Vizsgadolgozat

Megoldás

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. (a) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és legyenek $C, D \in \mathcal{F}$ események. Milyen feltétel teljesülése esetén és hogyan definiáljuk, illetve hogyan jelöljük a C esemény D-re vett feltételes valószínűségét?

   (b) Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény. Az előadáson tanult állítás szerint milyen feltételek teljesülnek akkor és csak akkor, ha létezik olyan folytonos valószínűségi változó, amelynek f a sűrűségfüggvénye?

   1. feladat megoldása.
   (a) (3 pont) Akkor definiáljuk, ha $\mathbb{P}(D) > 0$,
   (2 pont) és $\mathbb{P}(C|D)$-vel jelöljük (ha helyesen szerepel ez a jelölés, akkor ez a 2 pont jár, de ha pl. $\mathbb{P}(D|C)$-t ír, akkor részpontszám nem jár),
   (5 pont) $\mathbb{P}(C|D) = \frac{\mathbb{P}(C\cap D)}{\mathbb{P}(D)}$ (részpontszám legfeljebb kis szintaktikai hiba esetén jár).
   (jegyzet 2.2.1. Definíció)
   (b) (4 pont) Ha f nemnegatív
   (6 pont) és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
   (Kisebb szintaktikai hibáknál 1-1 pont levonás. Ha viszont az integrálási határok rosszak vagy hiányoznak vagy változót ír az integrálási határok helyett, az már szemantikai hiba, ilyenkor összesen max. 2 pontot lehet adni.)
   Ha f_X-et vagy hasonlót ír valahova f helyett, összesen 1 pont levonás.
   (jegyzet 4.2.5. Állítás)

2. Karinthy Frigyes és Kosztolányi Dezső egy szép napon egymástól függetlenül feldob egy-egy szabályos pénzérmét, és aki fejet dob közülük, az elmegy a New York kávéházba (aki írást dob, az pedig nem megy oda). Kettejük közül aki nem megy el a kávéházba, az nem iszik kávét. Ha az egyikük elmegy a kávéházba, de a másikuk nem, akkor aki odamegy, az 1 kávét iszik meg. Ha pedig mindketten elmennek a kávéházba, akkor hosszasan beszélgetnek és fejenként 2 kávét is megisznak. Jelölje X a Karinthy és Y a Kosztolányi által megivott kávék számát.

(a) Határozzuk meg $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$-t minden olyan k, l valós számra, amelyre ez a valószínűség pozitív. (Lehet táblázatos formában, de a táblázatban szereplő 0 értékekért helyes válasz esetén sem jár pont.)

(b) Határozzuk meg Y-nak X-re vonatkozó regressziós egyenesét.
(*Tanács*: X és Y kovarianciájának kiszámítására járnak részpontok.)

(c) Független-e X és Y?

