

8. Gyakorlat

Kovariancia, együttes sűrűségfüggvény

1. Legyenek $X \sim U(0; 3)$ és $Y \sim U(-1; 4)$ független valószínűségi változók. Határozzuk meg az alábbi mennyiségeket:

a) $\mathbb{P}(X < Y) = ?$ b) $\mathbb{P}(X + Y = 1) = ?$ c) $\mathbb{P}(XY < 1) = ?$

2. Legyenek $X, Y \sim U(0; 1)$ függetlenek, $Z = 2X + 1$, $V = 3Y$. $\mathbb{P}(V < Z) = ?$

3. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 2(x^3 + y^3) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- (a) $\mathbb{P}(X + Y < 1) = ?$ (d) $\mathbb{E}(X) = ?$
(b) $\mathbb{P}(X^2 < Y) = ?$
(c) Adjuk meg X és Y perem-sűrűségfüggvényét. (e) Független-e X és Y ?

4. Az (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvényéről tudjuk, hogy minden $0 < x < 1$ és $|y| < 1$ esetén

$$F_{X,Y}(x, y) = \frac{xy^3 + x}{2}.$$

Az X értékkészlete a $[0, 1]$ intervallum, míg Y értékkészlete a $[-1, 1]$. Mennyi a valószínűsége, hogy az (X, Y) pár az $A(0, 0)$, $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ csúcspontok által meghatározott háromszög belsejébe esik? (Segítség: az együttes sűrűségfüggvény hasznos.)

5. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x, y) \mapsto \begin{cases} a(4x + y) + bxy + \frac{2}{5} & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

valamilyen a és b valós számok esetén. Milyen a és b értékek esetén lesznek X és Y független valószínűségi változók?

6. Az (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású az x tengely és az $y = \sin(x)$ szinuszgörbe által a $(0, 0)$ és a $(\pi, 0)$ pontok között határolt területen. Határozzuk meg X és Y együttes sűrűségfüggvényét, valamint X perem-sűrűségfüggvényét.

-
7. Egy kalapban egy-egy cédulára fel vannak írva az 1, 2, 3 számjegyek. Egymás után, visszatevés nélkül kiveszünk két cédulát. Legyen X az első, Y a második húzás eredménye.

a) $\text{cov}(X, Y) = ?$ b) $\text{cov}(X, X) = ?$ c) $\text{cov}(Y, Y) = ?$ d) Független-e X és Y ?

8. Legyen X olyan valószínűségi változó, amire $\mathbb{E}(X) = 2$, $\mathbb{E}(X^2) = 5$ és $\mathbb{E}(X^3) = 14$. Számítsuk ki $\text{cov}(X, X^2 - 4X + 4)$ -et. Független-e $X - 2$ és $(X - 2)^2$?

9. Két kockával dobunk, X az egyesek száma, Y a másodiknak dobott szám. Adjuk meg X és Y kovarianciáját.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha X és Y azonos (és véges) szórású valószínűségi változók, akkor $X + Y$ és $X - Y$ kovarianciája 0.

IMSc-feladat legközelebb jövő héten lesz.