

Pótló zárthelyi dolgozat

2024. november 5.

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészben) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozathoz nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. A $[0, 1]$ intervallumon egymás után (egymástól függetlenül) találomra választunk két számot. Mi a valószínűsége, hogy a két szám közül legalább az egyik nagyobb, mint $\frac{1}{5}$?

Megoldás.

1. *megoldás:* geometriai valószínűségi mezővel.

(2 pont) A véletlen kísérlet megegyezik egy véletlen pont választásával a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzetben.

(1 pont) Ez az Ω eseménytér.

(3 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség $= \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\Omega}}$. (T_{Ω} helyett $T_{\text{összes}}$ vagy hasonló is jó.)

(1 pont) $T_{\Omega} = 1$ (indoklás nélkül is OK).

(4 pont) (x, y) -nal jelölve a véletlen pontot a négyzetben, a kedvező terület a négyzetnek az a része, ahol $x > \frac{1}{5}$ vagy $y > \frac{1}{5}$ teljesül. (Ha csak az egyik van meg a két egyenlőség közül, vagy a „vagy” kapcsolat nem világos nemcsak a szövegből, de a megoldás további részéből sem, akkor max. 2 pont. Ha csak apróbb pontatlanságok vannak, akkor lehet 3 pont. Ne vonjunk le pontot, ha nem szigorú egyenlőtlenségeket ír).

(3 pont) jó ábra

(1 pont) $T_{\text{kedvező}} = T_{\text{összes}} - T_{\text{kedvezőtlen}}$ (az is OK, ha $1 - T_{\text{kedvezőtlen}}$ -t ír)

(2 pont) A kedvezőtlen terület az, amelyik az $x = \frac{1}{5}$ egyenletű egyenestől balra és az $y = \frac{1}{5}$ egyenletű egyenestől lefelé van (ha az ábra alapján egyértelműen kiderül, hogy ezt tekinti kedvezőnek, akkor ez a 2 pont szöveges leírás nélkül is jár), ami egy négyzet (elég, ha a későbbiekben azonosítható, hogy a téglalap területe alapján és jól számol).

(2 pont) Ennek a területe $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$.

(1 pont) Tehát a keresett valószínűség $\frac{24}{25}$ (ha egyértelmű, hogy ezt a számot szánja végeredménynek, akkor ne vonjunk le pontot, ha nem hangsúlyozza, hogy le kell osztani az összes területtel, vagyis 1-gyel).

Szabad egyből a kedvező területet kiszámolni, ebben az esetben a $T_{\text{kedvező}} = T_{\text{összes}} - T_{\text{kedvezőtlen}}$ helyett a kedvező terület kiszámolására jár még 1 pont. A kedvező területet nem kell körülírni, elég, ha az ábrában helyesen szerepel vagy a számolásnál azonosítható, hogy ezt a területet számolja ki.

2. megoldás: Poincaré-formulával és függetlenséggel.

(0 pont) Jelölje X az elsőként és Y a másodikként választott számot.

(2 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X > 1/5 \text{ vagy } Y > 1/5) = \mathbb{P}(\{X > 1/5\} \cup \{Y > 1/5\})$ (az utóbbi önmagában is elég, de ha nem derül ki, hogy unióval kellene számolni, akkor ebből a 2 pontból maximum 1 jár. Az uniónál kisebb szintaktikai hibákért, pl. hiányzó halmazjelölésekért ne vonjunk le pontot.)

(1 pont) A Poincaré-formula szerint

(3 pont) $\mathbb{P}(\{X > 1/5\} \cup \{Y > 1/5\}) = \mathbb{P}(X > 1/5) + \mathbb{P}(Y > 1/5) - \mathbb{P}(\{X > 1/5\} \cap \{Y > 1/5\})$ (utóbbi valószínűség jó $\mathbb{P}(X > 1/5, Y > 1/5)$ alakban megadva is, az összeg helyett pedig jó a $2\mathbb{P}(X > 1/5)$, később jár majd 1 pont annak a megindoklására, hogy $\mathbb{P}(Y > 1/5) = \mathbb{P}(X > 1/5)$).

