Díjköteles pótló zárthelyi dolgozat

1. Az $(1;4)$ intervallumon találomra (egyenletes eloszlással) választunk egy számot, majd a $(2;6)$ intervallumon szintén találomra választunk egy másik számot (a választott számok értéke tehát tetszőleges valós szám lehet a megadott intervallumokon). Mennyi a valószínűsége, hogy a másodikként választott szám értéke 5-nél kisebb lesz, de ugyanakkor az elsőként választott szám értékénél nagyobb?

   Megoldás.
   (2 pont) A véletlen kísérlet megfelel egy (x, y) pont választásának az $= (1;4) \times (2;6)$ (azaz az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < x < 4, 2 < y < 6\}$) négyzeten. (Ha nyílt helyett zárt vagy félig zárt intervallumokkal dolgozik, az nem baj.)
   (1 pont) Ez az Ω eseménytér.
   (3 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség a kedvező terület és az összes terület (Ω területe) aránya.
   (Elég, ha a területarányokra hivatkozik helyesen, nem kell kimondani, hogy geometriai. Viszont ha csak annyit mond, hogy geometriai, az önmagában a 3 pontból csak 1, és a másik kettőt akkor lehet megadni, ha impliciten kiderül, hogy jó képlettel számol.)
   (2 pont) $T_\Omega = 3 \cdot 4 = 12$. (Legalább ennyi indoklás legyen, különben max. 1 pont.)
   (2 pont) A kedvező terület Ω-nak az $y = x$ egyenletű egyenes fölött, de az $y = 5$ egyenletű konstans egyenes alatt elhelyezkedő része [mert itt lesz igaz, hogy a második pont, y nagyobb az elsőnél, x-nél, de 5-nél kisebb. A határokkal itt nem kell foglalkozni, de egyébként az $y = x$ egyenes és az $y = 5$ egyenes Ω-beli szakasza nincs benne.
   (5 pont) Jó ábra (a jóság részei: 1 pont arra, hogy az első pontot az x-tengelyen, a másodikat az y-tengelyen ábrázoljuk; 1 pont arra, hogy Ω jó, 1 pont arra, hogy a kedvező terület felső határa jó, 1 pont arra, hogy $x = 2$ és $x = 4$ között az alsó határ az $y = x$ egyenes, és 1 pont arra, hogy $x = 1$ és $x = 2$ között az alsó határ Ω alsó határa [vagyis az $y = 2$ egyenes].
   Ha felcseréli a kedvező területet a kedvezőtlennel, legalább 1 pont levonás, de lehet részpontot adni.
   (4 pont) Kiszámolja indoklással a kedvező területet. Pl.: a kedvezőtlen terület Ω területén belül egy $3 \cdot 1$ területű téglalapból (1 pont) és egy $2 \cdot 2/2 = 2$ területű derékszögű (egyenlőszárú) háromszögből (2 pont) áll, tehát a kedvező terület T_Ω mínusz a kedvezőtlen terület, vagyis 7. Természetesen máshogy is részekre lehet bontani Ω-t, pl. úgy is jó, hogy az $(1;4) \times (2;5)$ területéből vonjuk ki a kedvezőtlen háromszög területét.
   (1 pont) Így tehát a keresett valószínűség $\frac{7}{12} (= 0{,}5833)$ (bármilyen alakban jó, törtként is).

2. Egy 52 lapos franciakártya-pakliból kihúzunk egy lapot. Tekintsük a következő eseményeket: $A := \{$a húzott lap nem ász és nem pikk$\}$, a $B := \{$ászt húztunk$\}$ és a $C := \{$pikket húztunk$\}$.

   (a) Függetlenek-e a B és C események?

   (b) Mi a valószínűsége, hogy a húzott lapra a következő három tulajdonságból legalább egy teljesül: ász, hetes, pikk színű?

   (c) Mi a valószínűsége, hogy a húzott lap ász, feltéve, hogy nem a pikk hetest húztuk?

   (d) Teljes eseményrendszert alkotnak-e az A, B és C események?

