Pótló zárthelyi dolgozat

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Az A, B és C eseményekről tudjuk, hogy (együttesen) függetlenek és pozitív valószínűségűek, valamint $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(A \cap C) = 1/8$ és $\mathbb{P}(A|B) = 1/2$.

   (a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az A, B, C események közül legalább az egyik bekövetkezik.

   (b) Feltéve, hogy az A esemény bekövetkezett, mekkora a valószínűsége, hogy C is bekövetkezett, de ugyanakkor B nem?

   (c) Függetlenek-e a $B \cap C$ és az $A \cap C$ események?

   Tanács: Ha események függetlenségére hivatkozunk, akkor mindig adjuk meg lépésenként külön-külön, hogy éppen melyik eseményekére.

   Megoldás.

   (a) (12 pont)
   (0 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.
   (1 pont) A Poincaré-formula szerint
   (1 pont) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.
   (1 pont) Egyrészt $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$,
   (1 pont) mert A, B, C (együttesen) függetlenek,
   (1 pont) másrészt $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$,
   (1 pont) mert A és C függetlenek (vagy itt is szabad az együttes függetlenségre hivatkozni).
   (1 pont) Tehát $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(A \cap C)$ miatt $\mathbb{P}(B) = 1/2$. (Ha az előbbi lépéseket egy kicsit összevonja, az nem baj, de a teljes pontszámért mind a két szorzatra való bomlást meg kell indokolni.)
   (1 pont) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) = 1/2$,
   (1 pont) mert A és B függetlenek (és $\mathbb{P}(B) > 0$, de ha ezt nem írja oda, azért ne vonjunk le

pontot). (Ha felírja a feltételes valószínűség definícióját és utána használja a függetlenséget, természetesen az is jó, de arra is csak 1 pont jár).
(1 pont) Ezért $\mathbb{P}(C) = 1/2$ ($\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 1/8$ miatt – ha az már szerepelt, akkor rendben van további indoklás nélkül is).
(0 pont) Az együttes függetlenség miatt (vagy: külön-külön amiatt, hogy A és B, illetve B és C függetlenek; erre itt nem adunk külön pontot, mert összesen csak 20 pontot lehet adni, és ez a lépés ugyanaz, mint a fenti $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ indoklása)
(1 pont) $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) = (1/2 \cdot 1/2) = 1/4$.
(1 pont) Tehát (visszahelyettesítve a Poincaré-formulába) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 7/8$. (Itt, miután a képletre már adtunk pontot, az egyszerű részletszámításokra nem jár pont, csak a végeredményre.)

(b) (4 pont)
(1 pont) A keresett (feltételes) valószínűség $\mathbb{P}((C \setminus B)|A)$, avagy $\mathbb{P}((C \cap \overline{B})|A)$.
1. megoldás.
(1 pont) $\mathbb{P}((C \cap \overline{B})|A)$ megegyezik $\mathbb{P}(C \setminus B)$-vel,
(1 pont) azaz $\mathbb{P}(C \setminus B) = \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) = 1/2 - 1/4 = 1/4$,
(1 pont) mivel A, B, C együttesen függetlenek; avagy: mivel C, B és $C \cap B$ is független A-tól (és így $C \setminus B$ is); avagy: mivel $A, \overline{B}$ és C is együttesen függetlenek; avagy: mivel $C, \overline{B}$ és $C \cap \overline{B}$ is független A-tól (és így $C \setminus B$ is).
Ezért az 1 pontért nem várunk el külön indoklást arra, hogy A, B és C együttes függetlensége akkor is igaz marad, ha B-t $\overline{B}$-re cseréljük, azt viszont látni kell, hogy itt az együttes függetlenséget használjuk és nem elég páronkénti függetlenségekre hivatkozni.
Nem jó (és ez az 1 pont nem is jár rá) azt mondani, hogy azért, mert B és C is függetlenek A-tól; kell az is, hogy $B \cap C$ (és emiatt $C \setminus B$) is független A-tól. Hasonlóan az sem elég, hogy $\overline{B}$ és C függetlenek A-tól, az is kell, hogy $\overline{B} \cap C$ függetlenek A-tól.
2. megoldás.
(1 pont) $\mathbb{P}(C \setminus B|A) = \frac{\mathbb{P}((C \setminus B) \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$
(1 pont) $= \frac{\mathbb{P}(C \cap A) - \mathbb{P}(B \cap C \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$
(1 pont) $= \frac{1/4 - 1/8}{1/2} = 1/4$.

