1. Prüfung

Allgemeine Regeln: Die Prüfung dauert 100 Minuten. Die Benutzung eines (nicht graphischen) Taschenrechners ist erlaubt. Numerische Ergebnisse müssen auf 4 Dezimalstellen gerundet werden. Zum Erreichen der maximalen Punktzahl ist es notwendig, detaillierte Lösungen zu geben und die angewandten Behauptungen, Sätze und Eigenschaften aufzulisten. Ohne Beweis dürfen nur solche Behauptungen verwendet werden, die in der Vorlesung dieses oder eines früher studierten Kurses diskutiert wurden. Es ist verboten, während der ersten 30 Minuten den Raum zu verlassen.

1. Beantworten wir die folgenden Fragen aufgrund der in der Vorlesung angegebenen Behauptungen und Definitionen.

   (a) Sei X eine Zufallsvariable und $t \in \mathbb{R}$. Wie wurde der Wert der Verteilungsfunktion von X an der Stelle t definiert? (Nur die definierende Formel ist gefragt, es ist nicht nötig, die Bedeutung der in der Definition auftretenden Ausdrücke anzugeben.)

   (b) Sei $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Funktion. Welche Eigenschaften muss F haben, damit eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F existiert?

2. Es gibt vier Kugeln Eis übrig vor Schließung in einer Konditorei. Zwei Teenager, Stephan und Thomas, kommen unabhängig voneinander, beide mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ in die Konditorei, bevor sie schließt. Falls nur einer von ihnen dorthin geht, kauft er 3 Kugeln Eis. Falls beide dorthin gehen, dann teilen sie sich brüderlich und kaufen zwei-zwei Kugeln Eis. (Wer nicht dorthin geht, kauft natürlich kein Eis.) Bezeichnen wir mit S (bzw. T) die Anzahl der Kugeln, die Stephan (bzw. Thomas) kauft.

   (a) Bestimmen wir die gemeinsame Verteilung von S und T. Geben wir das Ergebnis möglichst in einer Tabelle an (es ist aber auch genügend, die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(S = k, T = l)$ nur für solche Zahlen k und l anzugeben, für die diese Werte positiv sind).
   (Die Lösung von Teil (a) muss ausnahmsweise nicht begründet werden.)

   (b) Bestimmen wir die Randverteilungen von S und T.

   (c) Bestimmen wir die Kovarianz und den Korrelationskoeffizient von S und T.

   (d) Sind S und T unabhängig?

3. Es gibt 50 Klassenräume (nummeriert von 1 bis 50) in einer Schule, die viele digitale Hilfsmittel besitzt. In einem bestimmten Zeitpunkt überprüfen wir, wie viele HDMI-Kabel sich in jedem Raum befinden. Sei X_i die Anzahl der HDMI-Kabel im Raum i, und nehmen wir an, dass die Variablen $X_1, \ldots, X_{50}$ gemeinsam unabhängig und Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 2$ sind.

   (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es gerade zwei HDMI-Kabel in diesem Zeitpunkt im Raum 1 gibt?

   (b) Sei Y die Anzahl der Räume, in denen es gerade zwei HDMI-Kabel im bestimmten Zeitpunkt gibt. Geben wir den Erwartungswert und die Standardabweichung von Y an. (Begründen wir die Antwort!)

   (c) Schätzen wir durch eine geeignete Approximation die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y \geq 13)$. (Die Bestimmung des genauen Wertes der Wahrscheinlichkeit ist im Teil (c) nicht nötig, benutzen wir die Tabelle der Standardnormalverteilung zur Approximation.)

4. Seien $X \sim \mathrm{Geo}(1/3)$ und $Y \sim \mathrm{Exp}(4)$ unabhängige Zufallsvariablen. Geben wir die Regression $\mathbb{E}(\cos(X)Y + XY^2 - 6X^2 + 5|X)$ an.

Die folgenden Aufgaben befinden sich auf der anderen Seite.

5. Sei $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ eine (einfache) Stichprobe vom Umfang $n \in \mathbb{N}^+$, wo die Wahrscheinlichkeitsfunktion der diskreten Variablen X_i an der Stelle $k \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ für einen unbekannten Parameter $\vartheta \in (0; 1)$ durch $f_\vartheta(k) = \mathbb{P}_\vartheta(X_i = k) = (k-1)\vartheta^2(1-\vartheta)^{k-2}$ angegeben ist.

   (a) Bestimmen wir die Likelihood-Funktion $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n)$ für jede Realisierung $(x_1, \ldots, x_n)$ der Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$.

   (b) Geben wir die Maximum-Likelikhood-Schätzung (aufgrund der Stichprobe) für ϑ an.

   Um die maximale Punktzahl zu erhalten, muss nicht geprüft werden, ob an der Grenze des Parameterbereichs eine Maximalstelle liegen kann.

*6. Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X is

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ \dfrac{t^2}{4}, & \text{falls } 0 \le t < 2, \\ 1, & \text{falls } t \ge 2, \end{cases}$$

und falls der Wert von X bekannt ist, dann ist die Variable Y uniformverteilt auf dem Intervall $(0; 2/X)$. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y \le 1)$.

Verteilung	Notation	ran$X$	$F_X(t)$	$f_X(k)$, $f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0,1\}$		$1-p$, p	p	$p(1-p)$
Binomialverteilung	$\mathrm{Bin}(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$		$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson-Verteilung	$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$\mathbb{N}$		$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
geometrische Verteilung	$\mathrm{Geo}(p)$	$\mathbb{N}^+$		$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
uniforme Verteilung	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentialverteilung	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0;\infty)$	$1-e^{-\lambda t}$ $(0 \le t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normalverteilung	$\mathrm{N}(\mu;\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
n-dim. Normalverteilung	$\mathrm{N}(\underline{\mu};\Sigma)$	$\mathbb{R}^n$	$f_{\underline{X}}(\underline{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det\Sigma}}e^{-\frac{1}{2}(\underline{t}-\underline{\mu})^T\Sigma^{-1}(\underline{t}-\underline{\mu})}$		$\underline{\mu}$	Σ

Standardnormalverteilungstabelle

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998