   (A franciakártya-pakli 52 lapjából a 4 szín közül mindegyikhez – köztük a pikkhez is – 13 lap tartozik, és minden színből egy ász és egy hetes van.)

   Megoldás.
   (a) (8 pont; ebből a 2. és a 3. pont megkapható akkor is, ha az (a) hiányzik vagy rossz, de ezek kiderülnek valamelyik rész megoldásából)
   (1 pont) Akkor lesznek függetlenek, ha $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$.

(1 pont) arra, hogy odaírja, hogy klasszikus a valószínűségi mező, vagy arra, hogy kedvező esetek száma/összes eset száma képlettel számolunk.
(1 pont) arra, hogy az eseménytér (a kártyák halmaza) 52 elemű; elég, ha ez impliciten derül ki a további számolásokból.
(1 pont) $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{52}(= \frac{1}{13})$.
(1 pont) $\mathbb{P}(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
(1 pont) $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\text{a pikk ászt húztuk})$
(1 pont) $= \frac{1}{52}$.
(1 pont) Tehát függetlenek.
(b) (6 pont)
Legyen $D := \{\text{hetest húztunk}\}$. *1. megoldás.*
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(B \cup C \cup D)$.
(1 pont) A Poincaré-formula szerint
(1 pont) $\mathbb{P}(B \cup C \cup D) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(B \cap D) - \mathbb{P}(C \cap D) + \mathbb{P}(B \cap C \cap D)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{13}$ és $\mathbb{P}(B \cap D) = \frac{1}{52}$. (Nem kell indokolni, az indoklás ugyanaz, mint $\mathbb{P}(D)$-nél, illetve $\mathbb{P}(B \cap C)$-nél.)
(1 pont) $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(B \cap C \cap D) = 0$. (Nem kell jobban indokolni.)
(1 pont) Tehát $\mathbb{P}(B \cap C \cap D) = (\frac{1}{13} + \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} - \frac{1}{52}) = \frac{19}{52}$.
2. megoldás.
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(B \cup C \cup D)$.
(1 pont) $B \cup C \cup D$ komplementere az az esemény, hogy a húzott lap se nem ász, se nem hetes, se nem pikk.
(2 pont) Valahogy megszámolja indoklással, hogy 33 ilyen kártya van. Pl.: ilyen kártyák csak a 3 nem pikk színben fordulnak elő, és ott színenként 11 darab van (minden, kivéve az ász és a pikk).
(1 pont) $\mathbb{P}(B \cup C \cup D) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B \cup C \cup D})$
(1 pont) $= \mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D})$ (az előzővel összevonható; OK De Morgan-azonosság nélkül is, de csak ha jól határozta meg a komplementer elemeit)
(0 pont) $= \frac{19}{52}$.
(c) (4 pont)
(1 pont) Tudja, hogy a feltételes valószínűség azt jelenti, hogy a két esemény metszetének valószínűsége osztva a feltétel valószínűségével.
(1 pont) A feltétel valószínűsége $\mathbb{P}(\text{nem a pikk hetest húztuk}) = \frac{51}{52}$.
(1 pont) A metszet valószínűsége pedig egyszerűen $\mathbb{P}(\text{ászt húztunk})$ (nem kell részletesen indokolni – ha ászt húztunk és nem a pikk hetest, akkor bármelyik ászt kihúzhattuk, mást meg nem húzhattunk)
(1 pont) és már tudjuk, hogy $\mathbb{P}(\text{ászt húztunk}) = \mathbb{P}(B) = \frac{4}{52}$.
(0 pont) Így a keresett valószínűség $\frac{4}{51}$.
(d) (2 pont)
(1 pont) Ha teljes eseményrendszert alkotnának, akkor páronként kizárónak is kellene lenniük.
(1 pont) Itt azonban a B és C események nem kizáróak (ezt nem kell indokolni; az (a)-ban már láttuk, hogy $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$).
(0 pont) Így nem alkotnak teljes eseményrendszert.
(Megjegyzés: az teljesül a teljes eseményrendszer feltételei közül, hogy $A \cup B \cup C = \Omega$, de erre nem jár pont, így az sem baj, ha nem írja oda.)