(c) (4 pont)
(1 pont) arra, hogy nem függetlenek, ha van valamilyen indoklás (akár rossz indoklás esetén is, de indoklás nélkül nem jár pont).
(1 pont) A függetlenség azt jelentené, hogy $\mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap C)\mathbb{P}(B \cap C)$. (Itt az is jó, ha egyből $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$-t ír $\mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C))$ helyett.)
(1 pont) $\mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/8$ (itt a pont akkor is jár, ha $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$-t korábban rosszul számolta ki, de az első lépés jó),
(1 pont) viszont $\mathbb{P}(A \cap C)\mathbb{P}(B \cap C) = 1/16$.

2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat adja meg.

Y \ X	3	5
0	$\frac{1}{2}$	a
1	b	$\frac{1}{4}$
2	0	c

   (a) Határozzuk meg a, b és c értékét, ha $\mathbb{P}(X = 3) = 7/12$ és $\mathbb{E}(Y) = 1/2$.
   (b) Független-e X és Y?

(c) Határozzuk meg $\mathbb{E}(XY)$-t.

Megoldás.

(a) (8 pont)
(1 pont) $\mathbb{P}(X = 3)$-at úgy kaphatjuk meg, hogy az $X = 3$-nak megfelelő oszlopban szereplő értékeket összegezzük, így
(1 pont) $b = 7/12 - 1/2 = 1/12$. (Az előző 1 pont is jár, ha ez így le van írva. Ha csak azt írja le, hogy $b = 1/12$, arra max. 1 pont.)
(1 pont) $1/2 = \mathbb{E}(Y) = (0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0)) + 1 \cdot \mathbb{P}(Y = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(Y = 2)$
(1 pont) $= 1/12 + 1/4 + 2c$,
(1 pont) és ezért $c = 1/12$.
(Ha a várható érték általános képletét írja fel és utána egyből behelyettesít az $\mathbb{P}(Y = k)$ értékekbe, az is jó. De ha csak a várható érték általános képlete szerepel, azért nem jár pont. A számolás utolsó két sora rövidíthető, de arra max. 1 pontot adjunk, ha az első sor után egyből a végeredmény jön.)
(1 pont) Végül a táblázatban szereplő számok összegének 1-nek kell lennie (elég, ha ez impliciten kiderül a megoldásból),
(1 pont) ezért a megegyezik 1 mínusz a táblázatban lévő összes többi szám összegével (ahol most már $b = 1/12$-rt és $c = 1/12$-et is behelyettesítjük).
(Elég, ha ez impliciten derül ki a megoldásból, de ha az előző is csak impliciten derült ki, akkor a két lépésre együtt csak 1 pont jár.) (1 pont) tehát $a = 1/12$ (ez elfogadható további részletes számolás nélkül is).

(b) (6 pont)
Önmagában annak a kijelentésére, hogy nem függetlenek, nem jár pont.
(1 pont) Nem függetlenek, mert... (valahogy megindokolja; ez az 1 pont akkor is jár, ha amúgy az indoklás rossz)
(2 pont) Ahhoz, hogy függetlenek legyenek, az kellene, hogy $\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = l)$ minden $k \in \{3, 5\}$ (vagy: minden $k \in \mathrm{Ran}(X)$) és $l \in \{0, 1, 2\}$ (vagy: minden $l \in \mathrm{Ran}(Y)$) esetén teljesüljön. Ez a két pont akkor is jár, ha a következő lépésből impliciten kiderül, hogy tudja, hogy mi a függetlenség és az adott konkrét esetben igyekszik megcáfolni, hogy teljesül.
(3 pont) Viszont ez nem teljesül, mert például... (választ egy megfelelő (k, l) párt, és és leírja, hogy mennyi $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$ [a táblázat alapján, a) végeredményét felhasználva] – 1 pont, illetve leírja, hogy mennyi $\mathbb{P}(X = k)$ és $\mathbb{P}(Y = l)$ [itt nagyon hosszan nem kell indokolni, de valahogy derüljön ki, hogy oszlop- illetve sorösszegzésről van szó] – 1+1 pont.
Ha a peremeloszlások megfelelő értékeinél csak végeredményt közöl, akkor az utóbbi 1+1 pontból csak 1 jár. Itt egy esetben lehetünk engedékenyebbek: ha a táblázatban szereplő 0-s elemet választja és csak annyit ír, hogy $\mathbb{P}(X = k)$, $\mathbb{P}(Y = l) \neq 0$, amit elhihetünk anélkül is, hogy kiszámolná ezeket a peremvalószínűségeket.)

