Vizsgadolgozat

Megoldás

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. (a) Legyen $k \in \mathbb{N}$. Milyen feltétel teljesülése esetén és hogyan definiáljuk egy X valószínűségi változó k-adik momentumát?

   (b) Legyen $n \in \mathbb{N}$, és legyen adott egy $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ n elemű fae. minta, ahol a mintaelemek eloszlása egy ismeretlen $\vartheta \in \theta \subseteq \mathbb{R}^d$ paramétertől függ, és legyen $\psi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ egy függvény. Legyen továbbá $T(\mathbf{X}) = T(X_1, \ldots, X_n)$ a minta egy statisztikája.
   Mikor mondjuk azt (az előadáson elhangzott definíció szerint), hogy a $T(\mathbf{X})$ statisztika a $\psi(\vartheta)$ paraméterfüggvénynek

   (i) egy torzítatlan becslése, illetve

   (ii) egy aszimptotikusan torzítatlan becslése?

Megjegyzés: Az $\mathbb{E}$ és $\mathbb{E}_\vartheta$ jelöléseket az előadáson tanult módon használhatjuk, ezeket nem kell bevezetni, és nem kell megmagyarázni, hogy mit jelentenek.

Megoldás.

(a) (10 pont)

(5 pont) X-nek a k-adik momentuma $\mathbb{E}(X^k)$, (természetesen $\mathbb{E}[X^k]$ is jó, sőt $\mathbb{E}X^k$ is)

(5 pont) amit akkor definiálunk, ha $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty$.

(jegyzetkiegészítés 14.3.1. Definíció; a diasoron már a valszám résznél szerepelt a momentumok fogalma)

Ha $\mathbb{E}(X^k)$ vagy $\mathbb{E}(|X|^k)$ helyett a várható érték diszkrét vagy folytonos esetre vonatkozó ekvivalens definícióját írja le, akkor max. 3–3 pont mindkét résznél.

Ha viszont $\mathbb{E}(X^k)$-t vagy $\mathbb{E}(|X|^k)$-t a várható érték általános definíciójával fogalmazza meg (pl. $\mathbb{E}(X^k) = \sup_{Y \text{egyszerű}, \ Y \leq X} \mathbb{E}(Y^k)$, vagy ugyanez $\mathbb{E}(Y^k)$-t az egyszerű val. változók várható értéke szerint kifejtve), az jó.

Kisebb szintaktikai hibák esetén részpontszám adható. $\mathbb{E}(X)^k$-ra, illetve $\mathbb{E}(|X|)^k$-ra nem jár pont.

(b) (összesen 10 pont)

(i)
A torzítatlanság akkor teljesül, ha
(4 pont) $\mathbb{E}_\vartheta(T(X_1,\ldots,X_n)) = \psi(\vartheta)$
(1 pont) minden $\vartheta \in \theta$-ra.
(ii)
Az aszimptotikus torzítatlanság akkor teljesül, ha
(4 pont) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\vartheta(T(X_1,\ldots,X_n)) = \psi(\vartheta)$
(1 pont) minden $\vartheta \in \theta$-ra.
(jegyzetkiegészítés 14.1.1. Definíció (1) és (2) része)
$(X_1,\ldots,X_n)$ helyett természetesen szabad $\mathbf{X}$-et írni a T argumentumában. Ne vonjunk le pontot, ha csak az nem világos, hogy X vastag vagy nem vastag betűs.
Ha $\mathbb{E}_\vartheta$ helyett csak $\mathbb{E}$-t ír, akkor a vonatkozó 4 pontból maximum 2 pont jár.

2. Egy elképzelt országban eladott gyufák 70%-a egy olcsó gyufákat gyártó cégtől származik, ezek 1/3-a használhatatlan. A maradék 30%-ot egy drágább gyufákat készítő vállalat gyártja, az általa készített gyufák közül tízből átlagosan egy használhatatlan.