3. Minél több szilveszteri trombitát árulnak a piacon, annál rosszabb minőségűek a trombiták. Ha $n \in \mathbb{N}$ darab trombita kapható a piacon, minden trombita a többitől függetlenül $\frac{3}{n}$ valószínűséggel megfelelő minőségű.

   (a) Tegyük fel, hogy $n = 10$. Mi a valószínűsége, hogy a 10-ből legalább 3 trombita megfelelő minőségű? (A valószínűség pontos értékét adjuk meg.) Mennyi a megfelelő minőségű trombiták számának várható értéke és szórása?

   (b) Nagy n esetén közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy az n trombitából legfeljebb egy lesz megfelelő minőségű. (A valószínűség pontos értékét itt nem kell meghatározni.)

Megoldás.
(a) (11 pont)
(1 pont) $n = 10$ esetén a megfelelő minőségű trombiták száma – amit nevezzünk X-nek – binomiális eloszlású
(1+1 pont) $(n =)10$ és $(p =)\frac{3}{10}$ valószínűséggel.
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \geq 3)$
(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2)$
(1 pont) $= 1-(1-0{,}3)^{10}-10\cdot 0{,}3\cdot(1-0{,}3)^9-\binom{10}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot(1-0{,}3)^8$ (a $\mathbb{P}(X = 0)$-nál természetesen jó a $\binom{10}{0}$-s szorzót is odaírni, a $\mathbb{P}(X = 1)$-nél pedig a 10-es szorzó helyett $\binom{10}{1}$-eset; $\binom{10}{2}$ helyett szabad $\frac{10\cdot 9}{2}$-t írni egyből)
(1 pont) $\approx 1 - 0{,}7^{10} - 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^9 - 45 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8$ (az előzővel összevonható, és ha az előző rendben van és a következő is, akkor nem baj, ha ez kimarad)
(1 pont) $\approx 0{,}6172$.
(1 pont) Így a várható érték $\mathbb{E}(X) = np = 3$
(1 pont) és a szórás $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} = \sqrt{np(1-p)}$
(1 pont) $= \sqrt{2{,}1} \approx 1{,}4491$.
Az np és $np(1-p)$ képletekre külön nem jár pont, ezek benne vannak a táblázatban!
(b) (9 pont)
(1 pont) Jelölje most Y a megfelelő minőségű trombiták számát, akkor a közelítendő valószínűség $\mathbb{P}(Y \leq 1)$.
(4 pont) Mivel a binomiális eloszlás n-és n-től függő $p = p_n$ paraméterére $\lim_{n\to\infty} np_n = 3 =: \lambda$ teljesül, Y-t egy λ paraméterű Z Poisson-eloszlású val. változóval közelíthetjük.
Erre részpontok:

- Ha leírja, hogy Poisson-approximáció kell, az minden további indoklás és λ meghatározása nélkül is ér 1 pontot. (Sőt az is, ha nem azt mondja, hogy approximáció, hanem csak annyit, hogy Poisson-eloszlást használunk, és világos, hogy Y szerepében.)
- Ha azt írja, hogy ez azért igaz, mert n nagy és p kicsi, azért jár még 1 pont, akkor is, ha nem tudja, hogy λ-t hogyan kell meghatározni.
- Ha a határértékre vonatkozó állítás nem szerepel, de tudja, hogy np-nek felel meg λ, arra jár 1 pont, és ha λ-t ez alapján jól meghatározza, arra még 1.
- A teljes pontszám is megadható a határértékre való hivatkozás nélkül, de ebből 1 pont arra jár, hogy leírja, hogy n nagy és p kicsi, nem elég, hogy $np = \lambda$.

(0 pont) Tehát a közelítésünk $\mathbb{P}(Z \leq 1)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(Z = 0) + \mathbb{P}(Z = 1)$
(2 pont) $= e^{-3} + 3e^{-3} = 4e^{-3}$ (nem kell megindokolni, hogy $\lambda^0 = 1$ és $\lambda^1 = \lambda$, meg azt sem, hogy $0! = 1! = 1$)
(1 pont) $= 0{,}1991$.
Ha CHT-t próbál csinálni vagy binomiálissal számolni, akkor legfeljebb az első két pont jár (a második igazából nem is hasznos, de ennyi még belefér).