(2+1 pont) $\mathbb{P}(\{X > 1/5\} \cap \{Y > 1/5\}) = \mathbb{P}(X > 1/5)\mathbb{P}(Y > 1/5)$, mert függetlenek (2 pont az egyenlőségre, 1 az indoklásra),

(2+1 pont) és $\mathbb{P}(Y > 1/5) = \mathbb{P}(X > 1/5)$, mert X és Y azonos eloszlásúak (2 pont az egyenlőségre, bárhol is derül ki a feladat során, és 1 az indoklásra. Azt, hogy azonos eloszlásúak, bárhol megindokolhatja, ami erre utal, pl. az is jó, hogy mindkét számot találomra a $[0,1]$ -en/ugyanúgy választjuk. Ehelyett az is jó, ha kiszámolja a két valószínűséget külön-külön).

(3 pont) X és Y is egyenletes eloszlásúak a $(0,1)$ intervallumon. Vagy: valahogy leírja, hogy X és Y egy-egy intervallumba való esésének valószínűsége az intervallumhosszal arányos (azaz egydimenziós geometriai valószínűségi mezőről van szó – utóbbi önmagában is elég), ahol az összes hosszúság 1.

(3 pont) Ezért $\mathbb{P}(X > 1/5) = 1 - \mathbb{P}(X < 1/5) = \frac{1-0}{5-0} = \frac{4}{5}$. (Nem kell ennyire részletesen kiírni, de derüljön ki, hogy az eloszlásfüggvény táblázatban szereplő képletét használja, vagy integrálhatja a sűrűségfüggvényt.) Vagy: $(1/5, 1)$ egy $4/5$ hosszúságú szakasz, az ebbe esés valószínűsége (az egydimenziós geometriai val. mező „kedvező hosszúság/összes hosszúság” képlete szerint) $(4/5)/1 = 4/5$.

(1 pont) Tehát a keresett valószínűség $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} - \frac{16}{25}$

(1 pont) $= \frac{24}{25}$.

Szintén jó, ha ezzel a módszerrel és komplementer valószínűséggel számol. Ebben az esetben azt kell használni, hogy egy mínusz a keresett valószínűség $\mathbb{P}(X < 1/5 \text{ és } Y < 1/5)$, amit fel lehet írni metszetként, majd a fenti megoldáshoz hasonlóan kiszámolni. Így tulajdonképpen könnyebb is: nem kell a Poincaré-formula. Az arra adandó 1+3 pont helyett 1+3 pont arra jár, hogy térjünk át a komplementer valószínűségekre, majd alkalmazzuk helyesen a vonatkozó De Morgan-azonosságot. A legelső 2 pontból 1 a keresett vagy a komplementer valószínűség bármilyen helyes azonosítására (és/vagy vagy metszet/unio) és 1 az és/vagy és metszet/unio közti áttérésre jár, ahol megint elég a metszettel/unióval kezdeni.

2. Egy forró nyári napon egy dél-pesti autóbuszjáraton sok busz közlekedik, amelyek mindegyike (egymástól függetlenül) $\frac{1}{3}$ valószínűséggel Ikarus 412-es, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel gázüzemű Van Hool és $\frac{1}{3}$ valószínűséggel Mercedes Conecto típusú. Az Ikarus 412-eseken eleve nincs klímaberendezés. A másik két típusú buszon van klímaberendezés, de csak a buszok egy részén működik: tíz darab gázüzemű Van Hool buszból átlagosan csak nyolcon, tíz darab Mercedes Conectóból pedig átlagosan kilencen működik.

Véletlenszerűen kiválasztunk egy buszt erről az autóbuszjáratról ezen a napon.

(a) Mi a valószínűsége, hogy a buszon működő klímaberendezés van?

- (b) Feltéve, hogy a buszon működő klímaberendezés van, mi a valószínűsége, hogy a busz Mercedes Conecto típusú?
- (c) Függetlenek-e a következő események: $\{a \text{ busz gázüzemű Van Hool típusú}\}$ és $\{a \text{ buszon működő klímaberendezés van}\}$?

