Diszkrét valószínűségi változók: transzformálás, együttes eloszlás, függetlenség

1. Egy X valószínűségi változó várható értéke $\mathbb{E}(X) = 1$ és szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(X) = 5$. Mennyi
   (a) $\mathbb{E}(X^2)$, (b) $\mathbb{E}\big((X+2)^2\big)$, (c) $\mathbb{D}^2\big(3X+4\big)$?

2. Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Jelölje X a dobott számok között a hatosok, Y pedig a páros számok számát.
   (a) Adjuk meg X és Y együttes súlyfüggvényét.
   (b) Határozzuk meg X, illetve Y súlyfüggvényét.
   (c) Független-e X és Y?
   (d) Mennyi $\mathbb{E}(X+Y)$ és $\mathbb{E}(XY)$ és $\mathbb{E}(X^4)$?

---

3. Legyenek X és Y független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók $\lambda > 0$ paraméterrel. Mennyi
   (a) $\mathbb{D}^2\big(2X+1\big)$, (b) $\mathbb{E}(XY)$, (c) $\mathbb{P}(X = 2 \mid Y = 5)$?

4. Az X és Y együttes eloszlását a jobbra látható táblázat adja meg.
   (a) Határozzuk meg az a és b értékeket, ha tudjuk, hogy az $\{X = 2\}$ és az $\{Y = 0\}$ események függetlenek.
   (b) Független-e X és Y is?
   (c) Mennyi $\mathbb{P}(XY > 0 \mid X < 2)$ és $\mathbb{E}(X+Y)$ és $\mathbb{E}(XY)$?

Y \ X	0	1	2
0	1/10	1/5	a
2	b	1/4	1/5

5. Egy (1×3)-as négyzetrács három mezőjét egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel feketére és $1/2$ valószínűséggel fehérre színeztük. Jelölje X a fehér mezők számát, Y pedig azt, hogy hány mezőből áll a legnagyobb összefüggő fekete terület. (Például ha a mezőket rendre feketére, fehérre és feketére színezzük, akkor X és Y értéke is 1.)
   (a) Határozzuk meg X és Y együttes súlyfüggvényét.
   (b) Határozzuk meg X, illetve Y súlyfüggvényét.
   (c) Határozzuk meg $\mathbb{E}(XY)$ értékét.
   (zh, 2024. alapján)

6. Nyuszika szeretne répatortát venni. A környéken 4 cukrászdát ismer, amik közül csak kettőben árulnak répatortát, de nem tudja, melyekben. Amelyik cukrászdában árulnak, ott sem minden nap van készleten: az egyes napokon egymástól függetlenül, $1/3$ eséllyel lehet répatortát kapni. Nyuszika minden nap egy új cukrászdát látogat meg (véletlenszerűen választva), amíg nem talál olyat, ahol árulnak répatortát. Ha talált ilyen helyet, akkor addig jár vissza ugyanide naponta, amíg tortavásárlása sikerrel nem jár.
   (a) Mi az esélye, hogy a k-adik napon talál először répatortát áruló boltot, ahol $k \in \{1,2,3\}$?
   (b) Ha már megtalálta a megfelelő boltot, mi az esélye, hogy összesen épp ℓ-szer kell idelátogatnia, hogy végül tortához jusson, ahol $\ell \geq 1$?
   (c) Összesen, várhatóan hány napba telik répatortához jutnia?
   (zh, 2020.)

7. Egy szabályos dobókockával addig dobunk, amíg a dobott értékek között meg nem jelenik az 1, 2, 3 részsorozat (ebben a sorrendben, de nem feltétlenül egymás után). Mennyi a dobások számának várható értéke? (pzh, 2018.)

---

8. Egy kalapba beteszünk egy cédulát, amelyikre a 3-as számot írtuk, és egy olyat, amelyikre a 4-est. Egy másik kalapba pedig egy olyan cédulát teszünk, amelyikre a 2-es számot írtuk, és egy olyat, amelyikre a 3-ast. Véletlenszerűen kihúzunk mindkét kalapból egy-egy számot. Legyen az X valószínűségi változó értéke 2, ha az első kalapból a 4-es számot húztuk ki, különben pedig legyen X értéke 1, továbbá legyen az Y valószínűségi változó értéke azon kalapok száma, ahonnan 3-as számot húztunk.
   (a) Adjuk meg X és Y együttes súlyfüggvényét.
   (b) Határozzuk meg X, illetve Y súlyfüggvényét.
   (c) Független-e X és Y?
   (d) Mennyi $\mathbb{E}(X^3)$?
   (zh, 2025. alapján)

9. Egy városban a házak padlásain található egerek száma egymástól függetlenül átlagosan négy. Jelölje X, Y és Z három véletlenül választott padláson az egerek számát. Határozzuk meg az $\mathbb{E}\big((X+Y)(Y+Z)\big)$ értéket.
   (vizsga5, 2025. alapján)

10. Egy $N \geq 2$ tagú társaságban mindenki felírja a saját nevét egy-egy cetlire, ezeket egy kalapba rakják, majd mindenki véletlenszerűen húz egy cetlit a kalapból (visszatevés nélkül).
    (a) Az N ember között szerepel Anna és Béla. Mi a valószínűsége, hogy ők egymás nevét húzzák?
    (b) Mi a várható értéke azon párok számának, akik egymás nevét húzzák?
    (vizsga3, 2024.)

11. Legyen X egy Poisson-eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel, és legyen $Y = 1/(X+1)$. Adjuk meg Y várható értékét.