   (a) Véletlenszerűen kiválasztva egy, az adott országban eladott gyufát, mi a valószínűsége, hogy az használhatatlan?

   (b) Véletlenszerűen kiválasztva egy, az adott országban eladott gyufát, jelölje X azt a valószínűségi változót, amelynek értéke 1, ha a gyufa használhatatlan és 0, ha használható. Jelölje továbbá Y azt a valószínűségi változót, amelynek értéke 2, ha ugyanezt a gyufát az olcsó gyufákat készítő cég gyártotta, és 1, ha a drágább gyufákat gyártó vállalat gyártotta. Határozzuk meg X és Y kovarianciáját, illetve X szórásnégyzetét.

Megoldás.
(a) (7 pont)
Jelöljük O-val azt az eseményt, hogy a kiválasztott gyufát az olcsóbb gyufákat gyártó cég gyártotta és D-vel azt az eseményt, hogy a drágább gyufákat gyártó cég gyártotta. Jelöljük továbbá H-val azt az eseményt, hogy a kiválasztott gyufa használhatatlan. (Nem szükséges persze ezekre az eseményekre jelölést bevezetni.)
(1 pont) arra, hogy legalább minimális indoklást ad arra, hogy a TVT feltételei teljesülnek (elég további magyarázat nélkül arra hivatkozni, hogy O és D teljes eseményrendszert alkotnak).
(1 pont) A teljes valószínűség tétele szerint
(2 pont) $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H|O)\mathbb{P}(O) + \mathbb{P}(H|D)\mathbb{P}(D)$
(1+1 pont) $\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}$
(1 pont) $= \frac{79}{300}$ (jó tizedestört alakban, kerekítve is).
(b) (13 pont)
(1 pont) $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, (elég, ha később kiderül, hogy ezen képlet alapján számol)
(2 pont) ahol $\mathbb{E}(XY) = 2\mathbb{P}(X=1, Y=2) + \mathbb{P}(X=1, Y=1)$ (persze nem baj, ha a 0-s tagokat is odaírja, de azokra nem jár pont)
(1 pont) $= \mathbb{P}(O\cap H) + \mathbb{P}(D\cap H)$ (ezt nem kell ilyen expliciten kimondani, de a következő pontnál szereplő $\frac{7}{30}$ és $\frac{3}{100}$ valószínűségek eredetére kell valami apró magyarázat, akár az a) megoldásának részleteire hivatkozva)
(1 pont) $= 2\cdot\frac{7}{30} + 1\cdot\frac{3}{100}$
(1 pont) $= \frac{149}{300}$ (jó tizedestört alakban, kerekítve is),
(1 pont) továbbá $\mathbb{E}(X) = \frac{79}{300}$,
(1 pont) mert... (itt vagy ki kell számolni, nagyon részletes indoklás nem kell; vagy arra kell hivatkozni, hogy X egy indikátorváltozó, ekkor ki lehet olvasni a táblázatból, hogy a várható értéke a vonatkozó esemény valószínűsége),
(1 pont) és $\mathbb{E}(Y) = 2\cdot\frac{7}{10} + 1\cdot\frac{3}{10}$

(1 pont) $= \frac{17}{10}$.
(1 pont) Tehát $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{149}{300} - \frac{1343}{3000} = \frac{147}{3000} = \frac{49}{1000} (= 0{,}049)$ (ha a kovariancia általános képlete már szerepelt, akkor itt nem jár pont a részletszámításokra, csak a végeredményre. Ha nem szerepelt, de itt az alapján számolt, akkor a fenti 1 pontot itt utólag meg lehet adni).
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \frac{79}{300} \cdot (1 - \frac{79}{300}) = \frac{17459}{90000} = 0{,}1939\dot{8} \approx 0{,}1940$ (jó végtelen szakaszos tizedestört alakban, kerekítve és közönséges tört alakban is)
(1 pont) mert... (itt vagy ki kell számolni $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ alapján, ahol az jön ki, hogy $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X)$, hiszen indikátorváltozóról van szó, nagyon részletes indoklás nem kell; vagy arra kell hivatkozni, hogy X egy indikátorváltozó, ekkor ki lehet olvasni a táblázatból, hogy a várható értéke a vonatkozó esemény valószínűsége).