Megoldás. (a) (9 pont)

(0 pont) Jelölje K azt az eseményt, hogy a kiválasztott buszon működő klímaberendezés van, I azt, hogy a busz Ikarus 412-es, V azt, hogy gázüzemű Van Hool és M azt, hogy Mercedes Conecto típusú.

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(K)$.

(1 pont) A feladat szövege szerint $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(M) = 1/3$ (és $\mathbb{P}(I) = 1/3$, de erre nem igazán lesz szükség),

(1 pont) $\mathbb{P}(K|V) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ és $\mathbb{P}(K|M) = \frac{9}{10}$

(1 pont) és $\mathbb{P}(K|I) = 0$. (Ezt nem muszáj ideírni; ha később egyértelmű, hogy ennek megfelelően számít, akkor is jár ez a pont.)

(1 pont) Az I, M, V események teljes eseményrendszert alkotnak,

(1 pont) mert kizáróak és lefedik az eseményteret (vagy ezzel ekvivalens indoklás, ennél jobban nem kell indokolni). Alternatív lehetőség: az eseményteret megszorítjuk a K esemény szempontjából releváns $\Omega' = M \cup V$ -re, és ezen az új eseménytérre az M és V események teljes eseményrendszert alkotnak. [Ezen az eseménytérre a $\mathbb{P}(\cdot|M \cup V)$ a releváns valószínűségi mérték, ami alapján a végén vissza kellene térni $\mathbb{P}(\cdot)$ -re, de erre nem kell hivatkozni.]

Ha azt állítja, hogy M és V teljes eseményrendszer, akkor az utóbbi 2 pontból csak 1 jár, de különben ne vonjunk le ezért több pontot. Ha bármiből kiderül, hogy I nélkül csak M és V nem teljes eseményrendszer, de $\mathbb{P}(K|I) = 0$ miatt úgy lehet vele számolni, mintha az lenne, akkor ne vonjuk le ezt az 1 pontot.

(1 pont) Így a teljes valószínűség tétele (elég: TVT) szerint

(1 pont) $\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(V) \mathbb{P}(K|V) + \mathbb{P}(M) \mathbb{P}(K|M) (+ \mathbb{P}(I) \mathbb{P}(K|I))$

(1 pont) $= \frac{1}{3}(\frac{8}{10} + \frac{9}{10} (+0)) = \frac{17}{30}$.

(b) (5 pont)

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(M|K)$.

(1 pont) Bayes-tétellel (jó az „egyszerű Bayes-tétel” is; még akkor is fogadjuk el, hogy „egyszerű”, ha esetleg odaírja az I -s tagot)

(2 pont) $\mathbb{P}(M|K) = \frac{\mathbb{P}(M) \mathbb{P}(K|M)}{\mathbb{P}(K)}$ (a nevező jó $\mathbb{P}(V) \mathbb{P}(K|V) + \mathbb{P}(M) \mathbb{P}(K|M) (+ \mathbb{P}(I) \mathbb{P}(K|I))$ alakban is, de már az (a)-ban kiszámoltuk az értékét)

(1 pont) $= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{17}{30}}$

(0 pont) $= \frac{9}{17}$.

Ha már az a-ban szerepelt a $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10}$ szorzat, akkor itt elég a szorzatukat ($\frac{9}{30}$) közölni. Ha $\mathbb{P}(K \cap M)$ -et ír a számlálóba (ami nem a Bayes-tételben szereplő alak), de nem indokolja, hogy ez a szorzási szabály miatt annyi, amennyi, akkor -1 pont.

(c) (6 pont)

Önmagában annak a betippelésére, hogy nem függetlenek, nem jár pont.

(1 pont) Nem függetlenek, mert... (valahogy megindokolja, és ha nem is feltétlenül jól, az indoklás legalább szintaktikailag értelmes, és hihető, hogy komolyan gondolta – kétes esetben a javító dönt)

(2 pont) K és V függetlenséghez az kellene, hogy $\mathbb{P}(K \cap V) = \mathbb{P}(K) \mathbb{P}(V)$ teljesüljön.