4. Legyen X egy szabályos kockadobás eredménye, Y pedig egy X-től független, geometriai eloszlású valószínűségi változó, amelyre $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1)$.
Megjegyzés: $\mathbb{E}(X)$ értékét indoklás nélkül is felhasználhatjuk.

   (a) Melyik valószínűség a nagyobb: $\mathbb{P}(X > 2)$ vagy $\mathbb{P}(Y > 2)$?

   (b) Mennyi $\mathbb{P}(X \leq 2, Y < 3)$?

   (c) Mennyi $\mathbb{P}(X \leq 2 | Y < 3)$?

   (d) Határozzuk meg XY várható értékét és $2Y - 2$ szórásnégyzetét.

Megoldás.
(a) (6 pont)
(1 pont) $\mathbb{P}(X > 2) = 4/6 = 2/3$.
(1 pont) valami minimális indoklás erre (elég annyi, hogy 4 kedvező eset van, vagy annyi, hogy mik a kedvező vagy a kedvezőtlen értékek).
(1 pont) Y eloszlásának paramétere (p) 1/6-dal egyenlő (nem kell jobban indokolni).
(2 pont) $\mathbb{P}(Y > 2) = (1 - p)^2 = 25/36$.
Mivel $\mathbb{P}(Y > k) = (1 - p)^k$ elhangzott előadáson, ez így elfogadható további indoklás nélkül, akkor is, ha $(1 - 5/6)^2$-et ír, de ha csak az eredményt közli, akkor max. 1 pont van.
Kiszámítható úgy is, hogy $\mathbb{P}(Y > 2) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2) = 1 - 1/6 - 5/36 = 25/36$ (de ekkor sem jár rá több pont, viszont a 2 ponthoz érdemi indoklás kell).
(1 pont) Tehát $\mathbb{P}(Y > 2)$ a nagyobb.
(b) (5 pont)
(1 pont) Mivel függetlenek,
(1 pont) $\mathbb{P}(X \leq 2, Y < 3) = \mathbb{P}(X \leq 2)\,\mathbb{P}(Y < 3)$.
(1 pont) $\mathbb{P}(Y < 3) = \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 2)$
(1 pont) $= 1/6 + 5/36 = 11/36$.
Észre lehet azt is venni, hogy $\{Y < 3\}$ ugyanaz az esemény, mint $\{Y \leq 2\}$, aminek a komplementer valószínűségét már az (a)-ban esetleg kiszámoltuk. Ha ott kiszámoltuk, akkor elég a két esemény egyenlőségére és a komplementer valószínűségre hivatkozni.
(1 pont) $\mathbb{P}(X \leq 2) = 2/6 = 1/3$ (itt már nem várunk több indoklást).
(0 pont) Tehát a keresett valószínűség $\frac{11}{108}$.
(c) (2 pont)
1. megoldás:
(1 pont) Mivel függetlenek, (a feltétel elhagyható, tehát)
(1 pont) a keresett valószínűség pont $\mathbb{P}(X \leq 2)$, amiről már kiszámoltuk, hogy 1/3-dal egyenlő.
2. megoldás: kiszámoljuk a feltételes valószínűség definíciója szerint. A metszet valószínűségét a (b)-ben már kiszámoltuk, a feltétel valószínűsége meg $\mathbb{P}(Y < 3)$, amit már szintén kiszámoltunk.
(d) (7 pont)
(1 pont) Mivel függetlenek,
(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = 3{,}5$ (nem kell indoklás),
(1 pont) és $\mathbb{E}(Y) = 1/(1/6) = 6$,
(0 pont) tehát $\mathbb{E}(XY) = 21$.
(2 pont) $\mathbb{D}^2(2Y - 2) = 4\,\mathbb{D}^2(Y)$ (1 pont az additív konstans elhagyására, 1 a konstans szorzó négyzetének kiemelésére)
(1 pont) $= 4 \cdot \frac{1-1/6}{(1/6)^2} = 120$ (csak helyes végeredmény esetén jár pont és legyen legalább valami minimális indoklás is).