(c) (6 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k \in \mathrm{Ran}(XY)} \mathbb{P}(XY = k)$. (Ha később kiderül, hogy ezzel a képlettel dolgozik, jár ez az 1 pont is.)
(2 pont) $\mathrm{Ran}(XY) = \{0, 3, 5, 10\}$ meghatározására: itt elég a lehetséges értékeket felsorolni, de részben hibás megoldás esetén csak akkor jár részpontszám, ha van indoklás. Az nem baj, ha a 6-ot is beleveszi az értékkészletbe, ha utána kiderül, hogy $\mathbb{P}(XY = 6) = 0$. Indoklás pl.: ha $Y = 0$, akkor XY mindenképpen 0, ha $Y = 1$, akkor $XY = 3$, ha $X = 3$, és $XY = 5$, ha

$XY = 5$, végül ha $Y = 2$, akkor ($XY = 3$, ha $X = 6$ és) $XY = 10$, ha $XY = 10$.
(Ha ez kiderül, akkor a következő lépés átugorható, illetve ha megvan a következő lépés, az itt is indoklásnak számít.)
(1 pont) Tehát (az a)-beli eredményeket is felhasználva) $\mathbb{E}(XY) = (0\mathbb{P}(X = 3, Y = 0) + 0\mathbb{P}(X = 5, Y = 0)) + 3\mathbb{P}(X = 3, Y = 1) + 5\mathbb{P}(X = 5, Y = 1)(+6\mathbb{P}(X = 3, Y = 2)) + 10\mathbb{P}(X = 5, Y = 2)$
(1 pont) $= (\frac{7}{12} \cdot 0) + \frac{1}{12} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 5(+0 \cdot 6) + \frac{1}{12} \cdot 10$
(1 pont) $= 7/3 (= 2,\dot{3} = 28/12)$ (tizedes és közönséges tört alakban is jó, kerekítve is).

Megjegyzés: Természetesen úgy is jó, hogy $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k \in \mathrm{Ran}(X)} \sum_{l \in \mathrm{Ran}(Y)} kl\mathbb{P}(X = k, Y = l)$. Ebben az esetben XY értékkészletét nem szükséges meghatározni, ha X és Y értékkészlete (legalább impliciten) helyesen szerepel.

3. Egy könyvtárban minden könyvet minden hónapban legfeljebb egy ember kölcsönöz ki, legfeljebb egyszer és csak arra a hónapra. A könyvtárba egyre több könyvet hoznak, de a látogatók száma nem növekszik, ezért ahogy telik az idő, egy-egy könyvet egyre kisebb valószínűséggel vesz ki valaki egy adott hónapban. A megfigyelés kezdetétől számított k-adik hónapban (ahol $k \geq 1$ egy egész szám) $3k$ könyv van a könyvtárban, és mindegyiket egymástól függetlenül $1/k$ valószínűséggel veszi ki valaki.

   (a) Határozzuk meg (pontosan) annak a valószínűségét, hogy a 68. hónapban legalább 3 könyvet vesznek ki a könyvtárból, és adjuk meg a 68. hónap során kivett könyvek számának szórását.

   (b) Közelítsük nagy k esetén annak a valószínűségét alkalmas approximációval, hogy a k-adik hónapban legalább 3 könyvet vesznek ki.

Megoldás.