(0 pont) Korábban láttuk, hogy $\mathbb{P}(V) = 1/3$ és kiszámoltuk, hogy $\mathbb{P}(K) = 17/30$.

(2 pont) $\mathbb{P}(K \cap V) = \mathbb{P}(K|V) \mathbb{P}(V) = \frac{8}{30}$ (ha ez korábban már szerepelt, nem kell megismételni)

(0 pont) a szorzási szabály miatt. (Erre itt már külön nem adunk pontot, mert a közzétett régi zh-kban sem adtunk hasonló helyzetben.)

(1 pont) Ez azonban nem egyezik meg $\mathbb{P}(V) \mathbb{P}(K) = \frac{17}{90}$ -nel (, tehát tényleg nem függetlenek).

Ha valaki arra hivatkozik, hogy 10 busz van és arányokkal számol, akkor az összes TVT-re/Bayes-tételre és feltételeik ellenőrzésére járó pontot elveszti és még -2 pontot kap (feltéve, hogy a pontszáma a végén pozitív marad), de a többi pontot megkaphatja. Aki arra hivatkozik, hogy n busz van és arányokkal számol, ahol n valami egész szám, az -1 pontot kap (feltéve, hogy a pontszáma a végén pozitív marad), és az indoklásokra akkor kaphat pontot, ha megindokolja egyesével, hogy klasszikus a valószínűségi mező, vagy ha leír egy feltételes valószínűséget, akkor a szorzási szabályra hivatkozik ott, ahol a metszet valószínűsége valójában abból származik. Itt szigorúbbak vagyunk mint a zh-ban a kávék feladatnál, mert ott a feladatban tényleg arányok szerepeltek, itt azonban valószínűségek, és hangsúlyozzuk, hogy sok busz van.

3. Egy egyetemi kar tudományos diákköri konferenciájára 150 hallgató jelentkezett a jelentkezési határidőig.

- (a) A tapasztalatok szerint a jelentkezett hallgatók mindegyike 95% valószínűséggel ad be ténylegesen pályaművet a konferenciára, a többi hallgatótól függetlenül (és csak az adhat be pályaművet, aki jelentkezett). Mi a valószínűsége, hogy a jelentkezett 150 hallgató közül legfeljebb kettő lesz, aki nem ad be pályaművet?
- (b) Erről a konferenciáról a legsikeresebb hallgatók továbbjutnak az országos tudományos diákköri konferenciára, amelyen nagyon sok hallgató vesz részt, de csak egy nagyon kis részük nyer első díjat. Jelöljük az itt első díjban részesülők számát Y -nal. Tudjuk, hogy Y várható értéke 6 fő. Határozzuk meg Y szórásnégyzetét és a $\mathbb{P}(Y > 2)$ valószínűséget.

Megoldás.

(a) (7 pont)

(1 pont) A pályaművet be nem adó jelentkezők számát jelöljük X -szel, ez binomiális eloszlású

(1 pont) $n = 150$ és $p = 0,05$ valószínűséggel (több indoklás nem kell).

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \leq 2)$

(1 pont) $= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$

(2 pont) $= \left(\binom{150}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^{150} + \binom{150}{1} \cdot 0,05 \cdot 0,95^{149} + \binom{150}{2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^{148}\right)$ (a $\binom{150}{1}$ helyett 150 is jó természetesen)

(1 pont) $\approx 0,01815$ (ha valaki megadja közönséges tört alakban, az is jó, de mi erre itt nem vállalkozunk).

Megjegyzés: természetesen jó úgy is, hogy Y a beadott pályaművek száma, ami $B(150; 0,95)$ eloszlású $\mathbb{P}(Y \geq 148)$ -at keressük és $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = 150 - k)$ minden $k \in \{0, 1, \dots, 150\}$ -re.

(b) (13 pont)

(2 pont) Y Poisson-eloszlású (nem kell indokolni, mert a kontextusból kiderül, hogy azzal érdemes modellezni)

(1 pont) és $6 = \mathbb{E}(Y)$

(1 pont) $= \lambda$ az eloszlás paramétere.