5. A következő dunai árvízig hátralévő idő mennyiségét (napokban mérve) jelöljük X-szel. Tegyük fel, hogy X folytonos, örökifjú eloszlást követ, pontosan 365 nap várható értékkel.

   (a) Mennyi X szórásnégyzete és miért?

   (b) Mennyi X^2 várható értéke?

   (c) Minek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy lesz 2026-ban dunai árvíz, vagy annak, hogy nem lesz? (2026 nem szökőév.)

   (d) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(91{,}25 < X < 182{,}5)$ valószínűséget. (A 91,25 és a 182,5 is napokban értendő.)

Megoldás.
(a) (5 pont)
(1 pont) arra, hogy ha az eloszlás folytonos és örökifjú, akkor csak exponenciális lehet.
(2 pont) Jelölje λ az eloszlás paraméterét. Ekkor mivel $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda = 365$, $\lambda = 1/365$,
(1 pont) és így $\mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
(1 pont) $= 133\ 225$.
(b) (3 pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2$.
(0 pont) $\mathbb{D}^2(X)$-ről már tudjuk, hogy 133 225-tel egyenlő.
(0 pont) $\mathbb{E}(X)$-ről is tudjuk, hogy 365,
(1 pont) így $\mathbb{E}(X)^2$ értéke is 133 225.
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(X^2) = 266\ 450$.
Alternatív módszer: a transzformált várható értékére vonatkozó képlettel kiintegráljuk, kétszer parc. int. Munkaigényes és nem ajánlott megoldás. (c) (5 pont)
(1 pont) Annak a valószínűsége, hogy lesz dunai árvíz 2026-ban: $\mathbb{P}(X < 365)$ [ha $\leq$-t ír $<$ helyett, nem kell levonni pontot, majd máshol jár ilyesmire pont]
(1 pont) $= F_X(365)$
(1 pont) $= 1 - e^{-\frac{1}{365}\cdot 365} = 1 - e^{-1}$. (Összevonható az előzővel: nem kell az eloszlásfüggvényes jelölés, ha van valami értelmes részszámítás.)
(1 pont) Ez a valószínűség nagyobb, mint 1/2 (ezt elhisszük pontos numerikus érték nélkül, mert annyit számológép nélkül is lehet tudni, hogy $e > 2$),
(1 pont) így a komplementer valószínűségnél is nagyobb, vagyis annak a valószínűségénél, hogy nem lesz dunai árvíz 2026-ban, ami pont $1 - \mathbb{P}(X < 365)$.
Alternatív megoldás az előző 2 pontra: kiszámolja annak a valószínűségét, hogy $X \geq 365$, ami e^{-1} (nem is kell jobban indokolni), és megállapítja, hogy ez kisebb, mint $\mathbb{P}(X < 365)$.
(d) (7 pont)
(2 pont) $\mathbb{P}(91{,}25 < X < 182{,}5) = \mathbb{P}(X < 182{,}5) - \mathbb{P}(X \leq 91{,}25)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(X < 182{,}5) - \mathbb{P}(X < 91{,}25)$, mert folytonos (ha hivatkozik a folytonosságra, akkor a köztes lépést el szabad hagyni; ha egyből $<$-vel írja indoklás nélkül, akkor viszont -1 pont)
(2 pont) $= (1 - e^{-\frac{1}{365}\cdot 182{,}5}) - (1 - e^{-\frac{1}{365}\cdot 91{,}25})$
(1 pont) $= e^{-\frac{1}{4}} - e^{-\frac{1}{2}}$
(1 pont) $\approx 0{,}1723$.
Természetesen jó úgy is a megoldás, hogy a sűrűségfüggvényt integráljuk 91,25-től 182,5-ig: ennek megállapítására 2 pont, a sűrűségfüggvény behelyettesítésére 1 pont, a számolásra pedig 3 pont jár. Munkaigényesebb, mint a másik megoldás.

6. * Tekintsük az alábbi $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$F(x) = \begin{cases} a + be^x, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-cx}, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

ahol a, b, c valós számok (és $e = 2{,}71...$).

