Vizsgadolgozat

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Legyenek X és Y valószínűségi változók pozitív és véges szórással.

   (a) Hogyan jelöljük X és Y korrelációját és hogyan definiáljuk ezt a korrelációt X és Y kovarianciája és szórásai segítségével?

   (b) Milyen β és α valós számok esetén nevezzük a $\beta X + \alpha$ valószínűségi változót az Y valószínűségi változó X-re vett lineáris regressziójának (vagyis milyen β-ra és α-ra lesz az $\mathbb{E}((Y - (\beta X + \alpha))^2)$ várható érték minimális)?
   β és α képletének megadásakor az előadásról ismert jelöléseket magyarázat nélkül fel szabad használni. $\mathbb{E}((Y - (\beta X + \alpha))^2)$ képletét nem kell megadni.

Megoldás.
(a) (9 pont)
(3 pont) Jelölés: $\operatorname{corr}(X, Y)$.
Részpontszám legfeljebb egészen minimális szintaktikai hiba esetén adható, kétes esetben a javító dönt.
(6 pont) Kiszámítása: $\operatorname{corr}(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}$.
Részpontszám legfeljebb csak akkor adható, ha a hiba pusztán szintaktikai jellegű.
(b) (11 pont)
(6 pont) $\beta = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)}$
(5 pont) és $\alpha = \mathbb{E}(Y) - \beta\,\mathbb{E}(X)$ a fenti β-val (természetesen jó még egyszer a képlettel leírva is).

2. Manyi néni, a 9.C osztály osztályfőnöke az osztályba járó 36 tanulónak vásárolt a téli szünet előtti utolsó osztályfőnöki órára egy-egy szaloncukrot. A szaloncukrok tömegét független, azonos eloszlású, folytonos valószínűségi változók írják le, 2 dkg várható értékkel és 0,1 dkg szórással. Jelölje X a 36 szaloncukor tömegének összegét.

   (a) Mennyi X várható értéke és szórásnégyzete?

   (b) Határozzuk meg a $-2X + 42$ és a $3X + 2025$ valószínűségi változók kovarianciáját.

   (c) Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy a 36 szaloncukor össztömege 70 dekagrammnál nagyobb, de 74 dekagrammnál kisebb lesz.

Megoldás.
(0 pont) Jelölje $X_1, \ldots, X_{36}$ az egyes szaloncukrok tömegét, ekkor $X = X_1 + \ldots + X_{36}$.
(a) (6 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_{36})$ (a várható érték linearitása miatt, de annak megnevezéséért itt nem jár pont)
(1 pont) $= 36\,\mathbb{E}(X_1) = 72$ (az előzővel összevonható, ha van valami részszámítás),
(1 pont) mert az X_i-k azonos eloszlásúak.
(1 pont) És mivel az X_i-k függetlenek,
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(X_1) + \ldots + \mathbb{D}^2(X_{36})$
(1 pont) $= 36 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}36$ (ismét azért, mert azonos eloszlásúak, de erre már nem jár pont – ha összekeveri a szórást a szórásnégyzettel, akkor ez a pont nem jár!).
(b) (3 pont)
(2 pont) $\operatorname{cov}(-2X + 42, 3X + 2025) = (-2) \cdot 3 \cdot \mathbb{D}^2(X)$ (ebből 1 pont a bilinearitás megfelelő alkalmazására, elég, ha a -6-os szorzó látszik, a bilinearitást megnevezni nem kell; 1 pont arra, hogy X önmagával vett kovarianciája a szórásnégyzete)
(1 pont) $= -6 \cdot 0{,}36 = -2{,}16$.
(c) (11 pont)
(1 pont) Valami indoklást ad arra (elég, ha később), hogy miért lehet a CHT-t használni. Elég annyit mondani, hogy az X_i-k függetlenek és azonos eloszlásúak (nem baj, ha nem írja oda, hogy véges szórással).
(1 pont) A közelítendő valószínűség $\mathbb{P}(70 < X < 74)$. (X_i-k összegével felírva is OK)
(3 pont) Sztenderdizálunk (ezt nem kell odaírni):

$$\mathbb{P}(70 < X < 74) = \mathbb{P}\left(\frac{70 - 36\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{36}\,\mathbb{D}(X_1)} < \frac{X - 36\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{36} \cdot \mathbb{D}(X_1)} < \frac{74 - 36\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{36}\,\mathbb{D}(X_1)}\right)$$