(1 pont) Tehát $\mathbb{D}^2(Y) = \lambda$

(1 pont) $= 6$ (ha egyből azt mondja, hogy $\mathbb{D}^2(Y) = 6$, indoklás nélkül, akkor az utóbbi 2 pontból csak 1 jár).

(1 pont) $\mathbb{P}(Y > 2) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 2)$

(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2)$

(1+1+1 pont) $= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - (\lambda^2/2) \cdot e^{-\lambda}$

(2 pont) $(= 1 - (1 + 6 + 18)e^{-6}) \approx 0,9380$. (Ha itt egyből csak a numerikus érték szerepel és az kb. jó, akkor jár a 2 pont. Kisebb numerikus hiba esetén 1 pont jár, hibás végeredmény esetén indoklás nélkül 0 pont.)

Ha elfelejti a $\mathbb{P}(Y = 0)$ -t, akkor azért -1 pont és a kiszámolásának hiányáért is -1, de a többit el lehet fogadni.

4. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza.

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$

(a) Határozzuk meg az X és az Y valószínűségi változó peremeloszlását és várható értékét.

(b) Határozzuk meg $\mathbb{E}(XY)$ -t.

(c) Igaz-e, hogy

$$\mathbb{P}(Y = 1|X = 2) = \mathbb{P}(Y = 1|X = 1)?$$

És az igaz-e, hogy

$$\mathbb{P}(X = 2|Y = 2) = \mathbb{P}(X = 2|Y = 1)?$$

(d) Független-e X és Y ?

Minden választ indokoljunk! A részfeladatokat bármilyen sorrendben megoldhatjuk.

Megoldás.

(a) (7 pont)

(2 pont) X peremeloszlását a megfelelő oszlopösszegek adják: $\mathbb{P}(X = 0) = 1/4$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{16}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{9}{16}$, ez OK akár indoklás nélkül is, ha az eredmény jó.

(2 pont) Hasonlóan Y peremeloszlását a megfelelő oszlopösszegek adják, $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 2) = 1/4$, $\mathbb{P}(Y = 1) = 1/2$.

Ha odaírja, hogy hogy jönnek ki a peremeloszlások, de az eredmények nem jók, akkor max. 1–1 pont.

Ha nem indokol és egy adott peremeloszlásból csak 2 érték jó, akkor a 2-ből 1 pont. Ha max. 1 érték jó, akkor 0 pont.

Ha X és Y peremeloszlását felcseréli, akkor max. 2 pont.

(1 pont) arra, hogy a várható értékről **legalább az egyik val. változó esetében** valahogy leírja, hogy hogyan számolja ki, ott van a képlet általánosan vagy a konkrét számokkal (pl. $\mathbb{E}(X) = (0 \cdot \frac{1}{4}) + 1 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{9}{16}$ vagy hasonlóan $\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$).

(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{21}{16}$ (itt már csak a végeredményre jár a pont, tizedestört alakban is jó: 1,3125),

(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = 1$.

(b) (6 pont)

1. megoldás: XY eloszlásával számolva.

(1 pont) $\text{Ran}(XY) = \{0, 1, 2, 4\}$ (ha olyan halmazt ír, ami ezt a négy elemet tartalmazza és még esetleg néhány olyan elemet, amik előállnak a 0, 1, 2 számok közül kettő szorzataként, azt is el lehet fogadni). Elég, ha ez a későbbiekben impliciten derül ki.

(1 pont) $\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/8$,

(1 pont) $\mathbb{P}(XY = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 1/16 + 3/8 = 7/16$,

(1 pont) $\mathbb{P}(XY = 4) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 3/16$ (0 pont) $\mathbb{P}(XY = 0) = 1/4$.

(1 pont) Így $\mathbb{E}(XY) = 1 \cdot 1/8 + 2 \cdot 7/16 + 4 \cdot 3/16$

(1 pont) $= \frac{28}{16} = \frac{7}{4}$.

Ha $\mathbb{P}(XY = 0)$ jó, de semmi másra nem járna pont a (b)-ben, akkor erre lehet adni 1 pontot.

2. megoldás: eloszlástranzformáció-szerűen számolva.

