Vizsgadolgozat

1. (a) Legyen X valószínűségi változó és $x \in \mathbb{R}$. Mit jelent X eloszlásfüggvényének x pontbeli értéke, azaz $F_X(x)$ egy valószínűséggel kifejezve?

   (b) Legyenek X és Y véges szórású valószínűségi változók. Hogyan határozhatjuk meg a $\operatorname{cov}(X, Y)$ kovarianciát a két valószínűségi változó várható értéke és a szorzatuk várható értéke segítségével?

   (c) Legyen (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó, jelölje együttes sűrűségfüggvényét $f_{X,Y}$, X perem-sűrűségfüggvényét (marginális sűrűségfüggvényét) pedig f_X.

   i. Hogyan határozhatjuk meg $f_X(x)$ értékét az $f_{X,Y}$ együttes sűrűségfüggvény ismeretében?

   ii. Ha $f_X(x) > 0$ és y egy valós szám, hogyan definiáljuk $f_{Y|X}(y|x)$-et (ahol $f_{Y|X}$ az Y-nak X-re vett feltételes sűrűségfüggvénye)?
   Az $f_X(x) = 0$ esetet nem kérdezzük, és itt nem kell újra leírni a választ az i. kérdésre.

Megoldás.
(a)
(5 pont) $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$.
$\{X < x\}$ jelentését nem kell megmagyarázni, de ha valaki azt írja, hogy $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega |\ X(\omega) < x\})$, természetesen az is max. pont.
(b)
(5 pont) $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
Ha valaki ehelyett a kovariancia definícióját írja fel, arra 1 pont jár.
(c)
(5 pont) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}y$
(5 pont) és $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ (ha $f_X(x) > 0$).

2. Egy medve téli álmot alszik. Az adott tél során valamikor, egy véletlenszerűen (december első napjának kezdete és február utolsó napjának vége között) választott időpontban felébred. Tudjuk, hogy a medve élőhelyén decemberben 30%, januárban 40%, februárban pedig 35% eséllyel havas a táj. Tekintsük a következő eseményeket:

$$H := \{\text{a táj havas, amikor a medve felébred}\} \qquad D := \{\text{a medve decemberben ébred fel}\}$$
$$J := \{\text{a medve januárban ébred fel}\} \qquad F := \{\text{a medve februárban ébred fel}\}.$$

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a táj havas, amikor a medve felébred? Függ-e a válasz attól, hogy a február 28 vagy 29 napos?

   (b) Tegyük fel most, hogy a február 28 napos. Amikor a medve felébred, nem tudja, hogy milyen hónap van. Feltéve, hogy azt látja, hogy a táj havas, mennyi a valószínűsége, hogy decemberben ébredt fel?

   (c) Tegyük fel ismét, hogy a február 28 napos. Független-e az F és a H esemény?

Megoldás.
(a) (10 pont)
(0 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(H)$.
(1 pont) A D, J és F események teljes eseményrendszert alkotnak,
(1 pont) mert kizáróak és uniójuk az egész eseménytér. (Ha ez megvan, csak a teljes eseményrendszer kifejezés nincs, akkor meg lehet adni az előző pontot is. Nem kell indokolni, hogy ez a két tulajdonság tényleg teljesül rájuk.)
(0 pont) Továbbá mind pozitív valószínűségűek (ez is kell a TVT-hez, de külön nem jár rá pont).