3. Egy csendes-óceáni szigeten gyakran fordulnak elő tájfunok. Egy bizonyos év kezdetétől fogva (korlátlan ideig) megfigyeljük a szigeten bekövetkező tájfunokat.

   (a) Az adott év alatt bekövetkező tájfunok számát egy Poisson-eloszlású X valószínűségi változóval modellezzük, és e^{-1} annak a valószínűsége, hogy az adott évben egyáltalán nem fordul elő tájfun. Mi a valószínűsége, hogy az adott évben legalább 3 tájfun fordul elő?

   (b) A megfigyelés kezdetétől az azt követő első tájfun bekövetkezéséig eltelő időt egy folytonos, örökifjú eloszlású valószínűségi változó írja le, amelyre

$$\mathbb{P}(Y > 1) = \mathbb{P}(X = 0)$$

   teljesül. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y > 11|Y > 5)$ feltételes valószínűség értékét és az $\mathbb{E}(Y^2)$ várható értéket.

(a) (9 pont)
(0 pont) Először a Poisson-eloszlás λ paraméterét kívánjuk meghatározni.
(1 pont) (A feladat szövege szerint) $\mathbb{P}(X = 0) = \mathrm{e}^{-1}$
(1 pont) $= \mathrm{e}^{-\lambda}$ (persze az is jó, ha $(\lambda^0/0!) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$-t ír)
(1 pont) tehát $\lambda = 1$.
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \geq 3)$
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X < 3)$
(2 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2)$ (az előző lépéssel összevonható)
(2 pont) $= 1 - \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} - \frac{1^2}{2!}\mathrm{e}^{-1} = 1 - 2{,}5 \cdot \mathrm{e}^{-2} (\approx 0{,}0803)$ (ebből 1 pont a helyes végeredményre, nem baj, ha csak tizedestört alakban vagy csak képlettel szerepel. 1 pont arra, hogy van legalább valami minimális indoklás; az nem baj, ha a $\frac{1^2}{2!}$ helyett csak $1/2$ szerepel, de legyen visszakövethető, hogy melyik tag értéke mennyi).
(b) (11 pont)
(1 pont) arra, hogy ha Y eloszlása folytonos és örökifjú, akkor csak exponenciális lehet (és a paraméterét kellene meghatározni, amit itt μ-vel fogunk jelölni, mivel a λ jelölés már foglalt. Ha ezt is λ-val jelöli, azért ne vonjunk le pontot, de annak ki kell derülnie, hogy *a priori* nem egyértelmű, hogy ez a ráta ugyanaz, mint a Poisson-eloszlás paramétere, hanem majd a számításokból jön ki).
(1 pont) $\mathbb{P}(Y > 1) = \mathrm{e}^{-\mu}$ (itt az adható pontok alacsony száma miatt kivételesen nem várunk el részletes indoklást arra, hogy $\mathbb{P}(Y > 1) = \mathbb{P}(Y \geq 1)$)
(1 pont) és $\mathbb{P}(X = 0) = \mathrm{e}^{-1}$,
(1 pont) tehát $\mu = 1$.
(1 pont) Az örökifjúság miatt
(1 pont) $\mathbb{P}(Y > 11|Y > 5) = \mathbb{P}(Y > 6)$
(1 pont) $= \mathrm{e}^{-6\cdot 1} = \mathrm{e}^{-6}$ (itt sem várunk el arra indoklást, hogy $\mathbb{P}(Y > 6) = \mathbb{P}(Y \geq 6)$)
(0 pont) $(= 0{,}0025)$.
(2 pont) $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{D}^2(Y) + \mathbb{E}(Y)^2$

(1+1 pont) $= 1/1^2 + 1/1^2$ (a táblázat alapján, ezért nem kell indokolni, a négyzeteket természetesen el lehet hagyni)
(0 pont) $= 2$.

