

7. Gyakorlat

Normális eloszlás, centrális határeloszlás-tétel

Végeredmények

1. Jelölje X az akkumulátor élettartamát. A feladat szövege szerint $X \sim N(6, 3; 4)$. Tudjuk, hogy normális eloszlású valószínűségi változó standardizáltja standard normális, azaz $\frac{X-6,3}{2} \sim N(0; 1)$.

a) A kérdés a $\mathbb{P}(X < 8)$ valószínűség.

$$\mathbb{P}(X < 8) = \mathbb{P}(X - 6,3 < 1,7) = \mathbb{P}\left(\frac{X-6,3}{2} < 0,85\right) = \Phi(0,85) = 0,8023$$

a standard normális eloszlás táblázatából.

b) Azt a G értéket keressük, amelyre teljesül, hogy $\mathbb{P}(X > G) = 0,95$, azaz $\mathbb{P}(X < G) = 0,05$.

Az a) részhez hasonlóan a standardizált eloszlásfüggvényével fejezzük ki a valószínűséget:

$$0,05 = \mathbb{P}(X < G) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 6,3}{2} < \frac{G - 6,3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{G - 6,3}{2}\right)$$

Ezt nem tudjuk közvetlenül kiolvasni a normális táblázatból, mert abban csak a 0,5-nél nagyobb valószínűségek szerepelnek. Ezért felhasználjuk a standard normális eloszlásfüggvény azon tulajdonságát, hogy minden x -re $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, így tehát

$$1 - 0,05 = 1 - \Phi\left(\frac{G - 6,3}{2}\right) = \Phi\left(-\frac{G - 6,3}{2}\right)$$

vagyis G -re teljesülnie kell, hogy

$$\Phi^{-1}(0,95) = -\frac{G - 6,3}{2}.$$

$\Phi^{-1}(0,95)$ az a szám, amelynél a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye a 0,95 értéket veszi fel. Mivel ilyen szám nincs a táblázatban, és 0,95 pont félúton van két táblázatbeli érték között, ezért a kisebbik szomszédját választjuk, azaz 0,9495-öt, amit az eloszlásfüggvény a táblázat alapján 1,64-ben vesz fel. Tehát

$$1,64 = -\frac{G - 6,3}{2}$$

Tehát átrendezve $G = 6,3 - 2 \cdot 1,64 = 3,02$

2. Jelölje X a zacskóba kerülő liszt mennyiségét, ekkor a feladat szövege szerint $X \sim N(m; 0,002^2)$ és $\mathbb{P}(X < 2) = 0,01$. Standardizálással tehát

$$0,01 = \mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}\left(\frac{X - m}{0,002} < \frac{2 - m}{0,002}\right) = \Phi\left(\frac{2 - m}{0,002}\right).$$

Mivel a bal oldalon álló 0,01 valószínűség kisebb, mint 0,5, át kell írni a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ képlet alapján, hogy az eredményt visszavezethessük a normális eloszlás táblázatára:

$$0,01 = 1 - \Phi\left(\frac{m - 2}{0,002}\right).$$

Tehát m -nek olyannak kell lennie, hogy teljesüljön, hogy

$$0,99 = \Phi\left(\frac{m - 2}{0,002}\right),$$

vagyis

$$\Phi^{-1}(0,99) = \frac{m - 2}{0,002}.$$

$\Phi^{-1}(0,99)$ az a szám, amelynél a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye a 0,99 értéket veszi fel. Mivel ilyen szám nincs a táblázatban, azt a számot választjuk, amelyiknél a 0,99-hez legközelebbi Φ -érték szerepel, tehát a 2,33-at. Vagyis

$$2,33 = \frac{m - 2}{0,002},$$

tehát átrendezés után

$$m \approx 2 + 2,33 \cdot 0,002 = 2,005.$$

3. Jelölje X a valószínűségi változót. Ekkor a feladat szövegéből $\mathbb{P}(X < 10) = 0,2$ és $\mathbb{P}(X > 14) = 0,3$. Jelölje az eloszlás két paraméterét m és σ^2 , azaz $X \sim N(m; 0, \sigma^2)$. Standardizálva

$$0,2 = \mathbb{P}(X < 10) = \mathbb{P}\left(\frac{X - m}{\sigma} < \frac{10 - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10 - m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{10 - m}{\sigma}\right)$$

azaz

$$\Phi\left(-\frac{10 - m}{\sigma}\right) = 0,8 \quad \implies \quad -\frac{10 - m}{\sigma} = 0,84$$

