## 9. Übungsblatt

Kovarianz im stetigen Fall, Korrelationskoeffizient, lineare Regression

1. Seien $X$ und $Y$ unahängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X) = 4$, $\mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathbb{D}^2(X) = 1$, $\mathbb{D}^2(Y) = 2$. Bestimmen wir die Größen $\mathbb{E}(5X - 6Y)$, $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{D}^2(5X - 6Y + 8)$ und $\operatorname{cov}(5X + 2Y + 2, X + 6Y - 3)$.

2. Seien $X, Y \sim \mathrm{U}(0; 1)$ unabhängige Zufallsvariablen und $Z_1 = XY$ und $Z_2 = X + Y$.
   a) Geben wir den Erwartungswert von $Z_1$ und $Z_2$ an. b) Ist es wahr, dass $\mathbb{D}^2(XY)$ gleich $\mathbb{D}^2(X) \cdot \mathbb{D}^2(Y)$ ist?
   c) Geben wir $\mathbb{D}^2(Z_1 + 2Z_2)$ an.

3. Die Dichtefunktion des Zufallsvektors $(X, Y)$ ist

$$f_{X,Y} : (s,t) \mapsto \begin{cases} 2(s^3 + t^3) & \text{falls } 0 < s < 1 \text{ und } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Bestimmen wir $\operatorname{cov}(X, Y)$.

4. Seien $X \sim \mathrm{N}(m; \sigma^2)$, $Y = 3X + 8$, $Z = 5 - 2X$. Bestimmen wir den Korrelationskoeffizient $\operatorname{corr}(Y, Z)$.

5. Seien $X \sim \mathrm{U}(0; 2\pi)$, $Y = \cos(X)$ und $Z = \sin(X)$. Geben wir $\operatorname{cov}(Y, Z)$ an. Sind $Y$ und $Z$ unabhängig?

6. Die Dichtefunktion des Zufallsvektors $(U, V)$ ist

$$f_{U,V} : (u,v) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{v}} & \text{falls } 0 < u < 1 \text{ und } 0 < v < u^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Bestimmen wir $\operatorname{cov}(U, V^2)$.

---

7. Nehmen wir an, dass $X_1$, $X_2$ und $X_3$ unkorrelierte Zufallsvariablen sind, und dass $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(X_3) = 0$ und $\mathbb{D}(X_1) = \mathbb{D}(X_2) = \mathbb{D}(X_3) = 1$ gelten.
   a) Berechenen wir $\operatorname{cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$, $\mathbb{D}^2(X_1 + X_2)$ und $\mathbb{D}^2(X_2 + X_3)$.
   b) Bestimmen wir $\operatorname{corr}(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$.
   c) Geben wir die Regressionsgerade von $X_2 + X_3$ auf $X_1 + X_2$ an.
   d) Was ist die Varianz des Fehlers der Approximation von $X_2 + X_3$ durch die obige Regressionsgerade?

8. Geben wir die lineare Regression von $X^2 + X + 1$ auf $X$ an, falls a) $X \sim \mathrm{Exp}(5)$, b) $X \sim \mathrm{N}(0; 1)$, *c) $X \sim \mathrm{Bin}(n; p)$ gilt.

9. Seien $X$ und $Y$ die in der dritten Aufgabe definierten Variablen. Bestimmen wir die Regressionsgerade von $Y$ auf $X$, wenn wir wissen, dass $\mathbb{D}^2(X) = 0{,}0775$. Berechnen wir den durchschnittlichen quadratischen Fehler der Approximation von $Y$ durch die lineare Regression $\beta X + \alpha$.

10. Nehmen wir an, dass die Regressionsgerade von $Y$ auf $X$ durch $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 2\}$ angegeben ist, und dass die Regressionsgerade von $X$ auf $Y$ durch $\left\{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1}{4}y - \frac{11}{2}\right\}$ angegeben ist. Bestimmen wir die Werte $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$.

11. Ein regelmäßiger Würfel wird zweimal geworfen. Sei $X$ die Anzalh der Sechsen, und sei $Y$ der Anzahl der geraden Ergebnisse. Bestimmen wir die Regressionsgerade von $X$ auf $Y$ und die Regressionsgerade von $Y$ auf $X$.