(1 pont) Megadja az $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k=0}^2 \sum_{\ell=0}^2 k\ell \mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$ képletet vagy valami hasonló; a lehetetlen (k, ℓ) párokat persze nem kötelező belevenni. Elég, ha impliciten derül ki, hogy ezt a képletet használja (ha a következő konkrét képlet jó, akkor ez a pont is jár).

(3 pont) $\mathbb{E}(XY) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = Y = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + 4 \mathbb{P}(X =$

2, $Y = 2$) (a 0-s szorzatokat is oda lehet írni, de nem kötelező)

(1 pont) $= 1/8 + 2 \cdot 3/8 + 2 \cdot 1/16 + 4 \cdot 3/16$

(1 pont) $= \frac{7}{4}$. (A $\frac{7}{4}$ jó nem egyszerűsített alakban és tizedestört alakban is.)

(c) (5 pont)

Önmagában arra, hogy igazak az állítások, nem jár pont.

(1 pont) ha azt írja, hogy $\mathbb{P}(Y = 1|X = 2) = \mathbb{P}(Y = 1|X = 1)$, és van valami indoklás, ami ha nem is teljes, de helyes (pl. legalább megjelenik a feltételes valószínűség definíciója helyesen).

(1 pont) $\mathbb{P}(Y = 1|X = 2) = \frac{\mathbb{P}(Y=1, X=2)}{\mathbb{P}(X=2)}$ és $\mathbb{P}(Y = 1|X = 1) = \frac{\mathbb{P}(Y=1, X=1)}{\mathbb{P}(X=1)}$ (jó metszettel leírva is),

(1 pont) ahol $\frac{\mathbb{P}(Y=1, X=1)}{\mathbb{P}(X=1)} = \frac{1/8}{3/16} = \frac{2}{3}$ és $\frac{\mathbb{P}(Y=1, X=2)}{\mathbb{P}(X=2)} = \frac{3/8}{9/16} = \frac{2}{3}$, tehát tényleg egyenlőek.

(1 pont) ha $\mathbb{P}(X = 2|Y = 2) = \mathbb{P}(X = 2|Y = 1)$ -re is azt mondja, hogy igaz, és van valami (legalább részben) helyes indoklás rá, pl. hogy hasonlóan számol, mint az előző feladatban. Itt a feltételes valószínűség definícióját nem kell még egyszer leírni,

(1 pont) $\mathbb{P}(X = 2|Y = 2) = \frac{\mathbb{P}(X=2, Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)} = \frac{3/16}{1/4} = 3/4$ és $\mathbb{P}(X = 2|Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X=2, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{3/8}{1/2} = 3/4$, tehát tényleg egyenlőek.

Ha jó eseményekkel számol, de nem jók a részletszámítások, akkor lehet részpontot adni (a két különböző számolásra járó 2 pontból 1-et).

(d) (2 pont)

(2 pont) Nem függetlenek, mert például $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0)$. (Az utóbbi szorzat értékét nem kell kiszámolni.)

Vagy: nem függetlenek, mert a korábbi eredmények alapján $\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Indoklás nélkül a (d)-re nem jár pont (és rossz indoklással sem). Részpontot legfeljebb kisebb szintaktikai hibák esetén adunk.

5. Egy nógrádi kistelepülésen az utóbbi években néha medvét észlelnek, egyszerre mindig csak egy medve érkezik magányosan. Egy adott időpontban elkezdjük megfigyelni, hogy mikor érkezik a következő medve, nevezzük ezt a $t = 0$ időpontnak. Jelölje X az ettől az időponttól a következő medve észleléséig eltelt időt (évben mérve). A megfigyelések szerint X folytonos, örökifjú eloszlást követ, 5 év várható értékkel.

(a) Határozzuk meg X szórását.

(b) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét a $t = 1$ helyen és X eloszlásfüggvényét a $t = -1$ helyen. (Segít a nevezetes eloszlás táblázat.)

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy a $t = 0$ időponttól kezdve a következő medve észleléséig több, mint 8 évig kell várni, feltéve, hogy több, mint 6 évig kell rá várni?