Hasonlóan

$$0,3 = \mathbb{P}(X > 14) = \mathbb{P}\left(\frac{X - m}{\sigma} > \frac{14 - m}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X - m}{\sigma} < \frac{14 - m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{14 - m}{\sigma}\right)$$

azaz

$$\Phi\left(\frac{14 - m}{\sigma}\right) = 0,7 \quad \implies \quad \frac{14 - m}{\sigma} = 0,52$$

Kaptunk tehát két egyenletet a két ismeretlenre, amit megoldhatunk például úgy, hogy először összeadjuk a két egyenletet:

$$-\frac{10 - m}{\sigma} + \frac{14 - m}{\sigma} = 0,84 + 0,52$$

Itt a bal oldal $\frac{4}{\sigma}$, ez egyenlő tehát 1,36-tal, amiből $\sigma = \frac{4}{1,36} = 2,9418$, azaz $\sigma^2 = 8,6542$.

Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe

$$0,84 = -\frac{10 - m}{\sigma} = \frac{m - 10}{\sigma} = \frac{m - 10}{2,9418}$$

amiből $m = 0,84 \cdot 2,9418 + 10 = 12,4711$.

4. Tudjuk, hogy ha $X \sim N(m; \sigma^2)$, akkor $Y = \left(\frac{X - m}{\sigma}\right)$ standard normális eloszlású. Itt $2X + 3$ standard normális eloszlású, amiből tehát $\frac{X - m}{\sigma} = 2X + 3$ adódik, így $X/\sigma = 2X$ miatt $\sigma = 1/2$ és így $\sigma^2 = 1/4$, ebből pedig $-m/\sigma = -2m = 3$, tehát $m = -1,5$. Vagyis $X \sim N(-1,5; 0,25)$.
5. Tudjuk, hogy egy normális eloszlású val. változó (nem nulla főegyütthatójú) lineáris transzformáltjai is normális eloszlásúak, így ha $X \sim N(86; 16)$ (ahol $86 = \mathbb{E}(X)$, $16 = \mathbb{D}^2(X)$), akkor $Y = \frac{5}{9}(X - 32)$ is normális eloszlású, és csak az eloszlás paramétereit kell meghatározni. A várható érték linearitása miatt

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{5}{9}(X - 32)\right) = \frac{5}{9}(\mathbb{E}(X) - 32) = \frac{5}{9} \cdot 54 = 30$$

és a szórásnégyzet azonosságai alapján

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2\left(\frac{5}{9}(X - 32)\right) = \mathbb{D}^2\left(\frac{5}{9}X - \frac{5}{9} \cdot 32\right) = \frac{25}{81} \mathbb{D}^2(X) = \frac{400}{81} \approx 4,938.$$

Így $Y \sim N(30; 4,938)$.

6. Előadáson elhangzott, hogy ha $X \sim N(m; \sigma^2)$, akkor $Y = \left(\frac{X - m}{\sigma}\right)$ standard normális eloszlású. $Z = Y^2$ eloszlásfüggvényét a szokásos módon úgy határozzuk meg, hogy először az eloszlásfüggvényét adjuk meg, majd abból deriválással a sűrűségfüggvényét. $Z = Y^2$ nemnegatív valószínűségi változó, ezért $F_Z(t) = \mathbb{P}(Z < t) = 0$, ha $t < 0$. Ha pedig $t \geq 0$, akkor

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbb{P}(Z < t) = \mathbb{P}(Y^2 < t) = \mathbb{P}(|Y| < \sqrt{t}) = \mathbb{P}(0 < Y < \sqrt{t}) + \mathbb{P}(-\sqrt{t} < Y \leq 0) = 2\mathbb{P}(0 < Y < \sqrt{t}) \\ &= 2(\Phi(\sqrt{t}) - \Phi(0)), \end{aligned}$$

Y eloszlásfüggvényének folytonossága és 0-ra való szimmetriája miatt. Ebből deriválással kapjuk Z sűrűségfüggvényét: ha $t \leq 0$, akkor $f_Z(t) = 0$, ha pedig $t > 0$, akkor a közvetett függvény deriválására vonatkozó szabály szerint

$$f_Z(t) = 2 \frac{d}{dt}(\Phi(\sqrt{t}) - \Phi(0)) = 2\Phi'(\sqrt{t}) \frac{1}{2\sqrt{t}} = 2\varphi(\sqrt{t}) \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{t})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}}.$$

Vagyis összefoglalva: $f_Z(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} & 0 < t \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