(1 pont) Ezért a teljes valószínűség tétele (elég: TVT) szerint
(2 pont) $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H|D)\,\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(H|J)\,\mathbb{P}(J) + \mathbb{P}(H|F)\,\mathbb{P}(F)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(H|D) = 0{,}3$, $\mathbb{P}(H|J) = 0{,}4$ és $\mathbb{P}(H|F) = 0{,}35$.
(1 pont) Ha a február 28 napos, akkor $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(J) = \frac{31}{90}$ és $\mathbb{P}(F) = \frac{28}{90}$,
(1 pont) míg ha a február 29 napos, akkor $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(J) = \frac{31}{91}$ és $\mathbb{P}(F) = \frac{29}{91}$.
(1 pont) A TVT-be behelyettesítve mindkét esetben azt kapjuk, hogy $\mathbb{P}(H) = 0{,}35$. (Ezt elhisszük további részletszámítások nélkül is, ha a TVT szerinti egyenlőség jobb oldalán szereplő valószínűségeket megadta.)
(1 pont) Tehát a válasz nem függ attól, hogy 28 vagy 29 napos a február.
Alternatív megoldás az utóbbi 4 pontra: Észreveszi, hogy $\mathbb{P}(H|\overline{F}) = 0{,}35$ (ezt indokolni kell legalább minimálisan; D és J kizáróak és $\overline{F}$ bekövetkezése esetén 1/2–1/2 valószínűséggel következnek be), és mivel $\mathbb{P}(H|F)$ értéke szintén 0,35, ezért F-re és F^c-re (utóbbi $D \cup J$-val egyenlő) felírva a TVT-t, a február hosszától függetlenül 0,35 adódik eredményül. Itt másodszorra már nem kell a TVT feltételeit ellenőrizni.
Természetesen az egész (a) is megoldható ez alapján és nem kell a 3 hónapra külön–külön feltételezni. Ilyen esetben a TVT feltételeinek ellenőrzésénél elég azt elmondani, hogy F és $F^c (= D \cup J)$ egymás komplementerei, nem kell külön megemlíteni, hogy kizáróak és az uniójuk Ω. Erre ezért 1+1 helyett csak 1 pont jár, és még egy arra, hogy a $\mathbb{P}(H|\overline{F}) = 0{,}35$ kijelentést megindokolja.
Ha csak azt veszi észre, hogy $\mathbb{P}(H)$ nem függ a február hosszától, de nem számolja ki, hogy mennyi az értéke, akkor bármilyen megoldás esetén max. 9 pont, és ha nemcsak numerikus értékek hiányoznak, hanem a kiszámítás módját sem vázolja, akkor max. 7 pont.

(b) (5 pont)
(1 pont) A keresett feltételes valószínűség $\mathbb{P}(D|H)$.
(1 pont) Bayes-tétellel (egyszerűnek is szabad nevezni)
(1 pont) $\mathbb{P}(D|H) = \frac{\mathbb{P}(H|D)\,\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(H)}$ (szabad persze a nevezőt is a TVT-nek megfelelő alakban írni, de az (a)-ban már kiszámoltuk és nem jár rá újra pont)
(1 pont) $= \frac{0{,}3 \cdot \frac{31}{90}}{0{,}35}$ (az (a) alapján – nem kell indoklás)
(1 pont) $= \dfrac{31}{105} (\approx 0{,}2952)$ (elég csak közönséges tört vagy csak megfelelően kerekített tizedestört alakban).

(c) (5 pont)
Indoklás nélkül pont nem jár helyes válasz esetén sem.
1. (sztenderd) megoldás.
(1 pont) Akkor lesznek függetlenek, ha $\mathbb{P}(F \cap H) = \mathbb{P}(F)\,\mathbb{P}(H)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(F) = \frac{28}{90}$ (mert feltettük, hogy 28 napos a február).
(0 pont) $\mathbb{P}(H) = 0{,}35 = \frac{35}{100}$ az (a) alapján.
(1 pont) A szorzási szabály szerint
(1 pont) $\mathbb{P}(H \cap F) = \mathbb{P}(H|F)\,\mathbb{P}(F) = 0{,}35 \cdot \frac{28}{90} = \frac{49}{100} (\approx 0{,}1089)$.
(1 pont) Ez megegyezik $\mathbb{P}(H)\,\mathbb{P}(F)$-fel, ezért függetlenek.
Ha a szorzási szabályt nem nevezi meg, de levezeti a feltételes valószínűség definíciójából, az is jó.
2. (gyorsabb) megoldás.
(3 pont) Pontosan akkor lesznek függetlenek, ha $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H|F)$ (mivel $\mathbb{P}(F) > 0$ – ezt nem kell odaírni).
(1 pont) $\mathbb{P}(H|F) = 0{,}35$, és $\mathbb{P}(H) = 0{,}35$, amint már láttuk (nem kell feltétlenül újra odaírni, de ez a pont csak akkor jár, ha valahol – akár az (a)-ban – meg van magyarázva, hogy ezeket a valószínűségeket számolta ki).
(1 pont) Tehát függetlenek.