(a) (10 pont)
(0 pont) Jelölje X a 68. hónapban kivett könyvek számát (1 pont) Észreveszi, hogy X eloszlása binomiális,
(1 pont) $n(= 3k = 3 \cdot 68) = 204$ és $p(= 1/k) = 1/68$ paraméterekkel (ha annyit ír, hogy $X \sim \mathrm{B}(204; 1/68)$, az elég).
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \geq 3)$
(1+1 pont) $= (1 - \mathbb{P}(X < 3)) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2)$ (ha a későbbi számolásból ez impliciten kiderül, az is elég – 1 pont a komplementer valószínűségre, 1 pont a helyes kivonandó értékekre)
(1+1+1 pont) $= 1 - \binom{204}{0}(1 - 1/68)^{204} - \binom{204}{1}(1/68)^1(1 - 1/68)^{203} - \binom{204}{2}(1/68)^2(1 - 1/68)^{202}$.
(Természetesen szabad a $\binom{204}{0}$-s szorzót elhagyni és a $\binom{204}{1}$ helyett 204-t írni, a $\binom{204}{2}$ helyett pedig $204 \cdot 203/2$-t.)
(1 pont) $= 0,5785$.
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X)(= np(1 - p)) = 204 \cdot \frac{1}{68} \cdot \frac{67}{68} = \frac{201}{68} (\approx 2{,}9559)$,
(1 pont) tehát $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} \approx 1{,}7193$. (Összevonható egy formulába az előzővel.)

(b) (10 pont)
(1 pont) arra az ötletre, hogy Poisson-approximációról (a binomiális eloszlás Poisson-approximációjáról) van szó, még ha nem is jól csinálja a továbbiakban.
(1 pont) Itt n-nek $3k$ felel meg
(1 pont) és p_n-nek $1/k$, (ha a következő lépés jó, akkor erre a kettőre is jár pont)
(1 pont) tehát $\lambda = \lim_{k \to \infty} 3k \cdot \frac{1}{k}$ (1 pont) $= 3$.
(0 pont) A keresett (approximálandó) valószínűség ismét $\mathbb{P}(X \geq 3)$,

(1 pont) amit $\mathbb{P}(Y \geq 3)$-mal közelítünk, ahol $Y \sim \text{Pois}(3)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(Y \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(Y < 3)$
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2)$ (az előző lépéssel összevonható)
(2 pont) $= 1 - \mathrm{e}^{-3}(1 + 3 + \frac{3^2}{2})$ (még ez is összevonható az előző lépéssel, ha jól azonosíthatóan külön kezeli az Y három releváns értékét)
(1 pont) $= 0{,}5768$.

4. Buszra várunk, a busz érkezési ideje folytonos, örökifjú eloszlást követ. Feltéve, hogy már öt percig várakoztunk, kétszer annyi annak a valószínűsége, hogy még ezután is legalább öt percig kell várnunk, mint azé, hogy ennek az ellenkezője következik be.

   (a) Várhatóan hány perc múlva érkezik meg a busz?

   (b) Egy adott naptól kezdve mindennap várunk a buszra, a fenti feltételek mindennap teljesülnek, a várakozási idők pedig a különböző napokon egymástól függetlenek. Várhatóan hányadik napon kell először legalább fél órát várakoznunk?

Megoldás.

(a) (13 pont)
(0 pont) Jelölje X a buszra való várakozás időtartamát (percben mérve), ekkor $\mathbb{E}(X)$-et keressük.
(1 pont) arra, hogy ha X folytonos és örökifjú, akkor exponenciális eloszlású (és az eloszlás $\lambda > 0$ paraméterét kellene meghatározni).
(2 pont) A feladat szerint $\mathbb{P}(X \geq 10 | X \geq 5) = 2\mathbb{P}(X < 10 | X \geq 5)$. (Ha azt írja, hogy $\mathbb{P}(X \geq 10 | X > 5) = 2\mathbb{P}(X < 10 | X > 5)$, az ugyanolyan jó, a feladatból bármelyik következhet, de az eloszlás folytonossága miatt mindegy is.)
(2 pont) Az örökifjúság miatt $\mathbb{P}(X \geq 10 | X \geq 5) = \mathbb{P}(X \geq 5)$,
(1 pont) ami a folytonosság miatt megegyezik $\mathbb{P}(X > 5)$-tel (elég, ha ez a későbbi számításokból impliciten kiderül).
(2 pont) Így $\mathbb{P}(X < 10 | X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X \geq 10 | X \geq 5) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \geq 10 | X \geq 5)$ (az első lépés azért igaz, mert $A \mapsto \mathbb{P}(A | X \geq 5)$ egy valószínűségi mérték $\mathcal{F}$-en, de nem várjuk el, hogy ezt odaírják, csak azt, hogy jól használják, így további indoklás nem szükséges).
(1 pont) Tehát $\mathbb{P}(X > 5) = 2/3$,
(1 pont) vagyis $\mathrm{e}^{-5\lambda} = 2/3$,
(1+1 pont) tehát $\lambda = \frac{1}{5}\ln(3/2)$ (avagy $\lambda = -\frac{1}{5}\ln(2/3)$). (1 pont a helyes végeredményre, 1 arra, hogy valahogy átalakítja – elég egy közbülső lépés, nem kell részletesen, nem kell kiírni, hogy az exp./log. függvény szigorú monotonitását használjuk.)
(1 pont) Ebből következik, hogy $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda = 5/\ln(3/2) \approx 12{,}33$ perc a keresett várakozási idő.

