnek az $x = 2$ egyenestől balra eső része. Ez egy (az Ω-val hasonló) derékszögű háromszög, amelynek az oldalhosszai 1 és 2, tehát a területe 1.
(1 pont) Így a geometriai valószínűségi mező képlete szerint a keresett valószínűség a kedvező és az összes terület hányadosa, vagyis 1/4.

6. * Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek $X_1, \ldots, X_n$ fae. $\mathrm{U}(0; \vartheta)$ eloszlású valószínűségi változók, ahol $\vartheta > 0$ egy ismeretlen paraméter.

   (a) A minta rögzített $x_1, \ldots, x_n$ realizációja esetén határozzuk meg a likelihood-függvény $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n)$ értékét.

   (b) Adjunk a minta alapján maximum likelihood becslést ϑ-ra.

Megoldás.
Ez a példa nagyon hasonló a jegyzetkiegészítésben szereplő 14.2.10. Példához.
(a) (8 pont)
(3+1 pont) (Az egyenletes eloszlás tulajdonságai miatt) az f_ϑ sűrűségfüggvény

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta}, & \text{ha } x \in (0, \vartheta), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}.$$

(Az 1. sorban 1 pont a képletre, 1–1 a határokra, 1 pont a 2. sorra.)
(3+1 pont) Így a likelihood-függvény $(X_1, \ldots, X_n)$ bármely $(x_1, \ldots, x_n)$ realizációja esetén

$$L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta^n}, & \text{ha } x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \vartheta), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(Az 1. sorban 1 pont a képletre, összesen 1 pont a határokra, ami csak akkor jár, ha tökéletes, és 1 pont arra, hogy az összes x_i ebbe az intervallumba esik. 1 pont a 2. sorra.)
(b) (12 pont)
(3 pont) Az intervallum hosszát mindaddig csökkenthetjük (és ezzel a likelihood-függvényt növelhetjük), amíg az $(x_1, \ldots, x_n)$ az $(X_1, \ldots, X_n)$ egy realizációja marad,
(2 pont) azaz amíg

$$\max\{x_1, \ldots, x_n\} < \vartheta.$$

(3 pont) Így a likelihood-függvény éppen abban a határesetben lesz maximális, amikor $\max\{x_1, \ldots, x_n\} = \vartheta$. (Ha ezt máshogy jól megindokolja, akkor is jár az előbbi 3+2 pont is.) (Ebben az esetben $(x_1, \ldots, x_n)$ már éppen nem realizáció, de bármely $\vartheta > \max\{x_1 \ldots, x_n\}$ esetén igen – ezt nem kell odaírni.)
(2 pont) Ezért az $(x_1, \ldots, x_n)$ realizációhoz tartozó maximum likelihood becslésünk

$$\vartheta_*(x_1, \ldots, x_n) = \max\{x_1, \ldots, x_n\},$$

(2 pont) a maximum likelihood becslésünk pedig

$$\vartheta_*(X_1, \ldots, X_n) = \max\{X_1, \ldots, X_n\} = X_n^*.$$

(Az X_n^* jelölést nem szükséges használni, de ha használja, akkor az elég önmagában is.)
További megjegyzések a javításhoz:

- Ha a maximumot összekeveri a minimummal vagy az előjeleket rontja el, akkor összesen 2–2 pont levonás.
- Ha arra hivatkozik, hogy ez ugyanaz, mint a jegyzetkiegészítésbeli példa, és emiatt mindent -1-szer kell venni és a $-\min$ helyett $\max$ lesz, arra önmagában is jár a b)-ben 6 pont. A teljes pontszám akkor jár, ha helyesen leírja, hogy az $x \mapsto -x$ transzformáció hogyan hat a likelihood-függvényre.
- Ha a b)-ben log-likelihood-függvényes módszerrel próbálkozik, akkor a log-likelihood-függvény helyes levezetéséért 2 pont jár, ϑ szerinti parciális deriválására szintén 2 pont. Annak megállapítására, hogy a deriváltnak sehol nincs zérushelye ott, ahol $(x_1, \ldots, x_n)$ realizáció, jár 3 pont. További 3 pont jár arra, ha megnézi a határokat és úgy megtalálja a helyes likelihood becslést adott realizáció esetén, végül 2 pont jár a maximum likelihood becslés megadására. (A log-likelihood függvényt nem muszáj meghatározni, lehet a likelihood-függvényt közvetlenül deriválni, amire jár összesen 4 pont, onnan pedig a pontozás a log-likelihood-függvényes módszerhez hasonlóan megy tovább a derivált zérushelyeinek elemzésével.) Ez a megoldás igen munkaigényes a javasolt megoldáshoz képest, és végeredményben csak az indoklást helyettesíti a log-likelihood-függvényes módszer, magát a megoldást ugyanúgy kell levezetni, mint a javasolt módszer esetén.