3. Az $X_1, \ldots, X_{40}$ folytonos valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak, közös sűrűségfüggvényük

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x, & \text{ha } 2 < x < 3, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg X_1 várható értékét és szórásnégyzetét.

(b) Közelítsük alkalmas approximációval a $\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_{40} > 100)$ valószínűséget.

Pótfeladat: ha az (a)-ban nem sikerült kielégítő eredményt elérni, a (b)-t megoldhatjuk úgy is, hogy feltesszük, hogy $\mathbb{E}(X_1) = 2{,}5300$ *és* $\mathbb{D}^2(X_1) = 0{,}49$ *(ezek egyébként nem a helyes értékek).*

Megoldás.
(a) (10 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_1}(x)\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_2^3 \frac{2}{5}x^2\mathrm{d}x$ (az előzővel összevonható)
(1 pont) $= [\frac{2}{15}x^3]_{x=2}^3$
(1 pont) $= \frac{54-16}{15} = \dfrac{38}{15} (\approx 2{,}5333)$. (Elég egyfajta alakban megadni a végeredményt, és ha a primitív függvény megvan, további részletszámolások nem kellenek).
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2$.
(1 pont) $\mathbb{E}(X_1^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X_1}(x)\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_2^3 \frac{2}{5}x^3\mathrm{d}x$ (összevonás mint az előbb)
(1 pont) $= [\frac{2}{20}x^4]_{x=2}^3$
(1 pont) $= \frac{81-16}{10} = 6{,}5$.
(1 pont) Így $\mathbb{D}^2(X_1) \approx 0{,}0822$.
(b) (10 pont)
(1 pont) Mivel az X_i-k függetlenek és azonos eloszlásúak,
(1 pont) a centrális határeloszlás-tétel (elég: CHT) segítségével közelíthetjük a megadott valószínűséget.
(3 pont) Standardizálunk (ezt nem kell kiírni; $\mathbb{D}(X_1)$ helyett jó $\sqrt{\mathbb{D}^2(X_1)}$ is): legyen $X := X_1 + \ldots + X_{40}$, ekkor $\mathbb{P}(X > 100) = \mathbb{P}(\frac{X - 40\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{40}\,\mathbb{D}(X_1)} > \frac{100 - 40\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{40}\,\mathbb{D}(X_1)})$
(1 pont) $\approx \mathbb{P}(\frac{X - 40\cdot 2{,}5333}{6{,}3246\cdot 0{,}2867} > \frac{100 - 40\cdot 2{,}5333}{6{,}3246\cdot 0{,}2867})$)az előzővel összevonható, de ha rossz a numerikus eredmény, akkor részpont sem jár. Illetve ha az előző lépés megvolt, akkor ezután elég a jobb oldal kiszámolt értékét odaírni),
(1 pont) amit (a CHT szerint, amire már jár pont) $\mathbb{P}(Z > -0{,}7352)$-vel közelítünk, ahol Z standard normális eloszlású.
(1 pont) $\mathbb{P}(Z > -0{,}7352) = \mathbb{P}(Z < 0{,}7352)$ (ugyanez jó $\mathbb{P}(X < \ldots)$ helyett $\Phi(\ldots)$-tal is),
(1 pont) $\approx \mathbb{P}(Z < 0{,}74)$ (0,73 esetén se vonjunk le pontot)
(1 pont) $\approx 0{,}7704$ (a táblázat szerint).

Pótfeladat esetén a (b)-ben megkapható a maximális pontszám, azonban az egész feladat max. 16 pont (alapvetően az (a)-ban a primitív függvényekre és az azokat követő számolásokra nem jár pont). Kivéve ha megcsinálja jól rendes megoldással és pótmegoldással is a (b)-t.
Pótmegoldásnál a (b)-ben a pontozás változatlan. Az általános standardizálás után kapott kifejezésből behelyettesítve ez lesz: $= \mathbb{P}(\frac{X - 40\cdot 2{,}53}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{0{,}49}} > \frac{100 - 40\cdot 2{,}5300}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{0{,}49}} \approx \mathbb{P}(\frac{X - 40\cdot 2{,}53}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{0{,}49}} > -0{,}2711)$.
Standard normális eloszlásra áttérve a pótvégeredmény $\mathbb{P}(Z > -0{,}2711) = \mathbb{P}(Z < 0{,}2711) \approx \mathbb{P}(Z < 0{,}27) \approx 0{,}6064$.

4. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, ahol X Poisson-eloszlású $\lambda = 3$ paraméterrel, Y pedig szintén diszkrét, a következő eloszlással: $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(Y = 3) = \frac{1}{3}$ és $\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{1}{6}$.

   (a) Határozzuk meg X, X^2, Y és Y^2 várható értékét.

   (b) Adjuk meg (indoklással) az $\mathbb{E}(Y^2 \cos(X) + 2026X^2Y + 138X + 1|X)$ regressziót.

Megoldás.
(a) (7 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \lambda = 3$.
(1 pont) Így $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2$
(1 pont) $(= \lambda + \lambda^2) = 3 + 9 = 12$. (Természetesen ki lehet számolni a transzformált várható értékének képletével is, de nem érdemes.)
(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}6667$ (bármelyik alak elég önmagában is, és nem kell általánosabban felírni a várható érték képletét).
(2 pont) $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot 4^2$ (nem kell indokolni és általánosabban írni sem, de az általános képletre jár 1 pont, és utána ezt a közbülső lépést át lehet ugrani, ha jó, ami utána jön)
(1 pont) $= 2 + 3 + \frac{8}{3} = 7\frac{2}{3} = \frac{23}{3} \approx 7{,}6667$ (bármelyik alak elég önmagában is).

(b) (13 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(Y^2 \cos(X) + 2026X^2Y + 138X + 1|X) = \mathbb{E}(Y^2 \cos(X)|X) + \mathbb{E}(2026X^2Y|X) + \mathbb{E}(138X|X) + \mathbb{E}(1|X)$
(2 pont) $= \mathbb{E}(Y^2 \cos(X)|X) + 2026\,\mathbb{E}(X^2Y|X) + 138\,\mathbb{E}(X|X) + \mathbb{E}(1|X) =: (\star)$ (az előzővel összevonható)
(1 pont) a regresszió/feltételes várható érték linearitása miatt. (Ha csak annyit ír, hogy linearitás, az akkor fogadható el, ha jól csinálja.)
(1 pont) $\mathbb{E}(1|X) = 1$ (elég, ha ez impliciten derül ki, és lehet akár már a legelején is alkalmazni).
(3 pont) $(\star) = \cos(X)\,\mathbb{E}(Y^2|X) + 2026X^2\,\mathbb{E}(Y|X) + 138X + 1 =: (\star\star)$ (tagonként 1 pont)
(1 pont) mert... (valahogyan hivatkozik a regresszió megfelelő tulajdonságára, pl. ismert információ kiemelése, taking out what is known stb.)
(2 pont) $(\star\star) = \cos(X)\,\mathbb{E}(Y^2) + 2026X^2\,\mathbb{E}(Y) + 138X + 1$,
(1 pont) mert függetlenek.
(1 pont) Ebbe az (a)-beli eredményeket behelyettesítve a végeredmény $\frac{23}{3}\cos(X) + \frac{16208}{3}X^2 + 138X + 1$. (Négy jegyre kerekített tizedestört alakban is OK, $16208/3 = 5402{,}6666$.)

A tulajdonságok megnevezése mellett jó egy általános képlet megadása is, és nem baj, ha kihagy olyan feltételeket, hogy „ha az adott várható érték létezik”, sőt az ismert információ kiemelésénél nézzük el azt is, ha nem tudjuk meg, hogy a h függvénynek milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie.

5. Egy kisállat-kereskedésben olyan hörcsögöket árulnak, amik a boltos állítása szerint várható értékben legfeljebb 20 cm testhosszúságúra nőnek. Megkértünk 7 hörcsögtulajdonost, akik itt vásárolták háziállatukat, hogy mérjék meg már felnőtt hörcsögeik testhosszúságát. Az alábbi $(x_1, \ldots, x_7)$ realizáció adódott (centiméterben mérve):

$$x_1 = 19{,}1 \qquad x_2 = 21{,}0 \qquad x_3 = 24{,}2 \qquad x_4 = 17{,}8 \qquad x_5 = 20{,}0 \qquad x_6 = 22{,}9 \qquad x_7 = 22{,}0.$$

Feltételezzük, hogy a hörcsögök testhosszúságai független, normális eloszlású valószínűségi változókkal modellezhetőek, ismeretlen várható értékkel és 2 cm szórással.

