Pótló zárthelyi dolgozat

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. A $(0;2)$ intervallumon találomra (egyenletes eloszlással) választunk egy valós számot, és ettől függetlenül az $(1;3)$ intervallumon találomra választunk egy másik valós számot. Mennyi a valószínűsége, hogy az $(1;3)$ intervallumon választott szám a nagyobb, de legfeljebb kétszer akkora, mint a $(0;2)$ intervallumon választott szám?
Megoldás.
(2 pont) A véletlen kísérlet megfelel egy (x,y) pont választásának az $= (0;2) \times (1;3)$ (azaz az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x < 2, 1 < y < 3\}$) négyzeten. (Ha nyílt helyett zárt vagy félig zárt intervallumokkal dolgozik, az nem baj.)
(1 pont) Ez az Ω eseménytér.
(3 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség a kedvező terület és az összes terület (Ω területe) aránya.
(Elég, ha a területarányokra hivatkozik helyesen, nem kell kimondani, hogy geometriai. Viszont ha csak annyit mond, hogy geometriai, az önmagában a 3 pontból csak 1, és a másik kettőt akkor lehet megadni, ha impliciten kiderül, hogy jó képlettel számol.)
(2 pont) $T_\Omega = 2 \cdot 2 = 4$. (Legalább ennyi indoklás legyen, különben max. 1 pont.)
(2 pont) A kedvező terület Ω-nak az $y = x$ és az $y = 2x$ egyenesek közé eső részének területe [mert itt lesz igaz, hogy a második pont, y nagyobb az elsőnél, x-nél, de nem nagyobb annak kétszeresénél. A határokkal itt nem kell foglalkozni, de egyébként az $y = x$ egyenes Ω-beli szakasza nincs benne, az $y = 2x$ egyenesé viszont benne van].
(4 pont) Jó ábra (a jóság részei: 1 pont arra, hogy az első pontot az x-tengelyen, a másodikat az y-tengelyen ábrázoljuk; 1 pont arra, hogy Ω jó, 2 pont arra, hogy a kedvező terület határai jók – ha csak az egyik határ jó vagy ha pont a kedvezőtlent tekinti kedvezőnek, max. 1 pontot ebből meg lehet adni).
(5 pont) Kiszámolja indoklással a kedvező területet. Pl.: a kedvezőtlen terület Ω területén belül egy $0{,}5 \cdot 2 = 1$ területű téglalapból (Ω bal szélén, az $y = x$ egyenestől balra), egy $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ területű derékszögű egyenlőszárú háromszögből (az említett téglalap és az $y = 2x$ egyenletű egyenes között, befogói az $x = 1/2$ és az $y = 3$ egyenletű egyenesekre esnek, ezek hossza 2, illetve 1) és egy $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ területű derékszögű egyenlőszárú háromszögből (Ω-nak az $y = x$ egyenletű egyenestől

jobbra eső részéből) áll. [Itt a számolásokat nem kell részletezni, 1–1 pont részenként.]
Összesen tehát $T_{\text{kedvező}} = 4 - T_{\text{kedvezőtlen}} = 1{,}5$. (Erre 1+1 pont.)
Természetesen lehet máshogy is számolni, pl. az $y = x$ egyenest az $y = 3$ egyenesig meghosszabbítani és az így keletkező trapéznak a területéből (2), amelynek a párhuzamos oldalai az x tengellyel párhuzamosak, kivonni az Ω-n kívül eső kis derékszögű háromszög területét (0,5).
(1 pont) Így tehát a keresett valószínűség $\frac{15}{4} = \frac{3}{8} = 0{,}375$ (bármilyen alakban jó).