4. Egy falu futballcsapata egy bajnokság minden mérkőzésén a többi mérkőzéstől (együttesen) függetlenül 1/3 valószínűséggel nyer, 1/3 valószínűséggel játszik döntetlent és 1/3 valószínűséggel veszít. A labdarúgásban megszokott szabályok szerint minden győzelem 3 pontot, minden döntetlen 1 pontot és minden vereség 0 pontot ér.

   (a) Jelölje Y a csapat által egy adott mérkőzésen megszerzett pontok számát. Határozzuk meg Y szórásnégyzetét.

   (b) Jelölje X a csapat által 20 egymást követő mérkőzésen elért pontok számának összegét. Közelítsük a $\mathbb{P}(X \geq 20)$ valószínűséget alkalmas approximációval. (A valószínűség pontos értékének meghatározására itt nem jár pont.)

Megoldás.
(a) (6 pont)
(1 pont) $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$,
(1 pont) ahol $\mathbb{E}(Y) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}$
(1 pont) $= \frac{4}{3}$,
(1 pont) $\mathbb{E}(Y^2) = 9 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}$
(1 pont) $= \frac{10}{3}$,
(1 pont) tehát $\mathbb{D}^2(Y) = \frac{10}{3} - \frac{16}{9} = \frac{14}{9}$ (itt már csak a végeredményre jár pont, viszont ha a szórásnégyzet fenti általános képlete hiányzik, de itt az alapján számol, akkor azt a pontot utólag meg lehet adni).
(b) (14 pont)
(1 pont) arra az ötletre, hogy a CHT-t kellene használni. Ez jár akkor is, ha ez a későbbiekben nem sikerül, feltéve, hogy kiderül, hogy az általános CHT-ról és nem a de Moivre–Laplace-tételről van szó.
(1 pont) arra, hogy valamit mond arról, hogy miért lehet a CHT-t alkalmazni, pl. hogy az X valószínűségi változó 20 darab független, azonos eloszlású val. változó összege, amik az egyes meccsek pontszámai. Ezt nem kell nagyon formálisan és részletesen, de ha fölírja képlettel, hogy X ilyen val. változók összege, az elég, és ebben az esetben ezért az 1 pontért még a függetlenséget sem kell hangsúlyozni.
(4 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}(X \geq 20) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 20 \cdot \frac{4}{3}}{\sqrt{20}\sqrt{\frac{14}{9}}} \geq \frac{20 - 20 \cdot \frac{4}{3}}{\sqrt{20}\sqrt{\frac{14}{9}}}\right),$$

(Nem kell fölírni általános $n\mathbb{E}(X_i)$-vel és $\sqrt{n}\mathbb{D}(X_i)$-vel, ahol az X_i-k az egyes meccsek pontszámai, de annak ki kell derülnie a megoldásból, hogy a sztenderdizálás során mit vonunk le, majd mivel osztunk. Ha viszont rossz numerikus értékek szerepelnek $n\mathbb{E}(X_i)$-nél és $\sqrt{n}\mathbb{D}(X_i)$-nél, akkor részpontszám csak akkor adható, ha szerepel az általános képlet is valamilyen elfogadható formában.)
(3 pont) amit $\mathbb{P}(Y \geq \frac{20 - 20 \cdot \frac{4}{3}}{\sqrt{20}\sqrt{\frac{14}{9}}}) \approx \mathbb{P}(Y \geq -1{,}1952)$-vel közelítünk, ahol $Y \sim \mathrm{N}(0;1)$ (ebből 2 pont a standard normálissal való közelítésre, 1 pont a jobb oldal numerikus értékének kiszámítására, amit szabad ennél előbb vagy ennél később is megtenni, de előbb-utóbb szükség lesz rá, hogy ki lehessen olvasni valamit a táblázatból)
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(Y < -1{,}1952)$
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(Y > 1{,}1952)$
(1 pont) $\Phi(1{,}1952)$ (itt nem jár külön pont arra, hogy $\mathbb{P}(Y > ...) = \mathbb{P}(Y \geq ...)$, csak arra, hogy Φ-s alakra hozzuk a keresett valószínűséget. A Φ jelölés sem kötelező. Természetesen más