(a) Döntsük el alkalmasan választott $\varepsilon = 0{,}03$ terjedelmű próbával, hogy igaz-e a boltos állítása. Adjuk meg H_0-t, H_1-et, a próbastatisztika értékét, azt, hogy mi alapján döntünk, és magát a döntést is.

(b) Mekkora a próba p-értéke?

Megoldás.
(a) (12 pont)
(1 pont) Egyoldali,
(0 pont) egymintás u-próbát használunk,
(1 pont) amelynek alternatívája $H_0\colon \mu \leq 20$ vs. $H_1\colon \mu > 20$ (ahol μ jelöli a mintaelemek várható értékét).
(1 pont) H_0-t akkor fogadjuk (nem utasítjuk) el, ha $u = u(x_1, \ldots, x_7) \leq u_\varepsilon$ (nem baj, ha „$\leq$” helyett „$<$” van)
(1 pont) $= \Phi^{-1}(1-\varepsilon) = \Phi^{-1}(0{,}97)$
(1 pont) $\approx 1{,}88$.
(1 pont) A mintaátlag $\overline{x_n} = \frac{1}{7}(x_1 + \ldots + x_7)$
(1 pont) $= 21$ (az is OK, ha a konkrét számokkal számol, nem pedig az „általános képlettel”).
(0 pont) $\mu_0 = 20$ a H_0 szerinti várható érték.
(1 pont) $\sigma = 2$ a mintaelemek szórása (elég, ha ez impliciten derül ki u képletéből).
(1 pont) $n = 7$ a mintaelemszám (ez is).
(1 pont) $u = \frac{\overline{x_n}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{21-20}{2}\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ (nem kell az általános képletet leírni, csak írjon valami olyasmit legalább konkrét számokkal, amiből kiderül, hogy erre hivatkozik.)
(1 pont) $= 1{,}3229$.
(1 pont) Tehát H_0-t elfogadjuk (nem utasítjuk el).
(b) (8 pont)
(2 pont) A próba p-értéke az a terjedelem, amely mentén éppen H_0 elfogadása és elutasítása határán állunk.
(1 pont) Ez esetünkben azt jelenti, hogy a p-érték egy olyan ε, amelyre a kapott u megegyezik u_ε-nal. (Ha ennyi megvan, akár az u konkrét értékére is, akkor az előző 2 pont is jár.)
(1 pont) Vagyis ε-t úgy kell megválasztani, hogy $u = 1{,}3229 = u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1-\varepsilon)$ teljesüljön,
(1 pont) vagyis igaz legyen, hogy $1 - \varepsilon = \Phi(1{,}3229)$
(1 pont) $\approx \Phi(1{,}32)$
(1 pont) $\approx 0{,}9066$.
(1 pont) Innen a p-érték $\varepsilon = 1 - 0{,}9066 = 0{,}0934$ (itt már elég a végeredmény).

6. * Az (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó értékkészlete a

$$\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 < x < 2, 0 < y < x - 1\}$$

háromszög, együttes eloszlásfüggvénye pedig

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 \text{ vagy } y \leq 0, \\ 2(x-1)y - y^2, & \text{ha } 1 < x < 2 \text{ és } 0 < y < x - 1, \\ (x-1)^2, & \text{ha } 1 < x < 2 \text{ és } y \geq x - 1, \\ 2y - y^2, & \text{ha } x \geq 2 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 1, & \text{ha } x \geq 2 \text{ és } y \geq 1. \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg X, illetve Y (marginális) eloszlásfüggvényét.

(b) Határozzuk meg (X, Y) együttes sűrűségfüggvényét.

(c) Kétdimenziós egyenletes eloszlású-e (X, Y) a Δ háromszögön?