(b) (7 pont)
(2 pont) Jelölje Y azon nap sorszámát, amikor először kell legalább fél órát várakoznunk. Ekkor Y geometriai eloszlású,
(1 pont) az eloszlás paramétere pedig $p = \mathbb{P}(X \geq 30)$
(1 pont) $= \mathrm{e}^{-30\lambda}$. (Ha $\mathbb{P}(X \geq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ vagy $\mathbb{P}(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ az a) megoldásában már szerepel, akkor ezt a pontot meg lehet adni.)
(1 pont) $= 64/729 = 0{,}0878$ (jó tizedes és bármilyen közönséges tört alakban is, az eloszlásfüggvény folytonosságára nem jár még egyszer pont.).
(1 pont) Ezért $\mathbb{E}(Y) = 1/p$
(1 pont) $= 729/64 = 11{,}390625$.

5. Egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 < x < 1/2, \\ \frac{1}{4}, & \text{ha } 1/2 \leq x \leq 2, \\ \frac{(x-1)^2}{4}, & \text{ha } 2 < x < 3, \\ 1, & \text{ha } x \geq 3. \end{cases}$$

(a) Igazoljuk, hogy X folytonos valószínűségi változó.

(b) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét.

(c) Határozzuk meg X várható értékét.

Megoldás.

(a) (6 pont)
1. (legcélszerűbb) megoldás:
(2 pont) Az előadáson tanult tétel szerint ha F_X folytonos és véges sok pont kivételével differenciálható, akkor X folytonos val. változó. (Ebből nem lehet részpontszámot adni, a részben helyes megoldásokról lejjebb lesz szó.)
(1 pont) arra, hogy megindokolja, hogy a szakaszhatárokat kivéve (vagy: konkrétan kifejezett nyílt intervallumokban) az eloszlásfüggvény folytonos, pl. mert folytonos függvények kompozíciója, vagy mert (szakaszonként) polinom stb. Ha csak a konstans szakaszokon való folytonosságot nem indokolja, azért nem vonunk le pontot.
(1+1 pont) összesen arra, hogy a folytonosság a szakaszhatárokon is teljesül, ugyanis $\lim_{x\to 1/2} x/2 = \lim_{x\to 2}(x-1)^2/4 = 1/4$ és $\lim_{x\to 0} x/2 = 0$, $\lim_{x\to 3}(x-1)^2/4 = 1$: 1 pont összesen a belső konstans szakasz határára és 1 pont összesen a külső határokra. (Ha nem szerepel az összes ilyen részletesen leírva, de látszik, hogy elgondolkodott rajta, hogy a folytonosságnak minden szakaszhatáron teljesülnie kell és a középső konstans szakasz mindkét végpontjában 1/4-nek kell lennie, akkor az is elég. Az se baj, ha nem határértékekkel írja, hanem a függvényértékeket behelyettesíti a szakaszhatár pontokba.)
(1 pont) arra, hogy a szakaszhatárok kivételével az eloszlásfüggvény mindenhol differenciálható (mert differenciálható függvények kompozíciója, vagy odaírja, hogy mi a derivált, lásd b) rész – azért megint ne vonjuk le az 1 pontot, ha csak a konstans szakaszokat felejti ki).