sorrendben is el lehet jutni ehhez az alakhoz, pl. $\mathbb{P}(Y \geq ...) = 1 - \mathbb{P}(Y \geq -...) = \mathbb{P}(Y < -...) = \Phi(-...)$)
(1 pont) $\approx \Phi(1{,}20)$ (ha az 1,1952 numerikus érték sehol nem szerepel, de az 1,20 már igen, az is OK)
(1 pont) $\approx 0{,}8849$ (a táblázat alapján).
Ha a de Moivre–Laplace tételt akarja használni (pl. úgy, hogy a győzelmeket akarja megszámolni, vagy a győzelmek és döntetlenek számának összegét), akkor a b) részben maximum 5 pont.

5. Legyen az X és az Y valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} -4x\mathrm{e}^{-2y}, & \text{ha } y > 0 \text{ és } -1 < x < 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}.$$

(a) Független-e X és Y?
(b) Milyen eloszlású Y és milyen paraméterrel?
(c) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

(a) (13 pont)
(2 pont) X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén (mivel (X,Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó; ezt nem muszáj odaírni. Részpontszám adható például, ha kifelejti, hogy ez minden x, y-ra igaz, de amúgy a képlet jó).
(2 pont) Ha $-1 < x < 0$, akkor $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} -4x\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y$ (a két lépés összevonható)
(0 pont) $= -4x\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y$
(1 pont) $= -4x\Big[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2y}\Big]_{y=0}^{\infty}$
(1 pont) $= -4x \cdot (0 + 1/2) = -2x$,
(1 pont) és ha $x \leq -1$ vagy $x \geq 0$, akkor $f_X(x) = 0$ (ezt nem kell részletesebben indokolni).
(2 pont) Ha $y > 0$, akkor $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} -4x\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}x$ (a két lépés összevonható)
(0 pont) $= -\mathrm{e}^{-2y}\int_{-1}^{0} 4x\mathrm{d}x$
(1 pont) $= -\mathrm{e}^{-2y}\Big[2x^2\Big]_{-1}^{0}$
(1 pont) $= -\mathrm{e}^{-2y} \cdot (0 - 2) = 2\mathrm{e}^{-2y}$,
(1 pont) és ha $y \leq 0$, akkor $f_Y(y) = 0$ (ezt sem kell részletesebben indokolni).
(1 pont) arra a következtetésre, hogy $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ az eddigiek alapján minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, és így X és Y független (nem szükséges további indoklás).
Részpontszámok részben jó megoldásokra:

- Ha az megvan, hogy $f_{X,Y}(x,y)$ pontosan azokra az (x,y)-okra 0, amelyekre $f_X(x)f_Y(y) = 0$, arra jár 2 pont, akár indoklás nélkül is.
- Ha szerepel, hogy függetlenek, azért önmagában még nem jár pont, de ha van valamilyen (akár rossz) indoklás is rá, akkor legalább 1 pont jár.
- Ha azt mutatja meg, hogy $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, az is jó, de ezt a megoldási lehetőséget itt nem részletezzük (tovább tart, mint a fenti mintamegoldás).
- Ha tudja a függetlenség kritériumát, és utána valami olyasmire hivatkozik, hogy a $-4x\mathrm{e}^{-2y}$ egy csak x-től függő és egy csak y-tól függő mennyiség szorzata, és ezért függetlenek, arra (az első 2 ponton felül) csak 4 pont jár, mert lehetne olyan is $f_{X,Y}$, hogy maga a képlet szorzatra bomlik, de szakaszonként van definiálva és az X-re és az Y-ra vonatkozó szakaszhatárok függenek egymástól. Teljes pontszámot akkor lehet integrálás nélkül elérni, ha valami olyasmire hivatkozik, hogy a tartomány, ahol $f_{X,Y}$ nem 0, pontosan annak a