7. Tekintsük először a standard normális eloszlás esetét: $m = 0, \sigma^2 = 1$. Ekkor $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a transzformált várható értékére vonatkozó képlet szerint

$$\mathbb{E}(e^{\alpha X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{2\alpha x - x^2}{2}} dx.$$

A kitevőben lévő számlálóban lévő kifejezést egészítsük ki teljes négyzetté: $2\alpha x - x^2 = -(x^2 - 2\alpha x) = -(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \alpha^2) = -(x - \alpha)^2 + \alpha^2$. Így tehát

$$\mathbb{E}(e^{\alpha X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\alpha^2}{2}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2}} dx = e^{\frac{\alpha^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2}}}_{N(0; \alpha) \text{ sűrűv.}} dx = e^{\frac{\alpha^2}{2}},$$

ahol az utolsó lépés azért igaz, mert az $N(0; \alpha)$ sűrűségfüggvény integrálja az egész valós számegyenesen 1 (ahogy bármely más sűrűségfüggvényé is).

Legyen most $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma^2 > 0$ tetszőleges. Tudjuk, hogy ha $y \sim N(m; \sigma^2)$, akkor $Y = \sigma X + m$ egy $X \sim N(0; 1)$ eloszlású val. változóra (ez a val. változó persze nem más, mint $X = \frac{Y-m}{\sigma}$). Így $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{E}(e^{\alpha Y}) = \mathbb{E}(e^{\alpha(\sigma X + m)}) = \mathbb{E}(e^{\sigma \alpha X + \alpha m}) = \mathbb{E}(e^{\sigma \alpha X} e^{\alpha m}) = e^{\alpha m} \mathbb{E}(e^{\sigma \alpha X}) = e^{\alpha m} e^{\frac{\sigma^2 \alpha^2}{2}} = e^{\alpha m + \frac{\sigma^2 \alpha^2}{2}},$$

ahol az utolsó előtti lépés a várható érték linearitása miatt, az utolsó pedig a standard normális eloszlás esetére vonatkozó előbbi számítás eredménye miatt igaz.

8. A feladat szövege szerint annak a valószínűsége, hogy egy adott film tetszik Bélának $p = 0,1$.

Jelölje X a Bélának a megnézett 300 filmből tetsző filmek számát. A kérdés a $\mathbb{P}(X > 42)$ valószínűség. Mivel feltehetjük, hogy a filmek egymástól függetlenül tetszenek vagy nem tetszenek Bélának, X binomiális eloszlású $n = 300$ és $p = 0,1$ paraméterekkel. Ezért $\mathbb{E}(X) = 300 \cdot 0,1 = 30$ és $\mathbb{D}^2(X) = 300 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 27 \Rightarrow \mathbb{D}(X) = \sqrt{27} \approx 5,1962$.

A Moivre–Laplace-tétel értelmében X standardizáltja, $\frac{X-30}{5,1962}$, közelítőleg standard normális ($N(0; 1)$) eloszlású, ezért ha $Y \sim N(0; 1)$, akkor

$$\mathbb{P}(X > 42) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 30}{5,1962} > \frac{42 - 30}{5,1962}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 30}{5,1962} > 2,3094\right) \approx \mathbb{P}(Y > 2,3094) = 1 - \mathbb{P}(Y < 2,3094) = 1 - \Phi(2,3094),$$

ahol az utolsó előtti lépés azért igaz, mert a normális eloszlás eloszlásfüggvénye (Φ) folytonos, ezért $\mathbb{P}(Y < x) = 1 - \mathbb{P}(Y > x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re. Két tizedesre kerekítve az argumentumot, $\Phi(2,31)$ -et keressük ki a táblázatból, ami 0,9896.

A kért valószínűség tehát $\approx 1 - 0,9896 = 0,0104$

9. Jelölje X a konzultációra érkező hallgatók számát. Azt a legkisebb T teremméretet keressük, amelyre $\mathbb{P}(X < T) \geq 0,9$.

A feladat szövege alapján X binomiális eloszlású $n = 500$ és $p = 0,25$ paraméterekkel. Ezért $\mathbb{E}(X) = 500 \cdot 0,25 = 125$ és $\mathbb{D}^2(X) = 500 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 93,75 \Rightarrow \mathbb{D}(X) = \sqrt{93,75} \approx 9,6825$.