Megoldás. (a) (6 pont)

(1 pont) X exponenciális eloszlású,

(1 pont) mert ha egy eloszlás folytonos és örökifjú, akkor csak exponenciális lehet (valami olyasmi is elég, hogy „folytonos és örökifjú $\Rightarrow$ exponenciális),

(0 pont) és a szóráshoz az eloszlás λ paraméterét kell meghatározni.

(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 5$,

(1 pont) tehát $\lambda = \frac{1}{5}$.

(1 pont) Így $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$ (helyes szórásnégyzet esetén elég, ha $\sqrt{25}$ -öt ír, de hibás szórásnégyzet esetén csak akkor jár részpont, ha odaírja a képletet általánosan is).

(1 pont) $= \frac{1}{\lambda} = 5$.

(b) (4 pont)

(1 pont) $f_X(1) = (1/5) \cdot e^{-1/5 \cdot 1}$ (a nevezetes eloszlás táblázat alapján, ezért nem kell indokolni – de ehhez a ponthoz még elég az is, ha általános λ -ra és t -re írja be a képletet)

(1 pont) $\approx 0,1637$.

(1 pont) $F_X(-1) = \mathbb{P}(X < -1)$

(1 pont) $= 0$ (mert $\text{Ran}(X) = \mathbb{R}^+$ benne van a táblázatban, tehát nem kell indokolni).

Az is jó, ha nem írja fel az $F_X(-1)$ jelentését, de odaírja, hogy az X értékkészletén kívül van a -1 .

Az is jó, ha azt írja, hogy $F_X(-1) = \int_{-\infty}^{-1} f_X(x) dx$, és megállapítja, hogy ez az integrál 0, mert a konstans 0 függvényt integrálja. Ha 0-nál kisebb vagy 1-nél nagyobb számot ír be numerikus végeredménynek, akkor az eloszlásfüggvényre semmiképpen nem jár részpont, még akkor sem, ha $\mathbb{P}(X < -1)$ szerepel!

(c) (10 pont)

(2 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X > 8 | X > 6)$,

(2+1 pont) ami $\mathbb{P}(X > 2)$ -vel egyenlő az örökifjúság miatt (nem kell az exponenciális eloszlásra hivatkozni, mert az örökifjúság a feladatban szerepelt, így ez járhat akkor is, ha nem jön rá, hogy exponenciális az eloszlás).

(1 pont) $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2)$ (nem baj, ha a középső lépés hiányzik, a folytonosságra majd a következő feladatban jár pont)

(1 pont) mert X folytonos [val. változó] (vagy: mert X eloszlásfüggvénye folytonos, vagy: mert X -nek van sűrűségfüggvénye).

(2 pont) $1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - F_X(2) = e^{-1/5.2}$ (nem kell, hogy itt megjelenjen az F_X kifejezés, de indoklasként legalább $e^{-\lambda x}$ szerepeljen általánosan vagy azonosíthatóan konkrét λ -ra és x -re)

(1 pont) $\approx 0,6703$.

6. * Egy X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} e^x, & \text{ha } x < a, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $a \in \mathbb{R}$ egy alkalmasan választott (nem feltétlenül pozitív) valós szám (és $e \approx 2,71 \dots$).

(a) Határozzuk meg a értékét.

(b) Jelölje F_X az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Mely $x \in \mathbb{R}$ pontokra igaz, hogy $f_X(x) = F_X(x)$?

(c) Határozzuk meg az $Y = e^X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét és várható értékét.

Megoldás.

(a) (6 pont)

(1 pont) Ahhoz, hogy f_X sűrűségfüggvény legyen, az kell, hogy nemnegatív legyen (ez itt nem probléma, mert e^x minden $x \in \mathbb{R}$ esetén pozitív, így ezt elég egyszer megemlíteni és nem kell többször ellenőrizni)

(1 pont) és az integrálja $-\infty$ -től ∞ -ig 1 legyen.

(1 pont) Tehát annak kell teljesülnie, hogy $1 = \int_{-\infty}^a e^x dx$

(1 pont) $[e^x]_{-\infty}^a$

(1 pont) $= e^a - 0 = e^a$ (a -0 hiányáért nem kell levonni pontot).