2. feladat megoldása.
(a) (5 pont)
(1+1 pont) $\mathbb{P}(X = Y = 2) = 1/4$ és $\mathbb{P}(X = Y = 0) = 1/4$,
(1 pont) mert... (valahogy megindokolja; elég, ha az szerepel, hogy $\{X = Y = 2\} = \{$mindketten fejet dobnak$\}$ vagy akár $\{X = Y = 2\} = \{$mindketten elmennek a kávéházba$\}$ és az $X = Y = 0$ esetén hasonlóan, a számolásokat nem kell részletezni, és most az sem baj, ha a kettő közül csak az egyiket indokolja meg, mert csak 1 pont jár rá).
(1 pont) $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 1/4$ és $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 1/4$ (ha csak az egyik van meg, akkor 1/2 pont és a feladat végén kerekítünk),
(1 pont) mert... (pl. $\{X = 1, Y = 0\} = \{$Karinthy fejet dob, Kosztolányi írást$\}$ vagy akár $\{X = 1, Y = 0\} = \{$Karinthy elmegy kávézni, Kosztolányi nem$\}$ és a másik eset hasonlóan; elég, ha az egyiket indokolja meg, mert most csak 1 pont jár rá).
(b) (13 pont)
(1 pont) A regressziós egyenes képlete $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = \beta x + \alpha\}$,
(1 pont) ahol $\beta = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)}$ és $\alpha = \mathbb{E}(Y) - \beta\mathbb{E}(X)$ (ha csak az egyik van meg, akkor 1/2 pont és a feladat végén kerekítjük a pontszámot).
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ (elég, ha ez impliciten derül ki a megoldásból).
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = (0 \cdot \mathbb{P}(X = 0)+)1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2)$
(1 pont) $= 1/4 + 2 \cdot 1/4 = 3/4$ (az a) feladat alapján; nem kell ennél részletesebben indokolni. Ha csak végeredmény van vagy a számolás jó, de a végeredmény rossz, akkor 1/2 pont és a végén kerekítjük).
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 4 \cdot \mathbb{P}(X = 2) = \frac{5}{4}$
(1 pont) és ezért $\mathbb{D}^2(X)(= \frac{20-9}{16}) = \frac{11}{16}(= 0{,}6875)$.
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ a szimmetria miatt/azért, mert X és Y azonos eloszlásúak (ez a pont jár indoklás nélkül is. Ha $\mathbb{E}(X)$-et rosszul számolja ki és $\mathbb{E}(Y)$-ra ugyanazt az értéket adja meg, akkor csak abban az esetben jár ez a pont, ha expliciten kimondja vagy megindokolja, hogy a két szórás egyenlő, nem csak random beírja ugyanazt a számot).
(1 pont) Valahogy leírja, hogy XY pontosan akkor nem 0, ha $X = Y = 2$, és ekkor $XY = 4$,
(1 pont) emiatt $\mathbb{E}(XY) = 4\mathbb{P}(X = Y = 2) = 1$. (Az is jó persze, ha több 0 taggal végigszámolja $\mathbb{E}(XY)$-t.)
(1 pont) Tehát $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
(1 pont) $(= 1 - (\frac{3}{4})^2) = \frac{7}{16}$, ezért $\beta(= \frac{1}{11/7}) = 7/11(= 0{,}\dot{6}\dot{3} \approx 0{,}6364)$ (ha a kovariancia jó, de utána β-t elszámolja, akkor 1/2 pont és a feladat végén kerekítünk).
(1 pont) és $\alpha = 3/4 - \frac{7}{11} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{11}(= 0{,}\dot{2}\dot{7} \approx 0{,}2727)$.
(0 pont) Vagyis a regressziós egyenes $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = \frac{7}{11}x + \frac{3}{11}\}$.
(c) (2 pont)
Önmagában arra az állításra, hogy nem függetlenek, nem jár pont.
(1 pont) Nem függetlenek, mert... (valahogy megindokolja; ez a pont akkor is jár, ha van indoklás, de rossz).
(1 pont) arra, hogy azért nem függetlenek, mert a kovarianciájuk nem 0. Lehet máshogy is indokolni (pl. $\mathbb{P}(X = Y = 1) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$), de akkor is csak 1 pont jár az indoklásra.

3. Egy elképzelt vasútvonalon minden reggel 8-kor indul egy vonat az egyik végállomásról, amely

minden nap a többi naptól függetlenül 1/4 valószínűséggel késik. 200 egymást követő napon megvizsgáljuk, hogy késik-e a vonat, legyen X azon napok száma a 200 nap közül, amikor késik a vonat.

(a) Milyen eloszlású X és milyen paraméterrel/paraméterekkel? Határozzuk meg X várható értékét és szórását.

(b) Becsüljük meg alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy a 200 nap közül legfeljebb 42 napon késik a vonat. (A valószínűség pontos értékének meghatározására itt nem jár pont!)

3. feladat megoldása.
(a) (5 pont)
(1 pont) X binomiális eloszlású
(1+1 pont) $n = 200$ és $p = 1/4$ paraméterekkel (ha csak annyit ír, hogy $X \sim \mathrm{B}(n; p)$, az is jó).
(1+1 pont) Tehát $\mathbb{E}(X) = (np =)50$ és $\mathbb{D}(X) = (\sqrt{np(1-p)}) = \sqrt{37{,}5}(\approx 6{,}1237)$. (Nem kell indokolni, mert benne van a nevezetes eloszlás táblázatban, de ha pl. a szórás helyett csak szórásnégyzetet ír és nem is indokol semmit, akkor 1 pont levonás.)
(b) (15 pont)
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \le 42)$.
(1 pont) arra az ötletre, hogy a de Moivre–Laplace tételt/CHT-t kéne használni, még ha később nincs is jól implementálva.
(3 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}(X \le 42) = \mathbb{P}\Big(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{42 - 50}{\sqrt{200 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}}\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le -\frac{8}{\sqrt{37{,}5}}(= -1{,}3064)\Big).$$