Megjegyzés: Mivel a geometriai valószínűségi mezős feladatok megoldásait a gyakorlatokon is ritkán írtuk fel ennyire részletesen, ebben a feladatban azokra a lépésekre is jár a pont, amiket a hallgató nem írt fel expliciten, de a későbbi megoldásból egyértelműen kiderül, hogy jól használta őket. Pl. ha kihagyja az első lépést, de utána a megfelelő módon rajzol ábrát/számol területeket, akkor ez a 2 pont is jár, vagy ha nem írja fel, hogy mi Ω, de később világos, hogy jól határozza meg a területét (és ezt legalább minimálisan megindokolja), akkor arra is jár pont stb. stb. Ha nincs ábra, de a szövegből/számításokból kiderül, hogy a megfelelő síkidomok területét számolja, akkor az ábrára is adjunk pontot. Ha azonban a későbbi lépés, ami a hiányzó jó, de expliciten nem szereplő lépést használná, hibás, akkor sajnos a hiányzó lépésre sem lehet pontot adni. A geometriai valószínűségi mezőt nem kötelező megnevezni, de ha nem nevezi meg, akkor a kedvező terület/összes terület képletre mindenképpen hivatkozni kell. Ha nincs ábra vagy hiányos, akkor abban az esetben adhatóak meg az ábrára járó pontok, ha a kedvező területről részenként külön-külön megmondja, hogy mik azok és mennyi a területük. Hibás számolás esetén azonban az ábra adott részére adandó pontszám is elvész.

2. Egy kötelezően választható tárgy zárthelyi dolgozatát két teremben írják a hallgatók: az IB027-ben és az IB028-ban. A zh-t az IB027-ben 45 magyaros és 15 németes, az IB028-ban pedig 80 magyaros és 40 angolos hallgató írja. Véletlenszerűen (azonos valószínűséggel) kiválasztunk egy hallgatót, aki a dolgozatot írja.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a választott hallgató magyaros?

   (b) Feltéve, hogy a választott hallgató magyaros, mennyi a valószínűsége, hogy az IB028-ban írja a dolgozatát?

   (c) Függetlenek-e a következő események (és miért): {a választott hallgató nem magyaros} és {a választott hallgató az IB027-ben írja a dolgozatát}?

Megoldás.
(a) (6 pont)
(0 pont) Jelölje M azt az eseményt, hogy a választott hallgató magyaros, A azt, hogy angolos és N azt, hogy németes. Jelölje továbbá D azt az eseményt, hogy a hallgató az IB027-ben írja a dolgozatát, és E azt, hogy az IB028-ban.
(0 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(M)$.
1. (ajánlott) megoldás.
(1 pont) A D és az E események egymás komplementerei, vagy: teljes eseményrendszert alkotnak. (Ezt kivételesen nem kell megindokolni, mert nem jár olyan sok pont a feladatra, de nyilvánvaló, hogy egy esemény és komplementere kizáróak és uniójuk az egész eseménytér.)
(1 pont) Ezért a teljes valószínűség tétele (elég: TVT) szerint
(1 pont) $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(D)\,\mathbb{P}(M|D) + \mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(M|E)$
(2 pont) $= \frac{60}{180} \cdot \frac{45}{60} + \frac{120}{180} \cdot \frac{80}{120}$
(1 pont) $125/180 = 25/36 (\approx 0{,}6944)$.
2. megoldás.
(2 pont) A valószínűségi mező klasszikus, ezért kedvező/összes eset képlettel számolható a keresett valószínűség. (Elég csak a klasszikus val. mezőre hivatkozni, ha később impliciten kiderül,

hogy jó képlettel számol. Ha nem derül ki, akkor max. 1 pont a kettőből. Ha csak azt mondja, hogy kedvező/összes, és az is kiderül, hogy kedvező micsoda és összes micsoda, az is elég.)
(2 pont) A két teremben összesen 125 magyaros hallgató van az összesen 180 hallgatóból.
(1 pont) Így a keresett valószínűség $125/180 = 25/36 (\approx 0{,}6944)$.
(1 pont) *Ha ezután a (b)-t az 1. megoldással oldja meg, ez az 1 pont arra jár, hogy ott kimondja, hogy a D és az E események egymás komplementerei/teljes eseményrendszert alkotnak (indokolni itt sem kell). Ha a (b)-t a 2. megoldással oldja meg és ott minden indoklás helyes és teljes (számítási hibák lehetnek), akkor is jár ez az 1 pont, különben nem.*

(b) (6 pont)
(1 pont) A keresett (feltételes) valószínűség $\mathbb{P}(E|M)$.