Megoldás. (a) (9 pont)
(1 pont) $F_X(x) = 0$, ha $x \leq 1$ és $F_X(x) = 1$, ha $x \geq 2$. (Ezt nem kell indokolni, de a megadott értékkészlet és az eloszlásfüggvény definíciója alapján világos. A határokat bármelyik szakaszhoz be szabad sorolni, és lehet ezt az esetet is a többivel együtt kezelni.)
(1 pont) Hasonlóan $F_Y(y) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F_Y(y) = 1$, ha $y \geq 1$.

Az (a) további részére *1. (standard) megoldás*:
(1 pont) Ha $1 < x < 2$, akkor $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y)$
(3 pont) $= \lim_{y\to\infty}(x-1)^2 = (x-1)^2$.

(Vagy:
(1 pont) $\overset{*}{=} \lim_{y\uparrow x-1} F_{X,Y}(x, y)$ (ne vonjunk le pontot, ha $y \to x - 1$-et ír)
(1 pont) $= 2(x-1)(x-1) - (x-1)^2 = (x-1)^2$.
(1 pont) A $*$-gal jelölt egyenlőség azért igaz, mert X (vagy (X, Y) vagy $F_{X,Y}$ vagy F_X) folytonos.[a] Vagy azért, mert a feladat megadta, hogy $(y, x - 1)$ már pont nincs benne (X, Y) értékkészletében (és ezért $F_{X,Y}$ folytonos ebben a pontban – ezt nem kell odaírni).
A $*$-gal jelölt egyenlőség helyett jó az is, hogy $\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(x, x - 1) = (x-1)^2$, de itt is hivatkozni kell a folytonosságra. Jó úgy is, hogy $\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{y\to z} F_{X,Y}(x, y)$ vagy $\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(x, z)$, ahol z egy tetszőleges olyan szám, ami nagyobb, mint $x-1$; ezekben az esetekben a pontozás szempontjából a folytonosságra már nem kell hivatkozni, jár arra is az 1 pont.)

(1 pont) Hasonlóan ha $0 < y < 1$, akkor $F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x, y)$
(2 pont) $= \lim_{x\to\infty} 2y - y^2 = 2y - y^2$.

(Vagy:
(1 pont) $= \lim_{x\to 2} F_{X,Y}(x, y)$ (megint a folytonosság miatt, de itt arra már nem jár pont. Ha itt hivatkozik rá és F_X-nél nem, akkor az előbbi pontot meg lehet adni rá.)
(1 pont) $= 2y - y^2$.)

Ehelyett megint jó az is, hogy $\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(2, y) = 2y - y^2$ (és itt is kellene a folytonosságra hivatkozni, de szintén nem jár rá pont). Szintén jó az, hogy x-szel nem 2-höz, hanem valami annál nagyobbhoz tartunk (mind a határértékes, mind a behelyettesítős verzióban), és akkor elvi szinten sem kell a folytonosságra hivatkozni.

[a] Nem kell jobban indokolni, de: (X, Y) folytonos $\Rightarrow$ X folytonos $\Rightarrow$ F_X folytonos. Másik lehetséges érvelés: (X, Y) folytonos $\Rightarrow$ $F_{X,Y}$ folytonos $\Rightarrow$ F_X folytonos. $F_{X,Y}$ folytonossága pedig a megadott képletből is látszik, (X, Y) folytonossága nélkül is elhisszük. A folytonosság azért kell, mert nem folytonos esetben adott x-re $y \mapsto F_{X,Y}(x, y)$ általában csak balról folytonos, ezért $\lim_{y\uparrow x-1} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(x, x - 1) = \mathbb{P}(X < x, Y < x - 1)$, ami nem feltétlenül egyezik meg $\mathbb{P}(X < x, Y \leq x - 1) = \mathbb{P}(X < x)$-szel.