(a) Az a, b és c paraméter minden lehetséges választása esetén döntsük el (indoklással), hogy F eloszlásfüggvény-e.

(b) Adjuk meg az a, b és c paraméter minden olyan lehetséges választását, amely esetén egy F eloszlásfüggvényű X valószínűségi változónak létezik sűrűségfüggvénye, és ebben az esetben határozzuk meg ezt a sűrűségfüggvényt is.

Megoldás. (a) (12 pont)
(1 pont) Ahhoz, hogy F eloszlásfüggvény legyen, $\lim_{x\to-\infty} F(x)$-nek 0-nak kell lennie.
(1 pont) Mivel $\lim_{x\to\infty} e^x = 0$,
(1 pont) ezért a-nak 0-nak kell lennie [és ekkor ez a tulajdonság bármilyen $b \in \mathbb{R}$ esetén stimmel].
(1 pont) F-nek monoton növőnek kell lennie,
(1 pont) ezért b-nek nemnegatívnak kell lennie.
Megjegyzés: az utóbbi pontot arra is meg lehet kapni, hogy F-nek $[0; 1]$-beli (elég: nemnegatív) értékeket kell felvennie, ezért is nemnegatívnak kell lennie b-nek. Ekkor azonban a monoton növekedésre itt nem jár pont, később lesz olyan rész, ahol nem lehet megkerülni ezt a tulajdonságot, és ott meg lehet adni ezt az 1 pontot.
(2 pont) $x = 0$-nál a bal oldali határérték, ami $a + be^0 = b$, legfeljebb akkora lehet, mint a jobb oldali határérték, ami $1 - 1/2 = 1/2$,
(0 pont) mert F – mint már említettük – monoton növő kell, hogy legyen.
(1 pont) Tehát ehhez az kell, hogy $b \leq 1/2$ teljesüljön.
(0 pont) Végül F-nek a $(0; \infty)$ intervallumon is monoton növőnek kell lennie,
(1 pont) ezért c-nek is nemnegatívnak kell lennie. (Nem kell jobban indokolni.)
(1 pont) Végül $\lim_{x\to\infty} F(x)$-nek 1-nek kell lennie,
(1 pont) ehhez pedig az kell, hogy c szigorúan pozitív legyen (nem jó a $c = 0$).
Alternatíva az előző 3 pontra: először nézi meg, hogy a $+\infty$-ben mikor jó a határérték. Ebben az esetben kiesik a $c = 0$, és utána elég azt mondani, hogy „igen, ebben az esetben monoton növő is”. (Ha az utóbbi kimarad, az 1 pont levonás.)
(0 pont) Tehát egyelőre ott tartunk, hogy a szükséges feltételek: $a = 0, 0 \leq b \leq 1/2$ és $c > 0$.
(1 pont) Ebben az esetben F balról folytonos is, mert a 0-ban pont a bal oldali határértékét veszi fel (ezt nem kell jobban indokolni: mindenhol máshol folytonos, mert folytonos függvények kompozíciója), tehát ezek a feltételek elégségesek is ahhoz, hogy F eloszlásfüggvény legyen.
(b) (8 pont)
Ajánlott megoldás:
(1 pont) X-nek csak akkor lehet sűrűségfüggvénye, ha F folytonos függvény.
(0 pont) A fentiek szerint a folytonosságot elég az $x = 0$ pontban garantálni.
(2 pont) Pontosan akkor lesz folytonos F a 0-ban, ha $a + be^0 = b$ megegyezik $1 - \frac{1}{2}e^{-0}$-val, vagyis 1/2-del, tehát $b = 1/2$.
(2 pont) Ebben az esetben viszont F nemcsak folytonos, hanem véges sok pont (konkrétan egy pont: az $x = 0$ pont) kivételével differenciálható lesz, ami alapján (az előadáson elhangzott állítás szerint) X-nek létezik sűrűségfüggvénye.
(1 pont) A sűrűségfüggvényt ekkor az eloszlásfüggvény deriválásával kapjuk (ahol pedig F nem deriválható, ott 0-ként választhatjuk – vagy bárhogyan, most itt a mintamegoldásban az egyszerűség kedvéért az $x = 0$ pontot a bal oldali szakaszhoz soroljuk. Nem baj, ha erre nem tér ki, csak definiálja mindenhol a sűrűségfüggvény értékét). (Elég, ha impliciten derül ki, hogy