Innen *1. (ajánlott) megoldás.*
(1 pont) ((Egyszerű)) Bayes-tétellel
(1 pont) $\mathbb{P}(E|M) = \frac{\mathbb{P}(M|E)\,\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(M)}$
(a $\mathbb{P}(M)$ helyett természetesen jó a TVT-ben szereplő, (a)-ban kiszámolt alak, illetve $\mathbb{P}(M)$ jó akkor is, ha az (a)-ban a 2. megoldást választotta).
(1 pont) Tudja, hogy a számláló $\frac{120}{180} \cdot \frac{80}{120}$ (ha már az (a)-ban is felírta ezt a szorzatot, elég annyi, hogy $\frac{4}{9}$).
(1 pont) Tudja, hogy a nevező $\frac{25}{36}$ (az (a) alapján).
(1 pont) Tehát a keresett valószínűség $\frac{4/9}{25/36} = \frac{16}{25}$.
2. megoldás.
(1 pont) $\mathbb{P}(E|M) = \frac{\mathbb{P}(E \cap M)}{\mathbb{P}(M)}$ (definíció szerint).
(1 pont) $E \cap M$ azon kimenetelek halmaza, ahol a választott hallgató magyaros és az IB028-ban ül.
(1 pont) Ennek a halmaznak 80 eleme van.
(1 pont) Tehát $\mathbb{P}(E \cap M) = \frac{80}{180} = \frac{4}{9}$. Ez a pont csak akkor jár, ha már legalább egyszer hivatkozott a klasszikus val. mezőre vagy kedvező esetek száma/összes eset száma képletre. (Az előzővel viszont ebben az esetben összevonható.)
(1 pont) Így (az (a) alapján) a keresett valószínűség $\frac{4/9}{25/36} = \frac{16}{25}$.

(c) (8 pont)
1. megoldás.
(0 pont) Az előbbi jelöléssel a vizsgálandó eseményeink $\overline{M}$ és D.
(1 pont) Ha függetlenek lennének, az azt jelentené, hogy $\mathbb{P}(\overline{M} \cap D) = \mathbb{P}(\overline{M})\,\mathbb{P}(D)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(D) = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$. (Nem kell kiírni, hogy kedvező/összes, mert csak 1 pont jár rá.)
(1 pont) $\mathbb{P}(\overline{M}) = 1 - \mathbb{P}(M)$
(1 pont) $= 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.
(1 pont) $\overline{M} \cap D$ azon kimenetelek halmaza, ahol a választott hallgató az IB027-ben ül és nem magyaros.
(1 pont) Ennek a halmaznak 15 eleme van,
(1 pont) tehát $\mathbb{P}(\overline{M} \cap D) = \frac{15}{180} = \frac{1}{12}$.
Az előző 3 pont helyett ugyanez szorzási szabállyal is jó.
(1 pont) Mivel $\frac{1}{12} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{36}$, nem függetlenek. (Kellő indoklás esetén ez a (c) legelső pontjával összevonható.)
2. megoldás.
(2 pont) Ha $\overline{M}$ és D függetlenek, akkor M és D is függetlenek. Belátjuk, hogy M és D nem függetlenek, amiből következik, hogy $\overline{M}$ és D sem azok.
(1 pont) Tudja, hogy M és D függetlensége azt jelenti, hogy $\mathbb{P}(M \cap D) = \mathbb{P}(M)\,\mathbb{P}(D)$ (mindegy, hogy ez a megoldás során pontosan hol, de szerepeljen).
(0 pont) $\mathbb{P}(M) = \frac{25}{36}$ az (a) alapján.
(1 pont) $\mathbb{P}(D) = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$. (Nem kell kiírni, hogy kedvező/összes, mert csak 1 pont jár rá.)