Az (a) első 2 pontja utáni részre *2. megoldás*: nem használjuk fel, hogy $F_X(x)$ és $F_Y(y)$ az együttes sűrűségfüggvény határértékeként számítható, hanem definíció alapján számoljuk őket.
(1 pont) Ha $1 < x < 2$, akkor $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$
(2 pont) $= \mathbb{P}(X < x, Y < 42)$
(0 pont) $= F_{X,Y}(x, 42)$ (az előzővel összevonható, ha már megjelent valami valószínűség a megoldásban)
(1 pont) $= (x-1)^2$.
Itt a 42 helyére bármilyen $x-1$-nél nagyobb szám jó és nem kell a folytonosságra hivatkozni. Ha pont $x-1$-et ír, akkor hivatkozni kell a folytonosságra, különben csak 1 pont jár a 2-ből.
(1 pont) Hasonlóan ha $0 < y < 1$, akkor $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(X < 10, Y < y)$ (itt már nem jár pont a folytonosságra való hivatkozásra, így a 10 helyett akár 2 is beírható, vagy bármilyen 2-nél nagyobb szám)
(1 pont) $= 2y - y^2$.

Az (a) első 2 pontja utáni részre *3. (hosszabb, munkaigényesebb, de helyes) megoldás*: az (a) előtt megoldjuk a (b)-t (pontozás: lásd ott), majd kiszámoljuk a perem-sűrűségfüggvényeket (4 pont), és ezek integrálásával ($-\infty$-től a megfelelő pontig) a perem-eloszlásfüggvényeket (3 pont). Az eloszlásfüggvények konstans 0 vagy 1 szakaszára már járt pont, ezért a perem-sűrűségfüggvények konstans 0 szakaszával nem kell foglalkozni (az együttes sűrűségfüggvényével is csak a (b)-ben kell).

Ha $F_X(x)$-re y-tól függő vagy $F_Y(y)$-ra x-től függő mennyiséget hoz ki, akkor az (a)-ra összesen legfeljebb 6 pont (még ha elírásnak is tűnik), és ha ez ismétlődik, akkor legfeljebb 3 pont!

(b) (7 pont)
(1 pont) Mivel (X, Y) folytonos (amint meg van adva),
(1 pont) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\ \partial y}$ (a deriválások sorrendje tetszőleges, és bármilyen értelmes ekvivalens jelölés elfogadható a második parciális deriváltra. Az előbbi pontnál viszont az együttes folytonosságra kell hivatkozni, nem elég a peremeloszlások vagy eloszlásfüggvények folytonosságára, még az együttes eloszlásfüggvényére sem!)
(2 pont) $f_{X,Y}(x, y) = 0$, ha $(x, y) \notin \Delta$ (vagyis ha az $F_{X,Y}$-nál megadott öt esetből nem a másodikban vagyunk – ezt bárhogyan meg lehet fogalmazni, nem baj, ha valahol egyenlőség van egyenlőtlenség miatt vagy fordítva, és erre az 1 pontra indoklás sem kell. Ha a négy esetből, amikor 0 az együttes sűrűségfüggvény, legalább kettőt helyesen megad, de nem mindet, akkor lehet adni a 2-ből 1 pontot.)
(1 pont) Ha ($(X, Y) \in \Delta$, azaz) $1 < x < 2$ és $0 < y < x - 1$, akkor $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 (2(x-1)y)}{\partial x\ \partial y}$ (ez a fenti általános képlettel összevonható, csak az $(x, y) \notin \Delta$ esetet kell külön kezelni)
(1 pont) $= \frac{\partial (2y)}{\partial y} = \frac{\partial (2(x-1)-2y)}{\partial x}$ (a kettő közül elég az egyik, de teljes pontszámért legyen valami részletszámítás)
(1 pont) $= 2$.
Ha a perem-sűrűségfüggvényekből próbálja az együttest kitalálni (pl. azt írja, hogy X és Y függetlenek), a (b)-ben legfeljebb a tartományon kívüli 0 értékre járó 2 pontot kaphatja meg!

(c) (4 pont)
(1 pont) A Δ-n kétdimenziós együttes eloszlás együttes sűrűségfüggvénye Δ-n konstans (egyenlő $1/T_\Delta = 2$ – ez nem kell, viszont jó ahelyett, hogy konstans, és ha elmondja, hogy a konstansnak 2-nek kell lennie, akkor a következő pont is jár),
(1 pont) mindenhol máshol pedig 0.
(2 pont) A (b) alapján ez teljesül, tehát a válasz igen.
Ha a peremeloszlásokra vagy bármilyen momentumokra vagy függetlenségre hivatkozik, a (c)-re 0 pont!

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az

ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.