2. megoldás:
(2 pont) Egy valószínűségi változó (definíció szerint) pontosan akkor folytonos, ha létezik olyan f_X (sűrűség)függvény, amelyre $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$, minden $x \in \mathbb{R}$-re.
(1 pont) arra az ötletre, hogy ennek az f_X-nek az eloszlásfüggvény deriváltjának kell lennie a szakaszhatárokon kívül.
Sajnos innentől kezdve ez a megoldás bonyolultabb, mint az előző, mert azt is ellenőrizni kell, hogy ha a kapott f_X-et $-\infty$-től x-ig visszaintegráljuk, akkor tényleg $F_X(x)$-et kapjuk, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
(1 pont) összesen a derivált meghatározására, legalább a nemkonstans szakaszokon.
(2 pont) arra, hogy ellenőrzi (szakaszonként, és itt a konstans szakaszok kifelejtése esetén is vonjunk le legalább egy pontot), hogy $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. A számításokat itt nem részletezzük, mert ez nem a legjobb megoldás, lentebb a (b) megoldásánál szerepel a sűrűségfüggvény, azt kell integrálni $-\infty$-től x-ig.
Megjegyzés: Ha a deriváltat nem számolja ki, de részletesen indokolja, hogy F_X miért differenciálható véges sok pont kivételével minden pontban (viszont hiányzik az előadásbeli tétel és/vagy F_X folytonosságát nem vizsgálja meg), akkor max. 4 pont: a derivált meghatározása helyett a differenciálhatóság indoklására adhatunk itt egy pontot.

(b) (5 pont) – ha az eloszlásfüggvényt már korábban deriválta, az ott kiszámítottakat vegyük itt is (további pontokért) figyelembe.
(1 pont) A sűrűségfüggvény megkapható úgy, hogy az eloszlásfüggvényt deriváljuk, ahol pedig nem differenciálható, oda 0-t írunk. (Ha ez impliciten vagy csak az a) megoldásából derül csak ki, az is rendben van. A 0 helyett természetesen írhatunk mást, a következőkben megadott képletektől csak a szakaszhatárokon eltérő képleteket is elfogadjuk.)
(2 pont) Így tehát $f_X(x) = 0$, ha $x \leq 0$, $1/2 \leq x \leq 2$ vagy $x \geq 3$ (ebből 1 pont jár a két szélső és 1 pont a középső konstans szakaszra).
(1 pont) Ezenkívül $f_X(x) = \frac{1}{2}$, ha $0 < x < 1/2$
(1 pont) és $f_X(x) = \frac{x-1}{2}$, ha $2 < x < 3$.

(c) (9 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$
(2 pont) $= \int_0^{1/2} \frac{x}{2}\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{x(x-1)}{2}\mathrm{d}x$. (Ha ez helyes, akkor az előző lépésre is meg lehet adni az 1 pontot.)
(1 pont) $\int_0^{1/2} \frac{x}{2}\mathrm{d}x = [\frac{x^2}{4}]_0^{1/2}$
(1 pont) $(= 1/16 - 0) = 1/16 (= 0{,}0625)$.
(2 pont) $\int_2^3 \frac{x(x-1)}{2}\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{x^2-x}{2}\mathrm{d}x = [\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2]_2^3$ (részpontszám adható)
(1 pont) $(= \frac{9}{2} - \frac{9}{4} - \frac{4}{3} + 1) = \frac{23}{12} (= 1{,}9167)$.
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(X) (= 1/16 + 23/12) = 95/48 (= 1{,}9792)$.

6. * Az $(1/2, 0)$ és $(1, 0)$ pontok közötti szakaszon találomra választunk egy A pontot, egy B pontot pedig ettől függetlenül, szintén egyenletes eloszlással az origó és a $(0, 1)$ pont közötti szakaszon. Jelölje X az ABO szög tangensét. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