két intervallumnak a Descartes-szorzata, ahol f_X, illetve f_Y nem 0, ezen a tartományon $f_{X,Y}(x, y)$ egy csak x-től és egy csak y-tól függő kifejezés szorzatára bomlik, és mindenhol máshol mind $f_{X,Y}$, mind $f_X f_Y$ konstans 0. Attól függően, hogy ezt mennyire sikerül értelmesen megfogalmazni, részpontszám is adható.

(b) (2 pont)
(0 pont) Az a) feladatban azt kaptuk, hogy

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2y}, & \text{ha } y > 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(2 pont) Ez alapján $Y \sim \mathrm{Exp}(2)$. (1 pont arra, hogy exponenciális, 1 pont pedig a paraméterre). Ha az a)-ban az eloszlásfüggvényt számolta ki, akkor abból is hasonlóan lehet levonni a következtetést. Ha pedig sem az eloszlásfüggvényt, sem a sűrűségfüggvényt nem számolta ki, akkor most az egyiket ki kell számolni!
Ha valahogy megsejti, hogy Exp(2), arra adjunk 1 pontot akkor is, ha hiányzik az indoklás/perem-sűrűségfüggvény/perem-eloszlásfüggvény. De ha csak azt tippeli, hogy exponenciális, arra ne adjunk pontot.
(c) (5 pont)
(1 pont) $x \in \mathbb{R}$ esetén $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$,
(1+1 pont) ami 0, ha $x \leq -1$ és 1, ha $x \geq 0$ (ez OK indoklás nélkül is, még akkor is, ha nem tudta kiszámolni a perem-sűrűségfüggvényt és nem írta fel az előbbi integrált).
(1 pont) és ha $-1 < x < 0$, akkor $F_X(x) = \int_{-1}^{x}(-2t)\mathrm{d}t$ (az előző előtti lépéssel összevonható)
(1 pont) $= [-t^2]_{-1}^{x} = 1 - x^2$.
(Ha már korábban kiszámolta az eloszlásfüggvényt, akkor pontozzuk ott.)
Természetesen más módon is meg lehet határozni X eloszlásfüggvényét, pl. (X, Y) együttes eloszlásfüggvényét meghatározva és annak argumentumában y-nal végtelenhez tartva.

6. * a) Svindler Sándor jól jövedelmező kockajátékokkal keresi kenyerét. A mai nap a következő játékot kínálja az utcán felé tévedő járókelőknek: a vállalkozó szellemű játékos dob egy szabályos 6 oldalú dobókockával. Amennyiben 6-ost dob, Sándor fizet neki ("pöttyönként 2 000", azaz összesen) 12 000 forintot, és a játék véget ér. Ha azonban más számot dob a játékos, akkor ő fizet Sándornak hasonló szisztéma szerint, egészen pontosan, ha az eredmény $1 \leq k \leq 5$, akkor $k \cdot 1\,000$ forintot, majd ismét dob ugyanezen szabályok szerint. A dobások tehát egészen addig ismétlődnek, míg a játékos 6-ost nem dob, és a fenti szabályok érvényesek minden dobásnál. Mennyi Sándor játékonkénti profitjának várható értéke? (A játékonkénti profit Sándor bevételének és kiadásának különbsége egy játéknál, amely természetesen negatív szám is lehet.)

