

7. Gyakorlat

Normális eloszlás, centrális határeloszlás-tétel

1. Tegyük fel, hogy egy akkumulátor élettartama normális eloszlású 6,3 év várható értékkel és 2 év szórással.
 - a) Ha 8 év a garancia, mekkora eséllyel tapasztalunk meghibásodást a garanciális idő lejárta előtt?
 - b) Hány év garanciát adjunk, hogy 0,95 legyen a valószínűsége, hogy a berendezés csak a garanciális idő után hibásodik meg?
 2. Egy gép a beállítása szerint 2 kg lisztet adagol a zacskókba, de a technológia következtében a zacskóba került liszt mennyisége $N(m; 0,002^2)$ eloszlást követ. Előzetes megfigyelésekből lehet tudni, hogy 0,01 annak a valószínűsége, hogy a zacskóban a liszt mennyisége kevesebb 2 kg-nál. Mennyi m ?
 3. Egy normális eloszlású valószínűségi változó 0,2 valószínűséggel vesz fel 10-nél kisebb értéket és 0,3 valószínűséggel 14-nél nagyobb értéket. Mik az eloszlás paraméterei?
 4. Legyen X normális eloszlású valószínűségi változó, amelyre $Y = 2X + 3$ standard normális eloszlású. Határozzuk meg X eloszlásának paramétereit.
 5. Texasban a hőmérsékletet Fahrenheit fokokban mérik. Megállapították, hogy az ottani hőmérséklet eloszlása nyaranta $N(86; 16)$. Hogyan változik meg az eloszlás, ha áttérünk Celsius-skálára?
 $\left(\frac{5}{9}(X - 32) [^{\circ}F] = Y [^{\circ}C]\right)$
 6. Legyen $X \sim N(m; \sigma^2)$ és $Z = \left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2$. Számoljuk ki Z sűrűségfüggvényét.
 7. Legyen $X \sim N(m; \sigma^2)$. Számoljuk ki $\mathbb{E}(e^{\alpha X})$ -et $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén.
Megjegyzés: Az általános esetet vissza lehet vezetni az $(m, \sigma^2) = (0, 1)$ esetre (de nem kötelező).
-
8. Béla elég válogatós filmek tekintetében: 10 filmből átlagosan egyet tart jónak. Mi a valószínűsége, hogy 300 film megnézése esetén, több mint 42 neki tetszőt talál?
 9. Egy BME-VIK évfolyamon 500 diák hallgat egy tárgyat. A vizsgadolgozat előtt konzultációt szerveznek. Előzetes felmérések szerint a hallgatók külön-külön, egymástól függetlenül 0,25 valószínűséggel jönnek el a konzultációra. Hány fős terem kell ahhoz, hogy a konzultációra érkező hallgatók 90%-os biztonsággal mind elférjenek a teremben?
 10. Számítógéppel szimuláltuk az $X_1, X_2, \dots, X_{12} \sim U(0; 1)$ (együttesen) független véletlen számokat. Ezek segítségével állítsunk elő közelítőleg $N(5; 4)$ normális eloszlású véletlen számot.
 11. Egy részfeladat elkészítéséhez szükséges idő mennyisége $U(1; 3)$ eloszlású, ahol az egyes részfeladatokhoz szükséges idők mennyiségei (együttesen) függetlenek. A részfeladatokat egymás után végezzük. Ezer részfeladat esetén mi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 1984 időegység alatt elkészülünk?
 12. Legyenek $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ (együttesen) független valószínűségi változók, ahol λ rögzített pozitív valós szám. Adjunk közelítést λ értékére, ha tudjuk, hogy $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i > \frac{n}{\lambda} + \frac{\sqrt{n}}{3}) = 0,1587$.
 13. Egy tévéműsorban rövid interjúkat adnak le élőben, egymás után. Az interjúalanyokat megkérlik, hogy m percre számoljanak a mondanivalójukkal. A tapasztalatok szerint így egy interjú hosszának várható értéke m , szórása pedig a várható értékének a 10%-a. Milyen m -et mondjanak a szervezők az aznapi 10 alanynak, ha azt szeretnék, hogy közelítőleg 3% eséllyel fussanak túl a 100 perces műsoridőn?
 14. Tíz szabályos dobókockával dobunk, legyen X a dobott számok összege. Becsüljük CHT-vel a $\mathbb{P}(24 < X < 46)$ és a $\mathbb{P}(31 \leq X \leq 39)$ valószínűségeket.
-

Előadáson:

15. Egy adott szem cseresznyében lévő kukacok száma Poisson-eloszlású $\lambda = 0,1$ paraméterrel, és bármennyi különböző cseresznyében lévő kukacok számai együttesen függetlenek.
 - (a) Mi a valószínűsége, hogy egy adott szem cseresznyében van legalább egy kukac?
 - (b) Veszünk 100 szem cseresznyét, jelölje X az ezekben lévő kukacok számának összegét. Mennyi X várható értéke és szórása?
 - (c) Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy a 100 szem cseresznyében összesen legalább 13 kukacot találunk. *A valószínűség pontos értéket nem kell meghatározni, arra nem jár pont. (Vizsgakurzus vizsgája, 3. feladat, 2025.06.12.)*

IMSc 7. Számítsuk ki a 14. feladatban szereplő valószínűségek pontos értékét (szabad számológépet használni).
Hány tizedesjegy pontossággal jók a CHT által adott közelítések?

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

[illegible]