(úgy is jó természetesen, hogy $36\,\mathbb{E}(X_1)$ helyett $\mathbb{E}(X)$-et és $\sqrt{36}\,\mathbb{D}(X_1)$ helyett $\mathbb{D}(X)$-et ír)
(1 pont) $= \mathbb{P}\left(\frac{70-72}{\sqrt{36}\cdot 0{,}1} < \frac{X-72}{\sqrt{36}\cdot 0{,}1} < \frac{74-72}{\sqrt{36}\cdot 0{,}1}\right)$ (az előzővel összevonható, ha ez az alak megvan, vagy valami ezzel ekvivalens)
(2 pont) $\approx \Phi(10/3) - \Phi(-10/3) = 2\Phi(10/3) - 1$ (a két lépés összevonható; nem kell a Φ-jelölés, jó úgy is, hogy az $\frac{X-72}{\sqrt{36}\cdot 0{,}1}$ helyére standard normálist írunk és azzal számolunk tovább)
(1 pont) a centrális határeloszlás-tétel (elég: CHT) miatt.
(1 pont) $\Phi(10/3) \approx \Phi(3{,}33)$
(1 pont) $\approx 2 \cdot 0{,}9996$.
(0 pont) Tehát a közelítésünk $2\Phi(10/3) - 1 \approx 0{,}9992$ a közelítendő valószínűségre.

3. Minél több szilveszteri trombitát árulnak a piacon, annál rosszabb minőségűek a trombiták. Ha $n \in \mathbb{N}$ darab trombita kapható a piacon, minden trombita a többitől függetlenül $\frac{3}{n}$ valószínűséggel megfelelő minőségű.

   (a) Tegyük fel, hogy $n = 10$. Mi a valószínűsége, hogy a 10-ből legalább 3 trombita megfelelő minőségű? (A valószínűség pontos értékét adjuk meg.) Mennyi a megfelelő minőségű trombiták számának várható értéke és szórása?

   (b) Nagy n esetén közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy az n trombitából legfeljebb egy lesz megfelelő minőségű. (A valószínűség pontos értékét itt nem kell meghatározni.)

(a) (11 pont)
(1 pont) $n = 10$ esetén a megfelelő minőségű trombiták száma – amit nevezzünk X-nek – binomiális eloszlású
(1+1 pont) $(n =)10$ és $(p =)\frac{3}{10}$ valószínűséggel.
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \geq 3)$
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2)$
(1 pont) $= 1-(1-0{,}3)^{10}-10\cdot 0{,}3\cdot(1-0{,}3)^9-\binom{10}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot(1-0{,}3)^2$ (a $\mathbb{P}(X = 0)$-nál természetesen jó a $\binom{10}{0}$-s szorzót is odaírni, a $\mathbb{P}(X = 1)$-nél pedig a 10-es szorzó helyett $\binom{10}{1}$-eset; $\binom{10}{2}$ helyett szabad $\frac{10\cdot 9}{2}$-t írni egyből)
(1 pont) $\approx 1 - 0{,}7^{10} - 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^9 - 45 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8$ (az előzővel összevonható, és ha az előző rendben van és a következő is, akkor nem baj, ha ez kimarad)
(1 pont) $\approx 0{,}6172$.
(1 pont) Így a várható érték $\mathbb{E}(X) = np = 3$
(1 pont) és a szórás $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} = \sqrt{np(1-p)}$
(1 pont) $= \sqrt{2{,}1} \approx 1{,}4491$.
Az np és $np(1-p)$ képletekre külön nem jár pont, ezek benne vannak a táblázatban!
(b) (9 pont)
(1 pont) Jelölje most Y a megfelelő minőségű trombiták számát, akkor a közelítendő valószínűség $\mathbb{P}(Y \leq 1)$.
(4 pont) Mivel a binomiális eloszlás n-és n-től függő $p = p_n$ paraméterére $\lim_{n\to\infty} np_n = 3 =: \lambda$ teljesül, Y-t egy λ paraméterű Z Poisson-eloszlású val. változóval közelíthetjük.
Erre részpontok:

- Ha leírja, hogy Poisson-approximáció kell, az minden további indoklás és λ meghatározása nélkül is ér 1 pontot. (Sőt az is, ha nem azt mondja, hogy approximáció, hanem csak annyit, hogy Poisson-eloszlást használunk, és világos, hogy Y szerepében.)
- Ha azt írja, hogy ez azért igaz, mert n nagy és p kicsi, azért jár még 1 pont, akkor is, ha nem tudja, hogy λ-t hogyan kell meghatározni.
- Ha a határértékre vonatkozó állítás nem szerepel, de tudja, hogy np-nek felel meg λ, arra jár 1 pont, és ha λ-t ez alapján jól meghatározza, arra még 1.
- A teljes pontszám is megadható a határértékre való hivatkozás nélkül, de ebből 1 pont arra jár, hogy leírja, hogy n nagy és p kicsi, nem elég, hogy $np = \lambda$.

(0 pont) Tehát a közelítésünk $\mathbb{P}(Z \leq 1)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(Z = 0) + \mathbb{P}(Z = 1)$
(2 pont) $= e^{-3} + 3e^{-3} = 4e^{-3}$ (nem kell megindokolni, hogy $\lambda^0 = 1$ és $\lambda^1 = \lambda$, meg azt sem, hogy $0! = 1! = 1$)
(1 pont) $= 0{,}1991$.
Ha CHT-t próbál csinálni vagy binomiálissal számolni, akkor legfeljebb az első két pont jár (a második igazából nem is hasznos, de ennyi még belefér).

4. Legyen X egy szabályos kockadobás eredménye, Y pedig egy X-től független, geometriai eloszlású valószínűségi változó, amelyre $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1)$.
Megjegyzés: $\mathbb{E}(X)$ értékét indoklás nélkül is felhasználhatjuk.

   (a) Melyik valószínűség a nagyobb: $\mathbb{P}(X > 2)$ vagy $\mathbb{P}(Y > 2)$?

   (b) Mennyi $\mathbb{P}(X \leq 2, Y < 3)$?

   (c) Mennyi $\mathbb{P}(X \leq 2 | Y < 3)$?

   (d) Határozzuk meg XY várható értékét és $2Y - 2$ szórásnégyzetét.

Megoldás.
(a) (6 pont)
(1 pont) $\mathbb{P}(X > 2) = 4/6 = 2/3$.
(1 pont) valami minimális indoklás erre (elég annyi, hogy 4 kedvező eset van, vagy annyi, hogy mik a kedvező vagy a kedvezőtlen értékek).
(1 pont) Y eloszlásának paramétere (p) 1/6-dal egyenlő (nem kell jobban indokolni).
(2 pont) $\mathbb{P}(Y > 2) = (1 - p)^2 = 25/36$.
Mivel $\mathbb{P}(Y > k) = (1 - p)^k$ elhangzott előadáson, ez így elfogadható további indoklás nélkül, akkor is, ha $(1 - 5/6)^2$-et ír, de ha csak az eredményt közli, akkor max. 1 pont van.
Kiszámítható úgy is, hogy $\mathbb{P}(Y > 2) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2) = 1 - 1/6 - 5/36 = 25/36$ (de ekkor sem jár rá több pont, viszont a 2 ponthoz érdemi indoklás kell).
(1 pont) Tehát $\mathbb{P}(Y > 2)$ a nagyobb.
(b) (5 pont)
(1 pont) Mivel függetlenek,
(1 pont) $\mathbb{P}(X \leq 2, Y < 3) = \mathbb{P}(X \leq 2)\,\mathbb{P}(Y < 3)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(Y < 3) = \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 2)$
(1 pont) $= 1/6 + 5/36 = 11/36$.
Észre lehet azt is venni, hogy $\{Y < 3\}$ ugyanaz az esemény, mint $\{Y \leq 2\}$, aminek a komplementer valószínűségét már az (a)-ban esetleg kiszámoltuk. Ha ott kiszámoltuk, akkor elég a két esemény egyenlőségére és a komplementer valószínűségre hivatkozni.
(1 pont) $\mathbb{P}(X \leq 2) = 2/6 = 1/3$ (itt már nem várunk több indoklást).
(0 pont) Tehát a keresett valószínűség $\frac{11}{108}$.
(c) (2 pont)
1. megoldás:
(1 pont) Mivel függetlenek, (a feltétel elhagyható, tehát)
(1 pont) a keresett valószínűség pont $\mathbb{P}(X \leq 2)$, amiről már kiszámoltuk, hogy 1/3-dal egyenlő.
2. megoldás: kiszámoljuk a feltételes valószínűség definíciója szerint. A metszet valószínűségét a (b)-ben már kiszámoltuk, a feltétel valószínűsége meg $\mathbb{P}(Y < 3)$, amit már szintén kiszámoltunk.
(d) (7 pont)
(1 pont) Mivel függetlenek,
(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = 3{,}5$ (nem kell indoklás),
(1 pont) és $\mathbb{E}(Y) = 1/(1/6) = 6$,
(0 pont) tehát $\mathbb{E}(XY) = 21$.
(2 pont) $\mathbb{D}^2(2Y - 2) = 4\,\mathbb{D}^2(Y)$ (1 pont az additív konstans elhagyására, 1 a konstans szorzó négyzetének kiemelésére)
(1 pont) $= 4 \cdot \frac{1-1/6}{(1/6)^2} = 120$ (csak helyes végeredmény esetén jár pont és legyen legalább valami minimális indoklás is).

