Diszkrét valószínűségi változók, súlyfüggvény, eloszlásfüggvény, várható érték, szórás

1. Egy magyarkártya-pakliból egyszerre kihúzunk két lapot. Jelölje X a kihúzott piros lapok számát.
   (a) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűséget.
   (b) Adjuk meg az X valószínűségi változó súlyfüggvényét és ábrázoljuk az eloszlásfüggvényét.
   (c) Határozzuk meg az X valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

2. Egy szabályos dobókockát kétszer feldobunk. Jelölje az első dobás eredményét X, a másodikét Y. Mennyi $\mathbb{P}(X \leq Y)$?

---

3. Két szabályos dobókockával dobunk. Jelölje X a dobott számok maximumát.
   (a) Adjuk meg az X valószínűségi változó súlyfüggvényét és ábrázoljuk az eloszlásfüggvényét.
   (b) Határozzuk meg az X valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

4. Tekintsük a 2. feladatbeli X és Y valószínűségi változókat. Mennyi $\mathbb{P}(X = 5 \mid X + Y \geq 10)$?

5. Egy fagyizóban ötféle fagyit árulnak: vaníliát, csokit, epret, citromot és pisztáciát. Véletlenszerűen választunk egy háromgombócos kelyhet az összes lehetséges összeállítás közül. Várhatóan hány gombóc pisztácia lesz a kehelyben?

6. Legyenek A, B és C olyan események, amelyekre
$$\mathbb{P}(A) = 0{,}5, \qquad \mathbb{P}(B) = 0{,}4, \qquad \mathbb{P}(C) = 0{,}3,$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}3, \qquad \mathbb{P}(B \cap C) = 0{,}2, \qquad \mathbb{P}(C \cap A) = 0{,}1, \qquad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0{,}1.$$
Jelölje X az A, B és C események közül bekövetkezőknek a számát. Mennyi $\mathbb{P}(0 < X < 3)$?

7. Feldobunk két szabályos érmét, majd egy szabályos dobókockával annyiszor dobunk, ahány fejet dobtunk. Jelölje X a dobott 6-osok számát. Határozzuk meg X várható értékét.

---

8. Két egyforma golyót egymástól függetlenül, véletlenszerűen 5 urnába helyezünk el. Jelölje X az üres urnák számát.
   (a) Adjuk meg az X valószínűségi változó súlyfüggvényét és ábrázoljuk az eloszlásfüggvényét.
   (b) Határozzuk meg az X valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

9. Jelölje X az ötöslottón kihúzott számok közül a legkisebbet. Adjuk meg X súlyfüggvényét.

10. Aladár feldob egy szabályos érmét. Ha fejet dob, akkor 10 Ft-ot nyer, ha írást, akkor újból dob. Ha másodjára fejet dob, akkor 20 Ft-ot nyer, ha pedig másodjára is írást dob, akkor 30 Ft-ot veszít. Hány Ft-ot nyer várhatóan Aladár egy játék során?

11. Aladár és Béla a következő játékot játsszák. Mindketten egyszerre dobnak egy-egy szabályos dobókockával. Ha a dobott számok szorzata páros, akkor Aladár fizet Bélának 100 Ft-ot, ellenkező esetben pedig Béla fizet Aladárnak x forintot. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy a játék igazságos legyen.

12. Egy tárgyra két játékos licitál: mindketten egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel licitálnak 0, 1 vagy 2 fabatkát. A tárgyat a magasabb licitet tevő játékos kapja meg, a második legmagasabb licitnek megfelelő áron. Ha a két játékos azonos összeget licitál, sorsolással döntik el, hogy ki kapja meg a tárgyat, aminek a vételára a közös licit lesz. Határozzuk meg a várható eladási árat.

13. Egy n-elemű alaphalmaz részhalmazai közül véletlenszerűen, egyenlő valószínűséggel kiválasztunk egyet. Mutassuk meg, hogy várhatóan $n/2$ eleme lesz a kiválasztott részhalmaznak.

14. Határozzuk meg, hogy egy szabályos dobókockával hatszor dobva várhatóan hány különböző számot dobunk.