b) Sándornak az utóbbi időben nem ment túl jól az üzlet, ezért úgy döntött, hogy bevételnövelés céljából beveti cinkelt dobókockáját, melyet (hogy ne legyen túl feltűnő) 9 másik szabályos, külsőre a cinkelt kockával megegyező dobókocka közé kevert. A cinkelt kockán a hatosdobás valószínűsége $\frac{1}{6} - p$, míg az egyesdobás valószínűsége $\frac{1}{6} + p$ valamely $0 < p < \frac{1}{6}$ számra, minden egyéb érték pedig $\frac{1}{6}$ valószínűséggel adódik. A játékosok az újonnan bevezetett szabályok szerint egyenletesen véletlenszerűen választanak egyet a dobókockák közül, majd a választott dobókockával játsszák le a játékot az a) részben tárgyalt szabályoknak megfelelően. Határozzuk meg a p szám értékét, ha tudjuk, hogy Sándor játékonkénti profitjának várható értéke az új szabályok mellett 4 600 forintra változott.

Megoldás:

(a) (9 pont)
(2 pont) Legyen X a profit várható értéke, és legyen E_i az az esemény, hogy elsőre i értéket dob a játékos ($1 \leq i \leq 6$). Ekkor az $E_1, \ldots, E_6$ események teljes eseményrendszert alkotnak.
(2 pont) Mivel a dobások függetlenek, ezért amennyiben a játékos nem 6-osat dob, akkor (fizetés

után) a kezdeti szituáció áll elő, így
(1 pont) a teljes várható érték tétele szerint
(4 pont)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{E}(X \mid E_i)\,\mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{5}(i\cdot 1\,000 + \mathbb{E}(X)) - 12\,000\right) = \frac{5}{6}\,\mathbb{E}(X) + \frac{3\,000}{6},$$

amit átrendezve $\mathbb{E}(X) = 3\,000$ forint adódik. (Ebből 1 pont a teljes várható érték tétele megfelelő alakjára, 1 a megfelelő behelyettesítésre, 1 a megfelelő összegzésre és 1 a végeredményre.)

(b) (11 pont)
(1 pont) Számoljuk ki először a várható értéket, ha a játékos a cinkelt kockát választja, azaz ha a hatos valószínűsége $\frac{1}{6} - p$, az egyesé pedig $\frac{1}{6} + p$, ahol p egy pozitív valós szám. (a többi dobás valószínűsége pedig 1/6). Jelölje ez utóbbi eseményt C.
(1 pont) Mivel a feltételes várható érték maga is egy (a feltételes valószínűség által meghatározott valószínűségi mérték szerinti) várható érték, így a fenti okoskodás, azaz a teljes várható érték tétele alkalmazható,
(2 pont) így tehát

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \mid C) &= \left(\frac{1}{6} + p\right)\cdot(1\,000 + \mathbb{E}(X \mid C)) - \left(\frac{1}{6} - p\right)\cdot 12\,000 + \frac{1}{6}\sum_{i=2}^{5}(i\cdot 1\,000 + \mathbb{E}(X \mid C))\\ &= \left(\frac{5}{6} + p\right)\mathbb{E}(X \mid C) + 500 + p\cdot 13\,000,\end{aligned}$$

(1 pont) ezt átrendezve pedig

$$\left(\frac{1}{6} - p\right)\mathbb{E}(X \mid C) = \left(\frac{1-6p}{6}\right)\mathbb{E}(X \mid C) = 500 + p\cdot 13\,000,$$

(2 pont) azaz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \mid C) &= \frac{3\,000 + p\cdot 78\,000}{1-6p} = 3\,000\cdot\frac{1+26p}{1-6p}\\ &= 3\,000\left(-4\frac{1}{3} + \frac{16}{3-18p}\right) = -13\,000 + 1\,000\cdot\frac{16}{1-6p}.\end{aligned}$$

(1 pont) Mivel C és $\overline{C}$ teljes eseményrendszert alkot, így ezekre ismét a teljes várható érték tételét alkalmazva
(2 pont)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X \mid C)\,\mathbb{P}(C) + \mathbb{E}(X \mid \overline{C})\,\mathbb{P}(\overline{C})\\ &= \left(-13\,000 + 1\,000\cdot\frac{16}{1-6p}\right)\cdot\frac{1}{10} + 3\,000\cdot\frac{9}{10}\\ &= -1\,300 + 100\cdot\frac{16}{1-6p} + 2\,700 = 1\,400 + \frac{1\,600}{1-6p} = 4\,600,\end{aligned}$$

(1 pont) amiből $p = \frac{1}{12}$.