(1 pont) Tehát $a = 0$.

(b) (6 pont)

(1 pont) $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ (mert X folytonos val. változó – ezt nem muszáj odaírni).

(1 pont) Ha $x \leq 0$, akkor $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x e^t dt$ (ezért az 1 pontért elég a két integrálból az egyik)

(1 pont) $= [e^t]_{-\infty}^x = e^x$.

(1 pont) Tehát $f_X(x) = F_X(x)$ teljesül, ha $x < 0$,

(1 pont) és $F_X(x) \neq f_X(x)$, ha $x = 0$ (mert $f_X(0) = 0$ a feladat szerint – ezt nem kell odaírni. Az is jó, ha az $x = 0$ -t a következő esetről kezeli).

(1 pont) Ha $x > 0$, akkor $F_X(x) = 1$ (ez OK további indoklás nélkül is), tehát $F_X(x) \neq f_X(x)$. (Itt részpontot nem lehet szerezni.)

(0 pont) Így $f_X(x) = F_X(x)$ pontosan akkor teljesül, ha $x < 0$.

(c) (8 pont)

(1 pont) $\text{Ran}(Y) = (0, 1)$, ezért $F_Y(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F_Y(x) = 1$, ha $x \geq 1$ (az értékkészletet nem muszáj megemlíteni, de csak akkor jár az 1 pont, ha az $x \leq 0$ és az $x \geq 1$ eset is szerepel).

(1 pont) Ha $0 < x < 1$, akkor $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x) = \mathbb{P}(e^X < x)$ (a $\mathbb{P}(Y < x)$ elhagyható)

(1 pont) $\mathbb{P}(X < \ln x)$

(1 pont) az exponenciális függvény/logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt,

(1 pont) ami $F_X(\ln x) = e^{\ln x} = x$ (OK az F_X jelölés nélkül is).

(2 pont) Innen látjuk, hogy Y egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon. (További indoklás nem kell, mert benne van a nevezetes eloszlás táblázatban.)

(1 pont) Ezért $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$. (Ehhez sem kell indoklás, még ananyi sem, hogy ez $\frac{a+b}{2}$.)

Ha az $x = 0$ -t vagy az $x = 1$ -et a középső szakaszhoz sorolja és úgy kezeli, az sem probléma, sőt az sem, ha $x = 0$ -ra és $x = 1$ -re két (egyenlő) F_Y -értéket ad meg, hiszen F_Y folytonos függvény. De ha valamelyik pontban nem ad meg értéket, akkor (összesen) -1 pt.

Alternatív megoldások a várható érték kiszámítására:

- transzformált várható értékés képlettel: $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx = [e^{2x}/2]_{-\infty}^0 = \frac{1}{2}$. Ez jó az eloszlásfüggvény megadása nélkül is 3 pontért,
- vagy meghatározza Y sűrűségfüggvényét (ami $U(0; 1)$ sűrűv., a fenti F_Y deriváltja, illetve a 0-ban és 1-ben 0) és az alapján $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Y(x) dx = \int_0^1 x dx = \dots = \frac{1}{2}$. Ez tovább tart, mint a többi megoldás, de sajnos szintén csak 2 pontot ér összesen, amiből maximum 1 jár a sűrűségfüggvény meghatározására. Az is jó, ha a sűrűségfüggvény alapján jön rá, hogy $Y \sim U(0; 1)$, ha az eloszlásfüggvény alapján nem jött rá, és ezután olvassa ki a táblázatból a várható értéket/hivatkozik az ismert képletre.

Eloszlás neve	Jelölés	$\text{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X = k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$p, 1 - p$		p	$p(1 - p)$
binomiális	$B(n; p)$	$\{0, 1, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$		np	$np(1 - p)$
Poisson	$\text{Pois}(\lambda)$	$\{0, 1, \dots\}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\text{Geo}(p)$	$\{1, 2, \dots\}$	$(1 - p)^{k-1} p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$U(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\text{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Tudnivalók: A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. Hivatkozni csak az előadáson elhangzottakra lehet. A zárthelyi első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.