5. A következő dunai árvízig hátralévő idő mennyiségét (napokban mérve) jelöljük X-szel. Tegyük fel, hogy X folytonos, örökifjú eloszlást követ, pontosan 365 nap várható értékkel.

   (a) Mennyi X szórásnégyzete és miért?

   (b) Mennyi X^2 várható értéke?

   (c) Minek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy lesz 2026-ban dunai árvíz, vagy annak, hogy nem lesz? (2026 nem szökőév.)

   (d) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(91{,}25 < X < 182{,}5)$ valószínűséget. (A 91,25 és a 182,5 is napokban értendő.)

Megoldás.
(a) (5 pont)
(1 pont) arra, hogy ha az eloszlás folytonos és örökifjú, akkor csak exponenciális lehet.
(2 pont) Jelölje λ az eloszlás paraméterét. Ekkor mivel $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda = 365$, $\lambda = 1/365$,
(1 pont) és így $\mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
(1 pont) $= 133\ 225$.
(b) (3 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2$.
(0 pont) $\mathbb{D}^2(X)$-ről már tudjuk, hogy 133 225-tel egyenlő.
(0 pont) $\mathbb{E}(X)$-ről is tudjuk, hogy 365,
(1 pont) így $\mathbb{E}(X)^2$ értéke is 133 225.
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(X^2) = 266\ 450$.
Alternatív módszer: a transzformált várható értékére vonatkozó képlettel kiintegráljuk, kétszer parc. int. Munkaigényes és nem ajánlott megoldás. (c) (5 pont)
(1 pont) Annak a valószínűsége, hogy lesz dunai árvíz 2026-ban: $\mathbb{P}(X < 365)$ [ha $\leq$-t ír $<$ helyett, nem kell levonni pontot, majd máshol jár ilyesmire pont]
(1 pont) $= F_X(365)$
(1 pont) $= 1 - e^{-\frac{1}{365}\cdot 365} = 1 - e^{-1}$. (Összevonható az előzővel: nem kell az eloszlásfüggvényes jelölés, ha van valami értelmes részszámítás.)
(1 pont) Ez a valószínűség nagyobb, mint 1/2 (ezt elhisszük pontos numerikus érték nélkül, mert annyit számológép nélkül is lehet tudni, hogy $e > 2$),
(1 pont) így a komplementer valószínűségnél is nagyobb, vagyis annak a valószínűségénél, hogy nem lesz dunai árvíz 2026-ban, ami pont $1 - \mathbb{P}(X < 365)$.
Alternatív megoldás az előző 2 pontra: kiszámolja annak a valószínűségét, hogy $X \geq 365$, ami e^{-1} (nem is kell jobban indokolni), és megállapítja, hogy ez kisebb, mint $\mathbb{P}(X < 365)$.
(d) (7 pont)
(2 pont) $\mathbb{P}(91{,}25 < X < 182{,}5) = \mathbb{P}(X < 182{,}5) - \mathbb{P}(X \leq 91{,}25)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(X < 182{,}5) - \mathbb{P}(X < 91{,}25)$, mert folytonos (ha hivatkozik a folytonosságra, akkor a köztes lépést el szabad hagyni; ha egyből $<$-vel írja indoklás nélkül, akkor viszont -1 pont)
(2 pont) $= (1 - e^{-\frac{1}{365}\cdot 182{,}5}) - (1 - e^{-\frac{1}{365}\cdot 91{,}25})$
(1 pont) $= e^{-\frac{1}{4}} - e^{-\frac{1}{2}}$
(1 pont) $\approx 0{,}1723$.
Természetesen jó úgy is a megoldás, hogy a sűrűségfüggvényt integráljuk 91,25-től 182,5-ig: ennek megállapítására 2 pont, a sűrűségfüggvény behelyettesítésére 1 pont, a számolásra pedig 3 pont jár. Munkaigényesebb, mint a másik megoldás.