Másik (kevésbé elegáns) lehetséges megoldás vázlata: nem az első dobás eredményére feltételezünk, hanem arra, hogy hányadik dobásra lesz először hatos az eredmény, jelölje az első hatosdobás sorszámát Y.
(2 pont) Az (a) részben azt kell észrevenni, hogy bármely $k \in \{1, 2, \ldots\}$ esetén, feltéve, hogy $Y = k$,

Sándor bevétele úgy viselkedik, mint $k-1$ darab független valószínűségi változó összege, amelyek 1/5–1/5 valószínűséggel veszik fel az 1, 2, 3, 4, 5 értékeket.
(1 pont) arra, hogy az 1/5 valószínűségeket a feltételes valószínűség definíciója alapján megindokolja. Az egyes dobások függetlenségének és azonos eloszlásának (feltéve, hogy $Y = k$) formalizálása bonyolultabb, ezért ezt itt nem is várjuk el külön pontokért (és ezért sem ez az ajánlott megoldás, hanem az előző).
(2 pont) Mivel egy ilyen valószínűségi változó értéke 3 (a teljes pontszámért ezt indokolni kell)
(2 pont) és $Y \sim \mathrm{Geo}(1/6)$, tehát $\mathbb{E}(Y) = 6$,
(1 pont) a teljes várható érték tétele szerint
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = -12\ 000 + 1\ 000 \cdot 3 \cdot (\mathbb{E}(Y) - 1) = -12\ 000 + 15\ 000 = 3\ 000.$
A (b) részben szintén érdemes először megnézni, hogy mi történik, ha a cinkelt kockát választja a játékos (ezt az eseményt továbbra is C-vel jelöljük), majd a „Mivel C és $\overline{C}$ teljes eseményrendszert alkot” résztől ugyanúgy megy a megoldás, mint az előző.
(2 pont) Ha a cinkelt kockát választja, most bármely $k \in \{1, 2, \ldots\}$ esetén, feltéve, hogy $Y = k$, az 1. 2., …, $k-1$. dobás úgy viselkedik, mint $k-1$ független valószínűségi változó, amelyek $\frac{1/6}{5\cdot 1/6+p} = \frac{1}{5+6p}$ valószínűséggel veszik fel a $2, 3, 4, 5$ értékeket és $\frac{1/6+p}{5\cdot 1/6+p} = \frac{1+6p}{5+6p}$ valószínűséggel az 1 értéket.
(1 pont) Egy ilyen valószínűségi változó várható értéke

$$\frac{1+6p}{5+6p} + \sum_{k=2}^{5} \frac{k}{5+6p} = \frac{15+6p}{5+6p} = 3 - \frac{12p}{5+6p}.$$

(2 pont) Mivel feltéve C-t (azaz a $\mathbb{P}(\cdot|C)$ valószínűségi mérték szerint) és továbbá $\{Y = k\}$-ra ($k = 1, 2, \ldots$) feltételezve X megegyezik $k-1$ darab független és ilyen eloszlású valószínűségi változó összegével
(1 pont) és $Y \sim \mathrm{Geo}(1/6 - p)$,
(1 pont) a teljes várható érték tétele szerint
(2 pont)

$$\mathbb{E}(X|C) = -12\ 000 + 1\ 000 \cdot \left(3 - \frac{12p}{5+6p}\right) \cdot \left(\frac{1}{1/6-p} - 1\right).$$

(4 pont) Innen lásd a ‚Mivel C és $\overline{C}$ teljes eseményrendszert alkot” részt (további egyszerű algebrai átalakítások még szükségesek, de ezekre már nem jár pont).