deriválni kell az eloszlásfüggvényt.)
(1 pont) Tehát a sűrűségfüggvény: $f_X(x) = be^x = \frac{1}{2}e^x$, ha $x < 0$
(1 pont) és $f_X(x) = \frac{1}{2}ce^{-cx}$, ha $x > 0$.
(0 pont) $x = 0$-ban pedig tetszőlegesen megválaszthatjuk $f_X(x)$-et, legyen mondjuk $\frac{1}{2}$ (ez az alsó szakasznak megfelelő érték).

A véges sok pont kivételével való differenciálhatóság elkerülhető azzal, hogy az ember deriválja az eloszlásfüggvényt és utána azzal érvel, hogy ha a kapott függvényt (amit $x = 0$-ban bárhogy definiálhat, de valahogyan mindenképpen kell definiálni) $-\infty$-től x-ig integrálja, akkor tényleg $F(x)$-et kapja; itt kell egy esetszétválasztás $x < 0$-ra, $x = 0$-ra és $x > 0$-ra, így ez lesz a sűrűségfüggvény. Erre is jár az utolsó 5 pont.

Az eloszlásfüggvény karakterizációjában szereplő tulajdonságoknak (balról folytonos, határértékek, monoton növő) puszta felsorolására összesen maximum 4 pont jár, egyéb tulajdonságainak (pl. $[0; 1]$-értékű vagy nemnegatív) puszta felsorolására nem jár pont. Ennél több pont csak az kaphat, aki a feladatnak megfelelő célra alkalmazni is tudja ezeket a tulajdonságokat. Ha egy tulajdonság alkalmazására már kapott pontot a hallgató, akkor a felsorolás megfelelő részére nem jár külön pont.
A (b)-nek az ilyen fajta megoldásában sűrűségfüggvény karakterizációjára nem jár pont.

Alternatív megoldás a (b)-re (több számolással jár!):
(1 pont) Deriváljuk az eloszlásfüggvényt [kivéve az $x = 0$ pontot] és megnézzük, hogy a kapott függvény sűrűségfüggvény-e. (Itt nem várunk részletes indoklást, de ez azért lesz jó, mert F ezt az egy pontot kivéve differenciálható.)
(1 pont) $x \mapsto F'(x)$ mindig nemnegatív függvény. ($x = 0$-ban tetszőlegesen megválasztva az értékét.)
(1 pont) Ezenkívül még azt kell ellenőrizni, hogy az integrálja megegyezik-e 1-gyel.
(1 pont) $F'(x) = be^x$, ha $x < 0$ és $F'(x) = \frac{1}{2}ce^{-cx}$, ha $x > 0$.
(1 pont) Tehát $\int_{\infty}^{\infty} F'(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} be^x\mathrm{d}x + \int_0^{\infty} \frac{1}{2}ce^{-cx}\mathrm{d}x$
(1 pont) $= [be^x]_{-\infty}^0 + [-\frac{1}{2}e^{-cx}]_0^{\infty}$
(1 pont) $= b + \frac{1}{2}$.
(1 pont) Tehát X-nek pontosan akkor létezik sűrűségfüggvénye, ha $b = \frac{1}{2}$.

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$F_X(t)$	$p_X(k)$, $f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor Bernoulli	$\mathbb{1}_A$ $\mathrm{B}(p)$	$\{0, 1\}$		$p_X(0)=1-p$, $p_X(1)=p$ $(p = \mathbb{P}(A))$	p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{Bin}(n; p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$		$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0, 1, 2, \ldots\}$		$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1, 2, \ldots\}$		$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0; \infty)$	$1-e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\lambda e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Tudnivalók: A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. Hivatkozni csak az előadáson elhangzottakra lehet. A zárthelyi első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.