(1 pont) $M \cap D$ azon kimenetelek halmaza, ahol a választott hallgató az IB027-ben ül és magyaros.
(1 pont) Ennek a halmaznak 45 eleme van,
(1 pont) tehát $\mathbb{P}(M \cap D) = \frac{45}{180} = \frac{1}{4}$.
Az előző 3 pont helyett ugyanez szorzási szabállyal is jó.
(1 pont) Mivel $\frac{1}{4} \neq \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{3}$, nem függetlenek.

3. Megvizsgáljuk, hogy egy burgonyaföld egy kis darabján hány krumplibogár található. Az itt található krumplibogarak száma jó közelítéssel Poisson-eloszlású és annak a valószínűsége, hogy pontosan két krumplibogarat találunk, $2e^{-2}$-vel egyenlő. Jelölje X a földdarabon található krumplibogarak számát.

   (a) Mi az eloszlás paramétere (λ)?

   (b) Mi a valószínűsége, hogy legalább egy krumplibogarat találunk a földdarabon?

   (c) Határozzuk meg a $2X - 3$ valószínűségi változó várható értékét és a $-4X - 7$ valószínűségi változó szórásnégyzetét.

   Megoldás.
   (a) (4 pont)
   (1 pont) A feladat szövege szerint $2e^{-2} = \mathbb{P}(X = 2)$
   (2 pont) $= \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$. (Ha 2 helyett 2!-t ír, arra 1 pont mindenképpen jár, és ha később impliciten kiderül, hogy $2! = 2$, akkor rendben van.)
   (1 pont) Tehát $\lambda = 2$ ((ez tényleg jó, mert $2^2/2 = 2$)).
   Megjegyzés. Könnyen látható, hogy a $\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} = 2e^{-2}$ egyenletnek nincs más pozitív valós megoldása (útmutatás: deriváljuk a két oldal különbségét λ szerint).
   (b) (6 pont)
   (1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \geq 1)$
   (1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X < 1)$
   (1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X = 0)$ (az előzővel összevonható)
   (2 pont) $= 1 - e^{-\lambda}$ (persze meg lehet szorozni az $e^{-\lambda}$-t λ^0-nal és leosztani 0!-sal; erre alapból 1 pont jár és még 1 akkor, ha tud velük mit kezdeni)
   (1 pont) $= 1 - e^{-2} \approx 0{,}8647$ (kell a numerikus eredmény ezért a pontért).
   (c) (10 pont)
   Nem kell a várható érték és szórásnégyzet tulajdonságait megnevezni, csak megmutatni, hogy mely tulajdonságokat használjuk a konkrét esetben.
   (2 pont) $\mathbb{E}(2X - 3) = 2\,\mathbb{E}(X) - 3$ (lehet több lépésben is; azt nem kell megindokolni, hogy a konstans 3 várható értéke 3)
   (1 pont) $= 2\lambda - 3$
   (1 pont) $= 2 \cdot 2 - 3 = 1$.
   (Az előzővel összevonható; ha minden korábbi lépés jó volt, nem baj, ha nem írja oda a 2 helyett λ-val, mivel a Poisson-eloszlás várható értéke benne van a táblázatban.)
   (2 pont) $\mathbb{D}^2(-4X - 7) = \mathbb{D}^2(-4X)$
   (2 pont) $= 16\,\mathbb{D}^2(X)$ (az előzővel összevonható)
   (1 pont) $= 16\lambda$
   (1 pont) $= 32$. (Az előzővel összevonható a várható értékhez hasonlóan.)

4. Feldobunk két olyan szabályos pénzérmét, amiknek az egyik oldalára 1-es, a másik oldalára 0-s számot írtunk. Jelölje U az első, V a második érme felső oldalán látható számot a dobás után. Legyen $X = U + V$ és $Y = U - V$.

