

**8. Übungsblatt**

Stetige Zufallsvektoren, Randverteilungen, Unabhängigkeit, Kovarianz

1. Seien  $X \sim U(0; 3)$  und  $Y \sim U(-1; 4)$  unabhängige Zufallsvariablen. Bestimmen wir:

a)  $\mathbb{P}(X < Y)$ ,      b)  $\mathbb{P}(X + Y = 1)$ ,      c)  $\mathbb{P}(XY < 1)$ .

2. Seien  $X, Y \sim U(0; 1)$  unabhängig,  $Z = 2X + 1$ ,  $V = 3Y$ .  $\mathbb{P}(V < Z) = ?$

3. Die Dichtefunktion des Zufallsvektors  $(X, Y)$  ist

$$f_{X,Y} : (s, t) \mapsto \begin{cases} 2(s^3 + t^3) & \text{falls } 0 < s < 1 \text{ und } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a)  $\mathbb{P}(X + Y < 1) = ?$       b)  $\mathbb{P}(X^2 < Y) = ?$   
 c) Geben wir die Randverteilungen von  $X$  und  $Y$ .      d)  $\mathbb{E}(X) = ?$   
 e) Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?

4. Die Verteilungsfunktion des absolut stetigen Zufallsvektors  $(X, Y)$  ist für  $0 < s < 1$  und  $|t| < 1$  durch die Formel

$$F_{X,Y}(s, t) = \frac{st^3 + s}{2}$$

definiert. Die Bildmenge von  $X$  ist das Intervall  $[0, 1]$ , und die Bildmenge von  $Y$  ist das Intervall  $[-1, 1]$ . Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zufallsvektor  $(X, Y)$  seinen Wert im Dreieck mit Ecken  $A(0, 0)$ ,  $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$  annimmt?

5. Die Dichtefunktion des Zufallsvektors  $(X, Y)$  ist

$$f_{X,Y} : (s, t) \mapsto \begin{cases} a(4s + t) + bst + \frac{2}{5} & \text{falls } 0 < s < 1, 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für einige reelle Zahlen  $a$  und  $b$ . Für welche Werte von  $a$  und  $b$  sind die Variablen  $X$  und  $Y$  unabhängig?

6. Der stetige Zufallsvektor  $(X, Y)$  ist uniform verteilt auf der Fläche begrenzt durch die  $x$ -Achse und die Sinuskurve  $y = \sin(x)$  zwischen den Punkten  $(0, 0)$  und  $(\pi, 0)$ . Bestimmen wir die gemeinsame Dichte von  $X$  und  $Y$ , sowie die Randdichte von  $X$ .

7. Es gibt drei Papierzettel mit Zahlen 1, 2 und 3 in einer Box. Wir ziehen zwei Zettel zufällig nacheinander (ohne Zurücklegen). Seien  $X$  die erste und  $Y$  die zweite gezogene Zahl.

a)  $\text{cov}(X, Y) = ?$     b)  $\text{cov}(X, X) = ?$     c)  $\text{cov}(Y, Y) = ?$     d) Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?

8. Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $\mathbb{E}(X) = 2$ ,  $\mathbb{E}(X^2) = 5$  und  $\mathbb{E}(X^3) = 14$ . Berechnen wir die Kovarianz  $\text{cov}(X, X^2 - 4X + 4)$ . Sind  $X - 2$  und  $(X - 2)^2$  unabhängig?

9. Zwei Würfel werden geworfen. Sei  $X$  die Anzahl der Augenzahlen 1, und sei  $Y$  die zweite Augenzahl. Bestimmen wir  $\text{cov}(X, Y)$ .

10. Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen mit gleichen (und endlichen) Varianzen. Zeigen wir, dass die Kovarianz von  $X + Y$  und  $X - Y$  gleich 0 ist.