(1 pont) Ezt közelítjük $\mathbb{P}(Y < -1{,}3064)$-gyel, ahol $Y \sim \mathrm{N}(0; 1)$. (Elég, ha ez a következő lépésből derül ki.)
(2 pont) $\mathbb{P}(Y < -1{,}3064) = \Phi(-1{,}3064$ (ha később értelmesen számol, akkor nem muszáj a Φ jelölést használni)
(2 pont) $= 1 - \Phi(1{,}3064)$,
(2 pont) ahol az 1,3064-et a táblázatban szereplő legközelebbi értékre, 1,31-ra kerekítjük (ha ezt nem írja le expliciten, de a későbbiekben $\Phi(1{,}31)$-tel számol, akkor jár ez a két pont).
(2 pont) (A táblázat alapján) $\Phi(1{,}31) \approx 0{,}9049$,
(1 pont) tehát a keresett valószínűség (kb.) 0,0951.

4. Legyenek $X \sim \mathrm{Pois}(1)$ és $Y \sim \mathrm{Geo}(1/2)$ független valószínűségi változók. Legyen $Z := Y^2 \sin(X) + YX^3 - X$. Adjuk meg az $\mathbb{E}(Z|X)$ regressziót.
4. feladat megoldása.
(0 pont) $\mathbb{E}(Z|X) = \mathbb{E}(Y^2 \sin(X) + YX^3 - X|X)$
(2 pont) $= \mathbb{E}(Y^2 \sin(X)|X) + \mathbb{E}(YX^3|X) - \mathbb{E}(X|X)$,
(2 pont) mert... (megindokolja a feltételes várható érték/regresszió linearitásával. Ha csak „a linearitásra” vagy a várható érték linearitására hivatkozik, az akkor fogadható el, ha kiderül, hogy a feltételt nem hagyja el.)
(1+1+2 pont) $= \sin(X)\mathbb{E}(Y^2|X) + X^3\mathbb{E}(Y|X) - X$, (az utóbbi tagra azért 2 pont jár, mert ez valójában 2 lépés: $\mathbb{E}(X|X) = X\mathbb{E}(1|X)$ és $\mathbb{E}(1|X) = 1$, az utóbbi azért igaz, mert az 1 bármire vonatkozó feltételes várható értéke 1, avagy azért, mert az 1 bármitől független és ezért itt érvényes a következő lépés, de nem várjuk el sem a második lépés megindoklását, sem a két lépés különszedését)
(2 pont) mert... (valahogy hivatkozik a regresszió megfelelő tulajdonságára, általános képlettel, vagy taking out what is known. Ha jól csinálja, homogenitásnak is hívhatja)
(1+1 pont) $= \sin(X)\mathbb{E}(Y^2) + X^3\mathbb{E}(Y) - X$,

(2 pont) mert függetlenek (ha jól használja a függetlenséget, akkor nem kell külön megindokolni, hogy nemcsak Y független X-től, hanem Y^2 is).
(1 pont) (A nevezetes eloszlás táblázat alapján stb.) $\mathbb{E}(Y) = 2$
(2 pont) és $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2$
(2 pont) $= \frac{1-1/2}{(1/2)^2} + 2^2 = 6$ (megint csak a nevezetes eloszlás táblázat alapján; 1 pont a szórásnégyzetre és 1 pont a számolásra).
(1 pont) Így tehát a végeredmény $\mathbb{E}(Z|X) = 6\sin(X) + 2X^3 - X$.

5. Legyen $n \geq 1$ és legyenek $X_1, \ldots, X_n$ fae. valószínűségi változók, amelyek eloszlásfüggvénye

$$F_\vartheta(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\vartheta}, & \text{ha } x > 1, \\ 0, & \text{ha } x \leq 1, \end{cases}$$

ahol $\vartheta > 1$ egy ismeretlen paraméter.