Megoldás.
(0 pont) Jelöljük a-val az A pont origótól való távolságát (vagyis az A pont x koordinátáját) és b-vel a B pont origótól való távolságát (vagyis a B pont y koordinátáját).
(1 pont) Az ABO szögnek, amit itt a mintamegoldásban az egyszerűség kedvéért α-val fogunk jelölni, a tangense $X = a/b$.
(1 pont) Mivel $a \in (1/2, 1)$ és $b \in (0, 1)$, $\mathrm{Ran}(X) = (1/2, \infty)$ (elég, ha ez később implicit módon kiderül).
(1 pont) Ezért $F_X(t) = \mathbb{P}(X < t)$, (ez elég, ha implicit módon kiderül valamikor a megoldás során)
(1 pont) ami 0-val egyenlő, ha $t \leq 1/2$. (Ezt ki lehet hozni később a geometriai valószínűségi mezős számításokból is.)
(2 pont) Ha $t > 1/2$, akkor $F_X(t) = \mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}(a/b < t) = \mathbb{P}(b > a/t)$.
(1 pont) A véletlen kísérlet megfelel egy véletlen (a, b) pont választásának (kétdimenziós egyenletes eloszlással) az $(1/2, 1) \times (0, 1)$ (nyílt) téglalapon. (Elég, ha ez később implicit módon derül ki; ugyanez vonatkozik a következő négy részre is, itt a pontozás elve nagyon hasonló a zh 1. feladatáéhoz.
Azért ide írom ezt a megoldásban és nem az F_X kiszámításának kezdete elé, hogy hangsúlyozzam, hogy a fenti pontokat akkor is meg lehet kapni, ha nincs meg a megfelelő valószínűségi mező.)
(1 pont) Ez a téglalap az Ω eseménytér.
(2 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség $= \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_\Omega}$.
(1 pont) $T_\Omega = 1/2$.
(1 pont) A kedvező terület az Ω téglalapnak a $b = a/t$ egyenes fölé eső része.
($t \leq 1/2$ esetén az egyenes az Ω nyílt téglalapot nem metszi – ezt akkor kell odaírni, ha korábban nem számolta ki, hogy $F_X(t) = 0$, ha $t \leq 1/2$, erre 1 pont jár.)

(2 pont) $1/2 < t < 1$ (vagy $1/2 < t \leq 1$) esetén az egyenes a téglalapot a bal oldalán, az $(1/2, 1/(2t))$ pontban és a felső oldalán, a $(t, 1)$ pontban, míg $t > 1$ (vagy $t \geq 1$) esetén a bal oldalán, szintén az $(1/2, 1/(2t))$ pontban és a jobb oldalán, az $(1, 1/t)$ pontban metszi. ($t = 1$ esetén a két esetre vonatkozó nem bal oldali metszéspontok így egybeesnek és $(1, 1)$-gyel egyeznek meg, de ezt nem kell hangsúlyozni.)
(Ha nincsenek meg a metszéspontok, de az megvan, hogy van egy esetszétválasztás a metszett oldalak szerint $1/2 < t < 1$ és $t > 1$ között, arra jár 1 pont. Ha a későbbi számításokból vagy ábrákból a metszéspontok/releváns metszett oldalhosszak is kiderülnek, akkor meg lehet adni a másik pontot is.)
(2 pont) Jó ábra (és megfelelő jelmagyarázat esetén erre is meg lehet adni az előző 2 pontot a szöveges magyarázat helyett, az ott leírt részpontszám-szabály alapján. Ha a metszéspontok/releváns szakaszhosszak nincsenek odaírva az ábrába, de máshonnan kiderülnek, az nem baj. Sőt ha nincs ábra, de szövegesen minden le van írva, ami az ábrából derülhetne ki, az is OK.).
(1 pont) Innen $1/2 \leq t < 1$ esetén $(F_X(t) =)\mathbb{P}(b > a/t) = 2((1 - 1/2t) \cdot (t - 1/2) \cdot 1/2)$
(1 pont) $= t - 1 + \frac{1}{4t}$.
(1 pont) Továbbá $t \geq 1$ esetén $(F_X(t) =)\mathbb{P}(b > a/t) = 2 \cdot ((1 - 1/t) \cdot 1/2 + (1/t - 1/(2t)) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})$.
(Máshogy is ki lehet számolni a kedvező trapéz területét.)
(1 pont) $= 1 - \frac{3}{4t}$.

Eloszlás neve	Jelölés	Ran(X)	$\mathbb{P}(X = k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$p,\ 1 - p$		p	$p(1 - p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n; p)$	$\{0, 1, ..., n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$		np	$np(1 - p)$
Poisson	Pois(λ)	$\{0, 1, ...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	Geo(p)	$\{1, 2, ...\}$	$(1 - p)^{k-1} p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	Exp(λ)	$\mathbb{R}^+$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$