6. * Legyen X egyenletes eloszlású a $(0;1)$ intervallumon és X ismeretében legyen Y egyenletes eloszlású a $(0;e^X)$ intervallumon (ahol $e \approx 2{,}71\ldots$).

   (a) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y < e^{1/2})$ valószínűséget.

   (b) Feltéve, hogy Y kisebb, mint $e^{1/2}$, mi a valószínűsége, hogy X kisebb, mint $\frac{1}{2}$?

Megoldás. (a) (12 pont)
(1 pont) A folytonos TVT (teljes valószínűség tétele folytonos esetben) szerint
(2 pont) $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(Y < e^{1/2}|X = x) f_X(x)\mathrm{d}x$.
(1 pont) $f_X(x) = 1$, ha $0 < x < 1$ és $f_X(x) = 0$ egyébként.

Innen 1. megoldás: közvetlenül feltételes eloszlásfüggvénnyel, felt. sűrűségfüggvény nélkül.
(1 pont) $x \in (0,1)$ esetén $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}|X = x)$ annak a valószínűsége, hogy egy $\mathrm{U}(0;e^X)$ eloszlású valószínűségi változó kisebb lesz, mint $e^{1/2}$.
(1 pont) Ez pedig egydimenziós valószínűségi mezővel (kedvező hosszúság/összes hosszúság képlettel) számolva, vagy az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényébe helyettesítve [elég, ha az indoklás impliciten szerepel]
(1 pont) $\frac{e^{1/2}-0}{e^x-0} = e^{1/2}e^{-x}$, ha $1/2 < x < 1$,
(1 pont) és 1, ha $0 < x \leq 1/2$ (ez bárminemű indoklás nélkül is OK).
Az $x = 1/2$ pont bármelyik szakaszba besorolható, de valahova mindenképpen be kell sorolni.
Az $x \notin (0;1)$ esettel nem kell foglalkozni.

2. megoldás az utóbbi 4 pontra: feltételes sűrűségfüggvénnyel.
(1 pont) Leírja, hogy $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{e^x-0} = e^{-x}$, ha $x \in (0,1)$ és $0 < y < e^x$,
(0 pont) különben pedig $f_{Y|X}(y|x) = 0$ (ez nem igazán kell a megoldáshoz, ezért nem jár rá pont).
(1 pont) Innen $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}|X = x) = \int_0^{e^x} f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y = 1$ (nem is kell indoklás ehhez itt sem)
(1 pont) és $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}|X = x) = \int_0^{e^{1/2}} f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y$ (itt viszont kell az indoklás)
(1 pont) $= \frac{e^{1/2}}{e^x}$.

Mindkét megoldás esetén a folytatás:
(2 pont) Tehát $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}) = \int_0^{1/2} 1\mathrm{d}x + e^{1/2}\int_{1/2}^1 e^{-x} \cdot 1\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \frac{1}{2} + e^{1/2}[-e^{-x}]_{1/2}^1 = \frac{1}{2} + 1 - e^{-1/2}$
(1 pont) $\approx 0{,}8935$.

(b) (8 pont)
(0 pont) A keresett (feltételes) valószínűség $\mathbb{P}(X < 1/2|Y < e^{1/2})$.
Az informális megoldás érdemi indoklás nélkül itt egyszerűen annyi, hogy

$$\mathbb{P}(X < 1/2|Y < e^{1/2}) = \frac{0{,}5}{0{,}8935} \approx 0{,}5596.$$

Ha ennyi megvan, arra indoklás nélkül, illetve a dolgok homályos megnevezése esetén is lehet adni 5 pontot. Lentebb részletezzük a teljes megoldás néhány változatát.