(a) Határozzuk meg minden $\vartheta > 1$ rögzített paraméter esetén az f_ϑ sűrűségfüggvényt.
(b) A minta rögzített $x_1, \ldots, x_n$ realizációja esetén határozzuk meg a likelihood-függvény $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n)$ értékét.
(c) Adjunk a minta alapján maximum likelihood becslést ϑ-ra.
Megjegyzés: Bizonyos realizációk esetén a helyes becslés értéke nem lesz nagyobb 1-nél.

5. feladat megoldása.
(a) (4 pont)
(2 pont) arra, hogy $f_\vartheta(x) = F'_\vartheta(x)$, ha F_ϑ differenciálható x-ben és 0 különben. (Elég, ha impliciten derül ki, hogy ezt csinálja, de 1 pont a 0-s részre jár.)
(2+0 pont) Tehát $f_\vartheta(x) = \begin{cases} \vartheta x^{-\vartheta-1}, & \text{ha } x > 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$
(b) (5 pont)
(2 pont) $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\vartheta(x_i)$
(2 pont) $= \vartheta^n \prod_{i=1}^n x_i^{-\vartheta-1}$,
(1 pont) ahol $x_1, \ldots, x_n > 1$. (Arra az esetre, amikor valamelyik x_i legfeljebb 1, nem kell írni semmit, de az derüljön ki, hogy végiggondolta, hogy mikor lesz $x_1, \ldots, x_n$ realizáció.)
(c) (11 pont)
(1 pont) arra az ötletre, hogy a log-likelihood-függvénnnyel kellene dolgozni (még ha a folytatás nem is jó).
(1 pont) (Továbbra is $x_1, \ldots, x_n > 1$ esetén) $l_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \ln L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n)$
(2 pont) $= n \ln \vartheta + \sum_{i=1}^n (-\vartheta - 1) \ln x_i$.
(1 pont) arra, hogy a log-likelihood függvényt deriválja és megnézi, hogy a derivált hol 0, akkor is, ha nem jó a derivált. (Ezt az egy pontot meg lehet akkor is adni, ha a sima likelihoodfüggvényt deriválja és arról nézi meg, hogy hol 0, de ez persze nem túl célszerű megoldás.)
(2 pont) $\frac{\partial}{\partial\theta} l_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{\vartheta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i$
(1 pont) pontosan akkor 0, ha $\vartheta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$.
(2 pont) Ez valóban (szigorú) lokális maximumhely, mert $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0$ (bármely $\vartheta > 1$ esetén).
(0 pont) Mivel ez az egy lokális szélsőérték van, ez egyben globális maximum is, emiatt nem kell megvizsgálni a határt ($\vartheta = 1$) sem.
(0 pont) Tehát a maximum likelihood becslés a minta alapján $\vartheta_*(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$,
(1 pont) így a maximum likelihood becslés $\vartheta_*(X_1, \ldots, X_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$.

6. Legyen X egyenletes eloszlású a $(0, 2)$ intervallumon és X ismeretében Y egyenletes eloszlású a $(0, 1/X)$ intervallumon. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y < 1)$ valószínűséget.

6. feladat megoldása.
1. megoldás, folytonos TVT-vel.
(1 pont) arra az ötletre, hogy a folytonos TVT-t kellene használni (még akkor is, ha nem sikerül jól implementálni).
(2 pont) A folytonos TVT szerint $\mathbb{P}(Y<1)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{P}(Y<1|X=x)f_X(x)\mathrm{d}x$
(2 pont) $=\frac{1}{2}\int_0^2\mathbb{P}(Y<1|X=x)\mathrm{d}x$ (az előző lépéssel összevonható).
(3 pont) Ha $x\in(0,2)$, akkor $\mathbb{P}(Y<1|X=x)=\int_{-\infty}^1 f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y=\int_0^1 f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y$ (a két lépés összevonható, nem muszáj leírni $-\infty$-nel),
(2 pont) valamint mivel (a feladat szövege szerint) X ismeretében $Y\sim(0;1/X)$, $f_{Y|X}(y|x)(=1/(1/x))=x$, ha $0<x<2$ és $0<y<1/x$,
(1 pont) és $f_{Y|X}(y|x)=0$ különben (ezt a pontot nem kell levonni, ha ezt nem írja ide, de konzisztensen csak a megfelelő tartományon integrál; már az előbb feltettük, hogy $x\in(0,2)$),
(2 pont) tehát ha $1/x<1$, vagyis $x>1$ (vagyis $1<x<2$), akkor $\mathbb{P}(Y<1|X=x)=1$ (ehhez nem kötelező integrált felírni),
(3 pont) és ha $1/x\geq 1$, vagyis $x\leq 1$ (vagyis $0<x\leq 1$), akkor $\mathbb{P}(Y<1|X=x)=\int_0^1 x\mathrm{d}y=x$.