A Moivre–Laplace-tétel értelmében X standardizáltja, $\frac{X-125}{9,6825}$, közelítőleg standard normális ($N(0; 1)$) eloszlású, ezért

$$0,9 \leq \mathbb{P}(X < T) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 125}{9,6825} < \frac{T - 125}{9,6825}\right) \approx \Phi\left(\frac{T - 125}{9,6825}\right)$$

vagyis T -re teljesülnie kell, hogy

$$\Phi^{-1}(0,9) \leq \frac{T - 125}{9,6825}.$$

$\Phi^{-1}(0,9)$ az a szám, amelynél a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye a 0,9 értéket veszi fel. Mivel ilyen szám nincs a táblázatban, azt a számot választjuk, amelyiknél a 0,9-hez legközelebbi Φ -érték szerepel, tehát a 1,28-at. Vagyis

$$1,28 \leq \frac{T - 125}{9,6825},$$

tehát átrendezés után

$$T \geq 1,28 \cdot 9,6825 + 125 = 137,3936.$$

Vagyis $T \approx 138$.

10. Mivel $X_1, \dots, X_{12}$ függetlenek és azonos eloszlásúak, a CHT értelmében $X = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_i - 12 \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{12 \mathbb{D}(X_1)}}$ közelítőleg $N(0; 1)$ eloszlású. Tudjuk, hogy $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ és $\mathbb{D}(X_1) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X_1)} = \sqrt{\frac{(1-0)^2}{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$.
Vagyis $X = \sum_{i=1}^{12} X_i - 6$ nagyjából standard normális eloszlású.

Ezt úgy kell transzformálni, hogy nagyjából $N(5; 4)$ eloszlású, vagyis nagyjából normális eloszlású, 5 várható értékű és 4 szórásnégyzetű valószínűségi változót kapjunk. Mivel a (pontosan) normális eloszlású val. változók lineáris transzformáltjai is normális eloszlásúak, egy $Y = aX + b$ alakú val. változót keresünk, amelyre $\mathbb{D}^2(Y) = a^2 \mathbb{D}(X) = 4$ és $\mathbb{E}(Y) = a \mathbb{E}(X) + b = 5$. Az első feltétel alapján $a = \pm 2$. Ha $a = 2$, akkor $b = 5$, míg ha $a = -2$, b akkor is 5. Tehát $a = 2$ esetén $aX + b = 2X + 5 = 2(\sum_{i=1}^{12} X_i - 6) + 5 = 2 \sum_{i=1}^{12} X_i - 7$, $a = -2$ esetén pedig $aX + b = -2X + 5 = -2(\sum_{i=1}^{12} X_i - 6) + 5 = -2 \sum_{i=1}^{12} X_i + 17$ a közelítőleg $N(5; 4)$ eloszlású transzformált.

11. Jelölje $X_i, i = 1, \dots, 1000$ az egyes részfeladatok elkészítéséhez szükséges időt.

A kérdés a $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{1000} < 1984)$ valószínűség.

A feladat szövege szerint az X_i -k teljesen független, azonos, az $(1, 3)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Ezért egyrészt $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1+3}{2} = 2$ és $\mathbb{D}(X_i) = \frac{3-1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, másrészt összegük standardizáltjára alkalmazható a centrális határeloszlás-tétel, azaz $X = \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000 \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{1000 \mathbb{D}(X_1)}}$ közelítőleg $N(0; 1)$ eloszlású.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i < 1984\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000 \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{1000 \mathbb{D}(X_1)}} < \frac{1984 - 1000 \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{1000 \mathbb{D}(X_1)}}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000 \cdot 2}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}} < \frac{1984 - 1000 \cdot 2}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000 \cdot 2}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}} < -0,8764\right) \approx \Phi(-0,8764) \end{aligned}$$

a CHT alapján. Felhasználva a standard normális eloszlásfüggvény azon tulajdonságát, hogy minden x -re $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, a jobboldalon szereplő mennyiségre $\Phi(-0,8764) = 1 - \Phi(0,8764)$. A standard normális eloszlástáblázatban 0,8764-re nem szerepel az eloszlásfüggvény értéke, két tizedes jegyre kerekítve kell keresnünk, azaz $\Phi(0,88)$ -at keressük ki a táblázatból: $\Phi(0,88) = 0,8106$.