1. megoldás Bayes-tétellel és viszonylag intuitívan, további integrálás nélkül.
(1 pont) Bayes-tétellel (szintén jó: Bayes-formula, egyszerű Bayes-tétel – ez az 1 pont akkor is jár, ha a Bayest aztán nem sikerül jól implementálni)
(3 pont) $\mathbb{P}(X < 1/2|Y < e^{1/2}) = \frac{\mathbb{P}(X<1/2)\,\mathbb{P}(Y<e^{1/2}|X<1/2)}{\mathbb{P}(Y<e^{1/2})}$.
Az utóbbi törtben a nevező a sima TVT-nek megfelelő alakban is jó, ahol $\{X < 1/2\}$-re és annak komplementerére (vagyis $\{X \geq 1/2\}$-re) feltételezünk. Nem jár pont arra, hogy ezek teljes eseményrendszert alkotnak.
(1 pont) $\mathbb{P}(X < 1/2) = 1/2$ (ezt már fentebb kiintegráltuk, ha nem is hívtuk így, meg amúgy

is lehet tudni fejből és benne van a táblázatban is – nem kell indoklás).
(2 pont) $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}|X < 1/2) = 1$ (ugyanazért, amiért $\mathbb{P}(Y < e^{-1/2}|X = x) = 1$ teljesült minden $x \in (0; 1/2)$ esetén: ha $X < 1/2$, akkor Y a 0 és az $e^X < e^{1/2}$ között vesz fel értékeket – nem kell indoklás).
(0 pont) $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}) = 0{,}8935$ az (a) rész szerint.
(1 pont) Tehát a keresett feltételes valószínűség $\frac{0{,}5}{0{,}8935} \approx 0{,}5596$.

2. megoldás a (b)-re Bayes nélkül, a feltételes valószínűség definíciója szerint.
(2 pont) $\mathbb{P}(X < 1/2|Y < e^{-/2}) = \frac{\mathbb{P}(X<1/2, Y<e^{1/2})}{\mathbb{P}(Y<e^{1/2})}$ (a feltételes valószínűség definíciója szerint).
(4 pont) $\mathbb{P}(X < 1/2, Y < e^{1/2}) = \mathbb{P}(X < 1/2)$, mert ha $X < 1/2$, akkor Y-nak 0 és $e^X < e^{1/2}$ közé kell esnie. (Indoklás nélkül max. 2 pont).
(1 pont) $\mathbb{P}(X < 1/2) = 1/2$ (ezt már fentebb kiintegráltuk, ha nem is hívtuk így, meg amúgy is lehet tudni fejből és benne van a táblázatban is – nem kell indoklás).
(0 pont) $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}) = 0{,}8935$ az (a) rész szerint.
(1 pont) Tehát a keresett feltételes valószínűség $\frac{0{,}5}{0{,}8935} \approx 0{,}5596$.

Megjegyzés:
Ha az 1. megoldásban nem jön rá, hogy $\mathbb{P}(X < 1/2, Y < e^{1/2}) = \mathbb{P}(X < 1/2)$, akkor segíthet még a

$$\mathbb{P}(X < 1/2, Y < e^{1/2}) = \int_0^1 \int_0^{\min\{e^x, e^{1/2}\}} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{e^x} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

szokásos képlet is. Nem is muszáj minimummal felírni, ha megvan, hogy e^x mindig kisebb, mint $e^{1/2}$ (de erre az indoklásra jár 1 pont).
Az (a)-ban kiszámoltak szerint pedig $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = e^{-x}$, ha $0 < x < 1$ és $0 < y < e^x$.
Ez egy kicsit számolósabb megoldás, mint a többi, viszont ötlet egyáltalán nem kell hozzá, csak a feltételes valószínűség definíciója. Ezzel a módszerrel lehet továbbmenni akkor is, ha az 1. megoldást csinálja és nem jön rá, hogy $\mathbb{P}(Y < e^{1/2}|X < 1/2) = 1$. Ezt a feltételes valószínűséget definíció szerint szétbontjuk és innentől a 2-es megoldásban találjuk magunkat. Amire már az 1. megoldás szerint járt pont, arra nem jár még egyszer.