Alternatív megoldásrészlet az utóbbi 11 pontra: kiszámoljuk az $F_{Y|X}(y|x)$ feltételes eloszlásfüggvényt, ami a feladat szövege szerint

$$F_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\notin(0,2) \text{ vagy } y\leq 0,\\ \frac{y}{x}, & \text{ha } 0<x<2 \text{ és } 0<y<1/x,\\ 1, & \text{ha } 0<x<2 \text{ és } y\geq 1/x,\end{cases}$$

és ebből kiolvassuk, hogy $\mathbb{P}(Y<1|X=x)=F_{Y|X}(1|x)$ micsoda. Az első esettel nem is muszáj foglalkozni, ha az $x\in(0,2)$ esetre szorítkozunk. Részpontok az előző megoldáshoz hasonlóan.

(1+1 pont) Vagyis $\mathbb{P}(Y<1)=\frac{1}{2}(\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2 1\mathrm{d}x)$
(1 pont) $=\frac{1}{2}[x^2/2]_0^1+1/2$
(1 pont) $=1/4+1/2=3/4$.
2. megoldás, a folytonos TVT megkerülésével.
(1 pont) $\mathbb{P}(Y<1)=\int_{-\infty}^1 f_Y(y)\mathrm{d}y$
(1 pont) $=\int_0^1 f_Y(y)\mathrm{d}y$ (az előző lépéssel összevonható).
(0 pont) Tehát Y marginális sűrűségfüggvényét kellene meghatározni. (Vagy a marginális eloszlásfüggvényének értékét az 1 helyen.)
(1+1 pont) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^2 f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x$ ($y\in\mathbb{R}$) (a két lépés összevonható, nem muszáj $\pm\infty$-nel kiírni),
(2 pont) és $f_{X,Y}(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$ ($x\in\mathbb{R}$).
(2 pont) $f_X(x)=1/2$, ha $x\in(0,2)$ és 0 különben,
(2 pont) valamint mivel (a feladat szövege szerint) X ismeretében $Y\sim(0;1/X)$, $f_{Y|X}(y|x)(=1/(1/x))=x$, ha $0<x<2$ és $0<y<1/x$,
(1 pont) és 0 különben (ezt a pontot nem kell levonni, ha eleve úgy számol, hogy fel sem merül, hogy ebben az esetben szüksége lenne a feltételes sűrűségfüggvény értékére).
(2 pont) Vagyis $f_{X,Y}(x,y)=\frac{x}{2}$, ha $0<x<2$ és $0<y<1/x$
(0 pont) és 0 különben.
(3 pont) Innen $\mathbb{P}(Y<1)=\int_0^2\int_0^{\min\{1/x,1\}}\frac{x}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^1\frac{x}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_1^2\int_0^{1/x}\frac{x}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$
(1 pont) $=\int_0^1[yx/2]_{y=0}^1\mathrm{d}x+\int_1^2[yx/2]_{y=0}^{1/x}\mathrm{d}x$
(1 pont) $=\int_0^1 x/2\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{2}\mathrm{d}x$
(1 pont) $=[x^2/4]_0^1+[x/2]_1^2$
(1 pont) $=1/4+1-1/2=3/4$.
Mejegyzés: Látható, hogy ebben a 2. megoldásban esetenként kevesebb pont jár, mint az 1. megoldásban. Sajnos másként nem jön ki a 20 pont. Azért érdemes a folytonos TVT-t használni, mert az kevesebb munkával jár (másként fogalmazva egy adott lépésért több pont jár).