   (a) Adjuk meg indoklással X és Y együttes eloszlását (azaz $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$ értékét minden olyan k-ra és ℓ-re, amire ez a valószínűség pozitív) táblázatos formában.

(b) Határozzuk meg X és Y peremeloszlásait is.

(c) Igaz-e, hogy $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$?

(d) Független-e X és Y?

Megoldás.

$Y \backslash X$	0	1	2	p_Y
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
p_X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	(1)

(a) (9 pont)
Együttes eloszlás táblázat:
(4 pont) Az 1/4-ekre (darabonként 1 pont).
(1 pont) Arra, hogy nincs más nem 0 elem a táblázatban. (Ez elég impliciten is.)
Részpontok csak akkor járnak, ha nincs a táblázatban sem negatív, sem 1-nél nagyobb valószínűség. Ugyanez igaz a peremeloszlásokra.
Indoklás:
(1 pont) Ha $U = V = 0$, akkor $X = Y = 0$.
(1 pont) Ha $U = V = 1$, akkor $X = 2$ és $Y = 0$.
(1 pont) Ha $U = 0$ és $V = 1$, akkor $X = 1$ és $Y = -1$.
(1 pont) Ha $U = 1$ és $V = 0$, akkor $X = Y = 1$.
(b) (3 pont)
(1 pont) p_X-nél az oszlopösszegeknek megfelelő értékek szerepelnek.
(1 pont) p_Y-nál a sorösszegeknek megfelelő értékek szerepelnek.
(1 pont) p_X és p_Y értékeinek összege is 1.
(c) (5 pont)
1. megoldás $\mathbb{E}(XY)$ *kiszámítására (eloszlástranszformáció-szerű képlettel)*:
(2 pont) $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k\in\mathrm{Ran}(X)} \sum_{\ell\in\mathrm{Ran}(Y)} k\ell\,\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \frac{1}{4}\cdot(-1) + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 = 0$.
(Nem kell a formális képlet, ha legalább annyira részletezi, hogy kiderüljön, hogy a cellákbeli X-érték és Y-érték szorzatát súlyozza a cellához tartozó valószínűségekkel és ezeket adja össze. Különben max. 1 pont.)
2. megoldás $\mathbb{E}(XY)$ *kiszámítására (meghatározzuk XY eloszlását)*:
(2 pont) $\mathrm{Ran}(XY) = \{-1, 0, 1\}$, $\mathbb{P}(XY = -1) = \mathbb{P}(XY = 1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(XY = 0) = \frac{1}{2}$ (nem kell jobban indokolni, csak a táblázatból kiolvasni), tehát $\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{4}\cdot(-1)\Big(+\frac{1}{2}\cdot 0\Big) + \frac{1}{4}\cdot 1 = 0$.
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 = 1$ (a nullás tag elhagyható).
Ha megvan, hogy $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) = 0$ és emiatt $\mathbb{E}(X)$ értékét nem kell kiszámolnia a kérdés megválaszolásához, akkor jár az 1 pont $\mathbb{E}(X)$-re.
(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 = 0$ (a nullás tag elhagyható).
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$, igaz az állítás.

(d) (3 pont)
(1 pont) Nem függetlenek, mert van olyan x, y, amire $\mathbb{P}(X = x, Y = y) \neq \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y)$.
(2 pont) Választ egy ilyen (x, y) párt és a táblázat alapján bemutatja, hogy mennyi $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$, $\mathbb{P}(X = x)$ és $\mathbb{P}(Y = y)$. (Itt egyébként bármely $x \in \mathrm{Ran}(X)$ és $y \in \mathrm{Ran}(Y)$ jó megoldás lesz.)
Ha azt írja, hogy $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ miatt függetlenek, a (d)-re azonnal 0 pont!

