

7. Übungsblatt

Normalverteilung, Satz von de Moivre–Laplace, zentraler Grenzwertsatz

1. Nehmen wir an, dass die Lebenszeit eines Apparats normalverteilt mit Erwartungswert 6,3 Jahre und mit Standardabweichung 2 Jahre ist.
 - a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Apparat vor dem Verfall der Garantie kaputtgeht, falls die Garantie 8 Jahre lang gilt?
 - b) Wie viel Jahre lang gilt die Garantie, falls die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Apparat erst nach dem Verfall der Garantie kaputtgeht, 0,95 ist?
 2. Eine Maschine ist so eingestellt, dass sie 2 kg Mehl in eine Tüte dosiert. Nach Erfahrung kann es angenommen werden, dass die Quantität des Mehls in den Tüten normalverteilt mit Standardabweichung 0,002 ist, und dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Maschine in eine Tüte weniger als 2 kg Mehl dosiert, 0,01 ist. Bestimmen wir den Erwartungswert der Verteilung.
 3. Der Wert einer normalverteilten Zufallsvariablen ist mit Wahrscheinlichkeit 0,2 kleiner als 10, und mit Wahrscheinlichkeit 0,3 größer als 14. Bestimmen wir die Parameter der Verteilung.
 4. Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable, für die die transformierte Variable $Y = 2X + 3$ standardnormalverteilt ist. Bestimmen wir die Parameter der Verteilung von X .
 5. Die Maßeinheit der Temperatur ist in Texas Grad Fahrenheit. Nach Erfahrungen ist das Tagesmittel der Lufttemperatur im Sommer normalverteilt mit Parametern $\mu = 86$ und $\sigma = 4$. Wie ändert sich die Verteilung, wenn wir die Einheit Grad Celsius benutzen? $\left(\frac{5}{9}(X [^{\circ}F] - 32) = Y [^{\circ}C]\right)$
 6. Sei $X \sim N(m; \sigma^2)$ und $Z = \left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2$. Bestimmen wir die Dichtefunktion von Z .
 7. Sei $X \sim N(m; \sigma^2)$. Berechnen wir $\mathbb{E}(e^{\alpha X})$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.
Bemerkung: Der allgemeine Fall kann (muss aber nicht) auf den Fall $(m, \sigma^2) = (0, 1)$ zurückgeführt werden.
-
8. Norbert ist wählerisch: er mag im Durchschnitt nur 1 von 10 Filmen. Er schaut 300 Filme. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 42 von diesen 300 Filmen ihm gefällt.
 9. 500 Studierenden besuchen eine Vorlesung. Vor der Prüfung wird eine Konsultation organisiert. Nach Erfahrung wissen wir, dass die Studierenden unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit 0,25 an einer Konsultation teilnehmen. Wie groß muss der Raum sein, damit sich alle Studierenden, die an der Konsultation teilnehmen, mindestens mit Wahrscheinlichkeit 0,9 hinsetzen können?
 10. Eine Teilaufgabe kann in einer $U(1;3)$ -verteilten Zeit durchgeführt werden, wobei die notwendigen Zeitdauern der einzelnen Teilaufgaben (gemeinsam) unabhängig sind. Wir führen die Teilaufgaben nacheinander durch. Im Fall von 1000 Teilaufgaben, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir innerhalb von weniger als 1984 Zeiteinheiten fertig werden?
 11. Seien $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ (gemeinsam) unabhängige Zufallsvariablen, wobei λ eine feste positive reelle Zahl ist. Geben wir eine Schätzung für λ an, falls wir wissen, dass $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i > \frac{n}{\lambda} + \frac{\sqrt{n}}{3}) = 0,1587$.
 12. Eine Fernsehsendung besteht aus kurzen nacheinanderfolgenden Live-Interviews. Die Gäste werden gebeten, m Minuten zu sprechen. Nach Erfahrungen ist der Erwartungswert der Länge eines Interviews (auch) m Minuten, und ihre Standardabweichung ist 10% ihrer Erwartungswert. Wie müssen wir m bei 10 Gästen wählen, um die 100 Minuten lange Zeitdauer der Sendung höchstens mit Wahrscheinlichkeit 0,03 überzugehen?
 13. Wir werfen 10 reguläre Würfel, sei X die Summe der Augenzahlen. Schätzen wir mittels des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(24 < X < 46)$ und $\mathbb{P}(31 \leq X \leq 39)$ ab.
-

In der Vorlesung:

14. Die Anzahl der Würmer in einer einzelnen Kirsche ist Poisson-verteilt mit Parameter λ , und die Anzahlen der Würmer in beliebig vielen unterschiedlichen Kirschen sind gemeinsam unabhängig.
- (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es in einer gegebenen Kirsche mindestens einen Wurm gibt?
 - (b) Wir kaufen 100 Stück Kirschen, bezeichne X die Anzahl der Würmer in diesen Kirschen insgesamt. Was ist der Erwartungswert und die Standardabweichung von X ?
 - (c) Schätzen wir die Wahrscheinlichkeit mittels geeigneter Approximation ab, dass wir in den 100 Kirschen mindestens 13 Würmer finden. *Der genaue Wert der Wahrscheinlichkeit muss nicht bestimmt werden. (Prüfung, Aufgabe 3, 12.06.2025.)*

Standardnormalverteilungstabelle

[illegible]