Így a keresett valószínűség $\approx 1 - \Phi(0,88) = 1 - 0,8106 = 0,1894$

12. Mivel az X_i -k λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{\lambda}$ és $\mathbb{D}(X_i) = \frac{1}{\lambda^2}$ minden i -re. Átrendezve a feladat szövegében szereplő kifejezést

$$\begin{aligned} 0,1587 &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i > \frac{n}{\lambda} + \frac{\sqrt{n}}{3}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{\lambda} > \frac{\sqrt{n}}{3}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{n}} > \frac{1}{3}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{\lambda}} > \frac{\lambda}{3}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n} \cdot \mathbb{D}(X_i)} > \frac{\lambda}{3}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n} \cdot \mathbb{D}(X_i)} < \frac{\lambda}{3}\right) \end{aligned}$$

Tekintve, hogy az X_i -k teljesen függetlenek, alkalmazható a centrális határeloszlás tétel, így a jobboldalon szereplő valószínűség $\Phi\left(\frac{\lambda}{3}\right)$ -mal közelíthető.

Így tehát $0,1587 \approx 1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{3}\right)$, azaz $\Phi\left(\frac{\lambda}{3}\right) \approx 1 - 0,1587 = 0,8413 \Rightarrow \frac{\lambda}{3} \approx \Phi^{-1}(0,8413)$.

A normális eloszlás táblázata alapján $\Phi(1) = 0,8413$, így $\frac{\lambda}{3} \approx 1$, azaz az eloszlás paramétere: $\lambda \approx 3$

13. Jelölje $X_1, \dots, X_{10}$ az egyes interjúk hosszát, ezek független, azonos eloszlású valószínűségi változók m várható értékkel és $m/10$ szórással. A feladat szerint tehát m -et úgy kell megválasztani, hogy $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{10} > 100)$ közelítőleg 0,03 legyen. Sztenderdizálunk:

$$0,03 \approx \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{10} > 100) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_{10} - 10 \overbrace{\mathbb{E}(X_1)}^{=m}}{\underbrace{\sqrt{10} \mathbb{D}(X_1)}_{=m/10}} > \frac{100 - 10 \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{10} \mathbb{D}(X_1)}\right),$$

amit a centrális határeloszlás-tétel (CHT) miatt $\mathbb{P}(Y > \frac{100-10\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{10}\mathbb{D}(X_1)})$ -gyel közelíthetünk, ahol $Y \sim N(0; 1)$. Az utóbbi valószínűséget a táblázatból kiolvasható alakra hozzuk:

$$\mathbb{P}\left(Y > \frac{100 - 10m}{\sqrt{10}m/10}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Y < \frac{100 - 10m}{m/\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{100 - 10m}{m/\sqrt{10}}\right).$$

Tehát azt az m -et keressük, amelyre $\Phi(\frac{100-10m}{m/\sqrt{10}}) \approx 0,97$, azaz $\frac{100-10m}{m/\sqrt{10}} \approx \Phi^{-1}(0,97) \approx 1,88$ (mert a táblázatban nincs 0,9700 érték, ehhez legközelebb pedig a $\Phi(1,88) \approx 0,9699$ értéke van). Ebből tehát azt kapjuk, hogy

$$100 - 10m \approx \frac{1,88}{\sqrt{10}}m,$$

vagyis

$$m \approx \frac{100}{\frac{1,88}{\sqrt{10}} + 10} \approx 9,439.$$

14. a) Tudjuk, hogy egy kockadobás eredményének várható értéke 3,5, szórásnégyszete pedig 35/12. Így ha $X_1, \dots, X_{10}$ független kockadobások eredményei, akkor $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{10} X_i) = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{E}(X_i) = 35$ és $\mathbb{D}^2(\sum_{i=1}^{10} X_i) = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{D}^2(X_i) = 10 \mathbb{D}^2(X_1) = \frac{350}{12}$. Legyen $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$.

a) CHT-vel: $\frac{(\sum_{i=1}^n X_i - n \mathbb{E}(X_1))}{\sqrt{n} \mathbb{D}(X_1)}$ (vagy máshogy kifejezve: $(X - \mathbb{E}(X))/\mathbb{D}(X)$) közelítőleg $N(0; 1)$ eloszlású. Így