5. Egy ceruzaelem élettartama folytonos, örökifjú eloszlást követ, és tudjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy az elem két hónapnál kevesebb idő után fogy ki, $1 - e^{-4}$-gyel egyenlő. Jelölje X az elem élettartamát (hónapban mérve).

(a) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényének értékét az $x = 3$ helyen.

(b) Határozzuk meg X várható értékét és szórását.

(c) Feltéve, hogy a ceruzaelem élettartama nyolc hónapnál nagyobb, mennyi annak a valószínűsége, hogy (az első nyolc hónapot is beleszámítva) tizenhárom hónapnál is nagyobb lesz az élettartama?

Megoldás.
(a) (7 pont)
(2 pont) Folytonos és örökifjú eloszlás csak exponenciális lehet (és ennek a paraméterét kell meghatározni).
Ha ezt nem írja le, de azt igen, hogy exponenciális eloszlással kell dolgozni (vagy láthatóan azzal dolgozik), akkor a 2 pontból 1 jár.
(1 pont) A feladat szövege szerint $1 - e^{-4} = \mathbb{P}(X < 2)$
(1 pont) $= 1 - e^{-2\lambda}$.
(1 pont) Tehát $\lambda = 2$.
(1 pont) $f_X(3) = 2e^{-2\cdot 3}$ (nem kell λ-val és t-vel felírni, ott a táblázat)
(1 pont) $=2e^{-6} \approx 0{,}0050$.
(b) (5 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
(1 pont) $= \frac{1}{2}$.
(1 pont) $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$
(1 pont) $= \sqrt{1/\lambda^2}$
(1 pont) $= \sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$. (Ha a szórásra egyből azt írja, hogy $1/\lambda$, azt is elfogadjuk.)
(c) (8 pont)
(2 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X > 13|X > 8)$.
(1 pont) Az eloszlás örökifjúsága miatt
(1 pont) ez $\mathbb{P}(X > 13 - 8) = \mathbb{P}(X > 5)$-tel egyenlő (elég a $\mathbb{P}(X > 5)$).
(1 pont) $\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5)$
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X < 5)$, mert X (vagy F_X) folytonos,
(1 pont) $= 1 - (1 - e^{-2\cdot 5}) = e^{-10}$
(1 pont) $\approx 4{,}540 \cdot 10^{-5}$ (bármilyen alakban jó kellő mértékben kerekítve).
Ha valahol $\geq$ lesz a $>$ helyett, az abban az esetben nem baj, ha nem könnyebbedik tőle a feladat, vagyis ha még mindig kell a folytonosságra hivatkozni. Ha könnyebbedik, akkor max. 7 pont.
Jó megoldás úgy számolni, hogy $\mathbb{P}(X > 5) = \int_5^\infty f_X(x)\mathrm{d}x$, ekkor nem kell a folytonosságra hivatkozni.
Szintén jó megoldás az örökifjúság helyett a feltételes valószínűség definícióját használni, ez kicsit több munka. Ekkor az örökifjúság helyett arra jár 1 pont, hogy $\mathbb{P}(\{X > 13\} \cap \{X > 8\}) = \mathbb{P}(X > 13)$. Ezután mindkét valószínűséget ugyanúgy ki kell számolni (elég először az egyiket és utána a másikat), majd a végén leosztani az egyiket a másikkal.

6. * Legyen X egyenletes eloszlású a $(-1; 1)$ intervallumon és legyen $Y = X^4$. Határozzuk meg Y eloszlás- és sűrűségfüggvényét és várható értékét.
Megoldás.
(0 pont) Először Y eloszlásfüggvényét határozzuk meg és utána abból deriválással a sűrűségfüggvényét.

