Független események, feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel

1. Kétszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Legyen

$$A = \{\text{az első dobás 3-as}\}, \quad B = \{\text{a második dobás 4-es}\}, \quad C = \{\text{a dobott számok összege 7}\}.$$

   (a) Mutassuk meg, hogy az A, B és C események páronként függetlenek, de nem együttesen függetlenek.
   (b) Legyen $D = \{\text{a dobott számok szorzata 12}\}$. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(A|D)$ valószínűséget.

2. Egy cégnek két irodája van: a dolgozók fele Prágában, a másik fele Isztambulban dolgozik. A prágai irodában dolgozók egyharmadának a kedvenc itala a kávé, egyharmadának az ásványvíz, egyharmadának pedig a sör. Az isztambuli irodában dolgozók felének a kedvenc itala a kávé, a másik felének a tea. (Minden dolgozónak pontosan egy kedvenc itala van.) Véletlenszerűen kiválasztjuk a cég egyik dolgozóját.
   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a dolgozó kedvenc itala a kávé?
   (b) Feltéve, hogy a dolgozó kedvenc itala a kávé, mi a valószínűsége, hogy Isztambulban dolgozik?
   (c) Feltéve, hogy a dolgozó kedvenc itala nem a kávé, mi a valószínűsége, hogy a sör az? (zh, 2024.)

---

3. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy két szabályos dobókockával dobva mindkét érték páros feltéve, hogy összegük legalább tíz.

4. Egy erdőben kétfajta macskaféle fordul elő nagyon nagy példányszámban: házi macska és vadmacska. A vadmacskák a macskafélék teljes állományának tíz százalékát alkotják. Az összes vadmacska cirmos, továbbá öt házi macskából átlagosan egy példány cirmos.
   (a) Véletlenszerűen kiválasztva az erdőből egy macskafélét, mi a valószínűsége, hogy az cirmos?
   (b) Az erdőben véletlenszerűen meglátunk egy cirmost. Mi a valószínűsége, hogy házi macska?
   (c) Az erdőből véletlenszerűen kiválasztunk egy macskafélét. Független-e az a két esemény, hogy a kiválasztott macskaféle nem cirmos, és hogy a kiválasztott macskaféle házi macska? (zh, 2023.)

5. Tegyük fel, hogy az A, B és C együttesen független eseményekre $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$ és $\mathbb{P}(B) = 0{,}4$ és $\mathbb{P}(C) = 0{,}8$ teljesül. Mekkora a valószínűsége, hogy
   (a) mindhárom esemény egyszerre bekövetkezik; (b) legalább az egyik esemény bekövetkezik?

6. Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még vadonatúj. Három játékhoz kiveszünk találomra három-három labdát, de minden játék után (már használt labdaként) visszarakjuk azokat a rekeszbe. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom játékhoz egy vadonatúj és 2 használt labdát veszünk ki?

7. Feldobunk két szabályos dobókockát, és jelölje k a dobott 6-osok számát. Egy kezdetben üres urnába k darab piros és $2-k$ darab kék golyót teszünk, majd kétszer húzunk visszatevéssel. Feltéve, hogy mindkét húzásra piros golyót húztunk, mi k legvalószínűbb értéke?

---

8. Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzérmét. Legyen A az az esemény, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig az az eseményt hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Független-e A és B?

9. Az I épület portáján 2 db kék, 3 db zöld, 1 db fekete és 2 db piros filctoll található, amik közül a gyakorlat előtt a gyakorlatvezető véletlenszerűen kiválaszt egyet. Tudjuk, hogy egy kék filctoll $2/5$, egy zöld $1/4$, egy fekete $1/5$, egy piros pedig $1/10$ valószínűséggel fogy ki a gyakorlat végére. Feltéve, hogy a választott filctoll kifogyott a gyakorlat végére, mi a valószínűsége, hogy piros színű volt? (zh, 2025. alapján)

10. Tegyük fel, hogy az A és B események közül legalább az egyik mindig bekövetkezik, valamint $\mathbb{P}(A|B) = 0{,}2$ és $\mathbb{P}(B|A) = 0{,}5$.
    (a) Mennyi $\mathbb{P}(A)$ és $\mathbb{P}(B)$ és $\mathbb{P}(A|\overline{B})$? (b) Függetlenek-e az A és B események?

11. Egy 52-lapos franciakártya-csomagot véletlenszerűen szétosztunk négy játékos között úgy, hogy minden játékos 13 lapot kap. Mi a valószínűsége, hogy a négy ász négy különböző játékoshoz kerül?

12. Aladár és Béla egymástól és a korábbi eseményektől függetlenül $2/3$ valószínűséggel hazudnak. Ha Aladár azt mondja, hogy Béla hazudott, akkor mi a valószínűsége annak, hogy Béla igazat mondott? (Aladár ebben az esetben tudja, hogy Béla igazat mondott-e.)

13. Száz utas várakozik arra, hogy beszállhassanak egy százfős repülőgépbe. A sor legelején álló utas elveszítette a beszállókártyáját, így egy véletlenszerűen választott helyre ül le a gépen. A többi utas egyenként száll fel, és ha egyikük azt látja, hogy a helyét elfoglalta már valaki más, akkor a még szabad ülések közül egy véletlenül választott helyre ül le. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a sor végén álló utas oda fog ülni, ahova a beszállókártyája szól?