

Klausur

Allgemeine Regeln: Die Klausur dauert 90 Minuten. Die Benutzung eines (nicht graphischen) Taschenrechners ist erlaubt. Numerische Ergebnisse sollen auf 4 Dezimalstellen gerundet werden. Zum Erreichen der maximalen Punktzahl ist es notwendig, detaillierte Lösungen zu geben und die angewandten Behauptungen, Sätze und Eigenschaften aufzulisten. Ohne Beweis dürfen nur solche Behauptungen verwendet werden, die in der Vorlesung dieses oder eines früher studierten Kurses diskutiert wurden. Es ist verboten, während der ersten 30 Minuten den Raum zu verlassen.

1. Zwei Zahlen werden nacheinander unabhängig im Intervall $[0; 1]$ ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste ausgewählte Zahl größer als die zweite Zahl ist, und zusätzlich die erste Zahl kleiner als 0,75, während die zweite Zahl größer als 0,5 ist?
2. Nehmen wir an, dass die Ereignisse A , B und C paarweise unabhängig sind (d.h.: beliebige zwei von ihnen unabhängig sind), und dass $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$ gilt. Sei noch $\frac{1}{9}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine der obigen drei Ereignisse eintritt. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei Ereignisse eintreten? Sind A , B und C gemeinsam unabhängig?
3. Ein Unternehmen besitzt zwei Büros, eines in Prag, wo eine Hälfte der Mitarbeiter/innen arbeitet, und das andere in Istanbul, wo die andere Hälfte arbeitet. Das Lieblingsgetränk eines Drittels der Mitarbeiter/innen im Prager Büro ist Kaffee, ein anderes Drittel dieser Mitarbeiter/innen bevorzugt Mineralwasser, und das letzte Drittel bevorzugt Bier. Das Lieblingsgetränk der Hälfte der Mitarbeiter/innen im Istanbul Büro ist auch Kaffee, die andere Hälfte bevorzugt dort Tee. (Jeder Mitarbeiter/jede Mitarbeiterin hat genau ein Lieblingsgetränk, das in der obigen Liste enthalten ist.)

Ein(e) Mitarbeiter(in) des Unternehmens wird uniform zufällig gewählt.

- (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Lieblingsgetränk der ausgewählten Person Kaffee ist?
 - (b) Angenommen, dass das Lieblingsgetränk der ausgewählten Person Kaffee ist, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er/sie in Istanbul arbeitet?
 - (c) Angenommen, dass das Lieblingsgetränk der ausgewählten Person *nicht* Kaffee ist, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sein/ihr Lieblingsgetränk Bier ist?
4. In einem Gebäude gibt es vier Aufzüge. Jeden Tag funktioniert jeder Aufzug mit Wahrscheinlichkeit $1/2$, unabhängig von den anderen Aufzügen und unabhängig von den Konditionen aller Aufzüge an anderen Tagen.
 - (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens zwei Aufzüge an einem bestimmten Tag *nicht* funktionieren?
 - (b) Von einem bestimmten Tag an beobachten wir jeden Tag, welche Aufzüge an welchen Tagen funktionieren. Sei Y die Anzahl der Tage (einschließlich des letzten Tages) vom Anfang der Beobachtung bis zum ersten solchen Tag, wenn kein Aufzug in Betrieb ist.
 - i. Geben wir die Verteilung von Y an, und wenn sie zu den gelernten bekannten Verteilungen gehört, geben wir auch ihre Parameter an.
(Diese Antwort muss ausnahmsweise nicht begründet werden.)
 - ii. Bestimmen wir die Standardabweichung von Y und den Erwartungswert von Y^2 .
 - iii. Bestimmen wir die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y > 2024 | Y > 2022)$.

Die folgenden Aufgaben befinden sich auf der anderen Seite.

5. Ein Bild besteht aus 3 Pixeln in einer einzigen Zeile, die unabhängig voneinander einzeln mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ schwarz und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ weiß gefärbt wurden. Sei X die Anzahl der weißen Pixel, und sei Y die Länge der größten zusammenhängenden Sequenz von schwarzen Pixeln. (Beispielweise sind die Werte von X und Y in der unten gezeigten Situation beide 1.)



- (a) Bestimmen wir die gemeinsame Verteilung von X und Y . Geben wir das Ergebnis möglichst in einer Tabelle an (es ist aber auch genügend, die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$ nur für solche Zahlen k und l anzugeben, für die diese Werte positiv sind).
- (b) Bestimmen wir die Randverteilungen von X und Y .
- (c) Bestimmen wir den Erwartungswert $\mathbb{E}(XY)$.

(Alle Antworten müssen begründet werden.)

- *6. Für alle $t \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$ nimmt die Dichtefunktion f_X einer Zufallsvariablen X den Wert $1/t^4$ an, wo $c > 0$ eine positive reelle Zahl ist. Wir wissen weiter, dass f_X im Intervall $[-c; c]$ konstant ist, und dass f_X in jedem Punkt der Zahlmenge $\mathbb{R}$ stetig ist. Bestimmen wir den Wert von c und den Erwartungswert von X . (Ohne Beweis kann es verwendet werden, dass $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ gilt.)

Verteilung	Notation	$\text{ran} X$	$F_X(t)$	$f_X(k), f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0, 1\}$		$1 - p, p$	p	$p(1 - p)$
Binomialverteilung	$\text{Bin}(n; p)$	$\{0, 1, \dots, n\}$		$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$
Poisson-Verteilung	$\text{Poi}(\lambda)$	$\mathbb{N}$		$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
geometrische Verteilung	$\text{Geo}(p)$	$\mathbb{N}^+$		$(1 - p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
uniforme Verteilung	$U(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentialverteilung	$\text{Exp}(\lambda)$	$[0; \infty)$	$1 - e^{-\lambda t} \ (0 \leq t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$