Kombinatorikus és geometriai valószínűség, szitaformula

1. Anna, Bea és Csilla egy pakli magyar kártyával kártyáznak. Keverés után mindhármuknak osztanak 8–8 lapot. (Egy pakli magyar kártyában 32 lap van, ebből pontosan 8 darab piros.) Legyenek A, B, illetve C rendre azok az események, hogy Annánál, Beánál, illetve Csillánál nincsen piros lap osztás után. Fejezzük ki A, B és C segítségével az alábbi eseményeket.
   (a) Annánál van legalább egy piros lap.
   (b) Sem Beánál, sem Csillánál nincs piros lap.
   (c) Mindhárom játékosnál van legalább egy piros lap.

2. Határozzuk meg az 1. feladatbeli események valószínűségét. (zh, 2023. alapján)

3. A $[0,1]$ intervallumon találomra kiválasztunk két számot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az egyik szám legalább a kétszerese a másiknak?

---

4. Két szabályos dobókockával dobunk és tekintsük az alábbi eseményeket.
$$A = \{\text{az összeg 7}\}, \qquad B = \{\text{mindkét szám páros}\}, \qquad C = \{\text{valamelyik szám 3-as}\}$$
Számoljuk ki a $\mathbb{P}\big(A \cap (B \cup \overline{C})\big)$ és $\mathbb{P}\big((A \cup C) \cap \overline{B}\big)$ valószínűségeket.

5. Adott a síkon egy egységsugarú kör és egy beleírt négyzet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a körlap egy véletlen pontját választva a pont a négyzet belsejébe esik?

6. Az ötöslottó sorsoláson 1-től 90-ig számozott golyókból húznak ki 5 különbözőt. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ valószínűséget, ahol
$$A = \{\text{mind az öt szám legfeljebb 50}\}, \qquad B = \{\text{mind az öt szám páros}\},$$
$$C = \{\text{mind az öt szám legalább 20}\}.$$

7. A $[0,1]$ intervallumon találomra kiválasztunk két számot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a két szám összege nagyobb, mint a nagyobbik és a kisebbik szám különbségének a kétszerese? (zh, 2023.)

---

8. Feldobunk két szabályos dobókockát. Legyen A az az esemény, hogy a dobott számok összege kétjegyű, B pedig az, hogy a dobott számok összege páros. Fejezzük ki A és B segítségével az alábbi eseményeket, majd határozzuk meg ezek valószínűségét.
   (a) A dobott számok összege 11.
   (b) A dobott számok összege legfeljebb 12.
   (c) A dobott számok összege irracionális.

9. A $[0,2]$ és a $[0,3]$ intervallumokból választunk egy-egy számot; legyenek ezek x és y. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az x, y és 1 hosszúságú szakaszokból szerkeszthető háromszög?

10. Legyenek A, B és C olyan események, melyekre
$$\mathbb{P}(A) = 0{,}7, \qquad \mathbb{P}(B) = 0{,}6, \qquad \mathbb{P}(C) = 0{,}9.$$
Bizonyítsuk be, hogy ekkor
   (a) $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0{,}3$, (b) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \geq 0{,}2$.

11. Egy ajándékcsomagban 10 darab csoki van. A csokik 6 különböző fajtájúak lehetnek. Feltéve, hogy minden összeállítás azonos valószínűségű, mi a valószínűsége annak, hogy az ajándékcsomagunkban pontosan 4 különböző fajta csoki lesz?

12. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ötjegyű szám számjegyei
   (a) szigorú monoton csökkenőek; (b) monoton növekvőek?