Eloszlásfüggvény és tartozékai, 9 pont:
(1 pont) $x \in \mathbb{R}$ esetén $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x)$.
(1 pont) $\mathrm{Ran}(Y) = (0, 1)$ (nem kell indokolni, csak kimondani; ha később impliciten derül ki,

hogy itt nem 0 a sűrűségfüggvény/nem 0 és nem 1 az eloszlásfüggvény, az is jó. Nyilván azért igaz, mert $\{x^4 \colon x \in (-1;1)\} = (0;1)$. Ha nyílt vagy félig zárt intervallumot ír, az sem baj).
(1 pont) Ezért $F_Y(x) = 0$, ha $x \leq 0$ ($x < 0$-val is OK*)
(1 pont) és $F_Y(x) = 1$, ha $x \geq 1$ ($x > 1$-gyal is OK*).
*A határpontokat bármelyik szakaszba be lehet sorolni, de ha nem sorolja be mindet valahova, azért összesen 1 pontot le lehet vonni.
(0 pont) Végül, ha $0 < x < 1$, akkor $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x) = \mathbb{P}(X^4 < x)$
(2 pont) $= \mathbb{P}(-x^{1/4} < X < x^{1/4})$
(1 pont) $= x^{1/4}$ ($= \sqrt[4]{x}$ is jó természetesen).
(2 pont) Valami indoklás az előző egyenlőségre. Pl.: ez $F_X(x^{1/4}) - F_X(-x^{1/4})$ és tudja/kiolvassa a táblázatból, hogy X-nek mint egyenletes eloszlású val. változónak az eloszlásfüggvénye $F_X(x) = \frac{x+1}{2}$, tehát $F_X(x^{1/4}) - F_X(-x^{1/4}) = \frac{x^{1/4}-1+1+x^{1/4}}{2} = x^{1/4}$. Vagy: $= \mathbb{P}(-x^{1/4} < X < x^{1/4})$ az egydimenziós geometriai valószínűségi mező képletével számítható ki, ahol a kedvező hosszúság $2x^{1/4}$ és az összes hosszúság 2.

Sűrűségfüggvény, 5 pont:
(1 pont) Legyen $x \in \mathbb{R}$. Ha F_Y differenciálható x-ben, akkor $f_Y(x) = F_Y'(x)$. (Ezért az 1 pontért elég, ha azt leírja, hogy $f_Y(x) = F_Y'(x)$.)
(0 pont) Ha pedig F_Y nem differenciálható x-ben, akkor $f_Y(x)$-et nullának választjuk, amit azért tehetünk meg, mert F_Y folytonos és véges sok pont kivételével differenciálható. Ha ezt nem írja oda, azért nem vonunk le pontot, viszont a következő 2 pontért kell az is, hogy a határpontok jó szakaszban legyenek – vagy ha $f_Y(1)$-et vagy $f_Y(0)$-t nem 0-ként definiálja, akkor indokolja is meg, hogy mindegy, hogy ezekben a pontokban mennyi az értéke.
(2 pont) Tehát $f_Y(x) = 0$, ha $x \leq 0$ vagy $x \geq 1$ (1–1 pont a két szakaszra),
(2 pont) és ha $0 < x < 1$, akkor $f_Y(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$.

Várható érték, 6 pont:
1. megoldás: Y sűrűségfüggvényét már ismerjük, ebből definíció szerint kiszámítjuk Y várható értékét.
(2 pont) $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Y(x) \mathrm{d}x$
(2 pont) $= \int_0^1 x \cdot \frac{1}{4}x^{-3/4} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{4}x^{1/4} \mathrm{d}x$ (az előzővel összevonható)
(1 pont) $= [\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}x^{5/4}]_{x=0}^1$
(1 pont) $= \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$. (Itt már elég a végeredmény.)
2. megoldás: a transzformált várható értékére vonatkozó képlettel.
(2 pont) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_X(x) \mathrm{d}x$
(2 pont) $= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^4 \mathrm{d}x$
(1 pont) $= [\frac{1}{2}\frac{x^5}{5}]_{-1}^1$
(1 pont) $= \frac{1}{10} - (-\frac{1}{10}) = \frac{1}{5}$. (Itt is elég a végeredmény.)