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(24 < X < 46) &= \mathbb{P}\left(24 < \sum_{i=1}^{10} X_i < 46\right) = \mathbb{P}\left(\frac{24 - 35}{\sqrt{350/12}} < \frac{(\sum_{i=1}^n X_i - n \mathbb{E}(X_1))}{\sqrt{n} \mathbb{D}(X_1)} < \frac{46 - 35}{\sqrt{350/12}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(\frac{24 - 35}{\sqrt{350/12}} < Y < \frac{46 - 35}{\sqrt{350/12}}\right), \end{aligned}$$

ahol $Y \sim N(0; 1)$. A jobb oldalon álló kifejezés

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y < \frac{46 - 35}{\sqrt{350/12}}) - \mathbb{P}(Y < -\frac{46 - 35}{\sqrt{350/12}}) &= \mathbb{P}(Y < \frac{46 - 35}{\sqrt{350/12}}) - (1 - \mathbb{P}(Y < -\frac{46 - 35}{\sqrt{350/12}})) \\ &= 2 \mathbb{P}(Y < \frac{46 - 35}{\sqrt{350/12}}) - 1 \approx 2 \Phi(2,0368) - 1 \approx 2 \Phi(2,04) - 1 \approx 2 \cdot 0,9793 - 1 = 0,9586. \end{aligned}$$

b) CHT-vel az előzőhöz hasonlóan

$$\mathbb{P}(31 < X < 39) \approx 2 \mathbb{P}(Y < \frac{39 - 35}{\sqrt{350/12}}) - 1 \approx 2 \cdot \Phi(0,7407) - 1 \approx 2 \cdot \Phi(0,74) - 1 \approx 2 \cdot 0,7704 - 1 = 0,5408.$$

15. Megoldás.

(a) (4 pont)

(0 pont) Legyen Y egy adott cseresznyében lévő kukacok száma.

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(Y \geq 1)$

(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(Y = 0)$

(1 pont) $= 1 - e^{-0,1}$

(1 pont) $\approx 0,0952$.

(b) (7 pont)

(1 pont) $i = 1, \dots, 100$ esetén jelölje X_i - az i -edik cseresznyében lévő kukacok számát. Ekkor az X_i -k $\text{Pois}(0,1)$ -eloszlásúak, így $\mathbb{E}(X_i) = 0,1 = \mathbb{D}^2(X_i)$.

(0 pont) $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$.

(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{E}(X_i)$

(1 pont) $= 10$.

(1 pont) $\mathbb{D}^2(X_i) = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{D}^2(X_i)$

(1 pont) $= 10$,

(1 pont) mert függetlenek,

(1 pont) és így $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X_i)} = \sqrt{10} \approx 3,1623$ (numerikus végeredmény nélkül ez a pont nem jár).

(c) (9 pont)

(0 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \geq 13)$

(1 pont) $= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{13} X_i \geq 13)$ (persze jó összeadásokkal is, nem kell szumma jellel írni),

(3 pont) $= \mathbb{P}(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{100 \mathbb{D}^2(X_1)}} \geq \frac{13 - 100 \mathbb{E}(X_1)}{10 \mathbb{D}(X_1)}) = \mathbb{P}(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 10}{3,1623} \geq \underbrace{\frac{13 - 10}{3,1623}}_{\approx 0,9487})$; ebből az utolsó pont a jobb

oldal numerikus értékére jár (azt nem kell odaírni szövegesen, hogy sztenderdizálunk).

Az első két lépés összevonható, ha a (b)-ben kijöttek a jó végeredmények. Ebben az esetben úgy is jó, ha csak annyit ír a fenti helyett, hogy $\mathbb{P}(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\mathbb{D}(X)} \geq \frac{13 - \mathbb{E}(X)}{\mathbb{D}(X)})$ és/vagy $\mathbb{P}(\frac{X - 10}{\sqrt{10}} \geq \frac{13 - 10}{\sqrt{10}})$. De mindenképpen kell a jobb oldal numerikus értéke az egyik pontért, és az is, hogy ez honnan származik (legalább a numerikus műveletek elvégzését közvetlenül megelőző alak kell). (1 pont) Ezt a centrális határeloszlás-tétel (elég: CHT, nem jó: De Moivre–Laplace-tétel) miatt

(1 pont) közelíthetjük $\mathbb{P}(Z \geq 0,9487)$ -tel, ahol $Z \sim N(0; 1)$,

(0 pont) mivel az X_i -k függetlenek és azonos eloszlásúak (erre itt már nem jár pont, mert a (b)-ben nagyjából már járt rá). (1 pont) $\mathbb{P}(Z \geq 0,9487) = 1 - \mathbb{P}(Z < 0,9487) = 1 - \Phi(0,9487)$ (nem kötelező a Φ jelölés, viszont ha megvan, akkor a közbülső lépés elhagyható)

(1 pont) $\approx 1 - \Phi(0,95)$ (persze már előbb át lehet térni a 0,95-re)

(1 pont) $\approx 1 - 0,8289 = 0,1711$.