

6. Übungsblatt

Exponential- und uniforme Verteilung, Erwartungswert im stetigen Fall, transformierte Zufallsvariablen

1. Wir warten auf Sternschnuppen in einer frühen Augustnacht. Wir wissen, dass die Chance, dass wir bereits in den ersten 20 Minuten eine Sternschnuppe sehen, gleich $1 - e^{-\frac{2}{3}}$ ist. Wir können annehmen, dass die verbleibende Zeit bis zur Beobachtung der Sternschnuppe nicht von der Dauer der bereits vergangenen Zeit abhängt (also ist die Verteilung stetig und gedächtnislos). Mit welcher Wahrscheinlichkeit sehen wir (mindestens) eine Sternschnuppe in der ersten Stunde? Wie groß ist die Varianz der verbleibenden Zeit bis zur Beobachtung der ersten Sternschnuppe?
2. Nehmen wir an, dass eine Waschmaschine im Durchschnitt 2 Jahre lang ohne Fehler funktioniert, und dass der Zeitpunkt des ersten Fehlers durch eine stetige gedächtnislose Verteilung beschrieben wird. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Waschmaschine in den ersten 3 Jahren ohne Fehler funktioniert, wenn wir wissen, dass sie in den ersten 2 Jahren fehlerlos funktionierte?
3. Eine Software funktioniert fehlerbehaftet: ihr Lauf stoppt ab und zu und dann muss sie neugestartet werden. Die Laufzeit des Programms zwischen zwei Abbrüchen ist exponentialverteilt mit Parameter $1/10$. Dominik startet das Programm am Ende seiner Arbeitszeit, d.h. um 16 Uhr. Wenn er die Arbeit nächsten Tag um 8 Uhr anfängt, läuft das Programm immer noch. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Programm bis zu Dominiks Mittagspause, also bis 12 Uhr nicht neugestartet werden muss?
4. Seien X und Y exponentialverteilte Zufallsvariablen. Nehmen wir an, dass der Erwartungswert von X zweimal der Erwartungswert von Y ist, und dass $3\mathbb{P}(X > 1) = 2\mathbb{P}(Y < 1)$ gilt. Was ist der Erwartungswert und die Varianz von X ?
5. In einer bestimmten Bankfiliale folgt die Wartezeit einer stetigen und gedächtnislosen Verteilung. Wir wissen auch, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde/eine Kundin mindestens eine Stunde warten muss, gleich e^{-2} ist. Drei Freund(inn)e(n), Adam, Bettina und Cecilia besuchen diese Filiale zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Nehmen wir an, dass ihre Wartezeiten (gemeinsam) unabhängig sind. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei von ihnen mindestens eine halbe Stunde warten muss? (*Prüfung am 26.06.2025, Aufgabe 5*)

-
6. Werfen wir einen fairen Würfel, bezeichne X das Ergebnis. Geben wir die Verteilungsfunktion von $Y = |X - 3|$ an. Bestimmen wir die Größen $\int_0^\infty (1 - F_Y(y))dy$ und $\mathbb{E}(Y)$.
 7. Die Dichte einer stetigen Zufallsvariablen ist

$$f_X : x \mapsto \begin{cases} 2x, & \text{falls } 0 < x < a, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $a > 0$ eine geeignete Konstante ist. Bestimmen wir den Wert von a . Wie groß ist X im Durchschnitt?

8. Der Kraftstofftank einer Tankstelle wird jede Woche nachgefüllt. Sei X der wöchentliche Bezinverbrauch (angegeben in hunderttausend Liter), und nehmen wir an, dass die Dichtefunktion von X folgenderweise definiert ist:

$$f_X : t \mapsto \begin{cases} 5(1-t)^4 & \text{falls } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Wie groß muss die Kapazität des Tanks sein, damit man eine Wahrscheinlichkeit kleiner als 0,05 dafür hat, dass der Kraftstoff in einer Woche nicht genug ist? Wie groß ist der erwartete durchschnittliche wöchentliche Verbrauch?

9. Sei die Dichte von X die folgende: $f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, falls $0 < x < 1$ und 0 sonst. Sei $Y = X\sqrt{X}$.
- Bestimmen wir die Verteilungsfunktion von X .
 - Bestimmen wir die Verteilungsfunktion von Y .
 - Bestimmen wir die Dichtefunktion von Y .
 - Bestimmen wir $\mathbb{E}(Y)$ mit Hilfe der Dichte von Y .
 - Leiten wir $\mathbb{E}(X\sqrt{X})$ auch mit Hilfe der Dichte von X her.
10. Sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $Y = X^2$. Bestimmen wir die Dichte und den Erwartungswert von Y .
11. Sei $X \sim U(0; 1)$, beziehungsweise $Y = \sqrt{2X}$, $V = \ln \frac{1}{X}$ und $Z = \arctg(X)$. Bestimmen wir die Dichte von Y , V und Z .
12. In den USA druckt man den Verbrauch von Autos in Meile pro Gallone (mpg) aus, also gibt man an, wie viele Meilen der Wagen mit einer Gallone Treibstoff befahren kann. In Europa, wie bekannt, der Verbrauch wird in der Form Liter/(100 km) angegeben. Wir wissen, dass der mpg Verbrauch eines bestimmten Autos durch die Dichte f_X beschreiben wird. Wie müssen wir f_X transformieren, um auf die Skala Liter/(100 km) zu kommen? (1 Meile = a km, 1 Gallone = b Liter, wobei $a = 1,609$ und $b = 3,785$. Wir dürfen annehmen, dass die Verteilungsfunktion F_X in jedem Punkt differenzierbar ist, wo ihr Wert nicht Null ist.)
13. Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X ist

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1, \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}, & \text{ha } 1 < x < 2, \\ 1, & \text{ha } x \geq 2. \end{cases}$$

- Bestimmen wir die Dichte von X .
- Bestimmen wir den Erwartungswert von X .
- Sei Y uniform verteilt auf dem Intervall $(1, 2)$. Zeigen wir, dass es für jedes $k \in \{1, 2, \dots\}$ gilt, dass $\frac{3}{2} \mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^{k+1})$.

(Zweite Wiederholung der Klausur, 11.12.2023, Aufgabe 5)

14. Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable, für die $\mathbb{P}(X > 3) = e^{-6}$ gilt.
- Was ist der Parameter (λ) der Verteilung von X ?
 - $\mathbb{P}(X < 2) = ?$
 - $\mathbb{E}(X) = ?$
15. Auf der Budapester U-Bahn-Linie M3 schläft ein müder Passagier ein, und danach wacht er in einem zufälligen Punkt der Linie der Länge 16,4 km auf. Der Abstand X zwischen diesem Punkt und einem festen Endbahnhof der Linie (sagen wir, Kőbánya-Kispest) ist also uniform verteilt. Wie viele Kilometer sind die Standardabweichung von X ? Würde es sich die Antwort ändern, wenn wir dieselbe Frage bezüglich einer anderen Metrolinie mit derselben Länge stellen würden?
16. Zwei Punkte werden zufällig auf zwei gegenüberliegenden Seiten des Einheitsquadrats ausgewählt, sei X das Quadrat des Abstands der Punkte. Was ist der durchschnittliche Wert von X ?
17. Drei Zahlen werden zufällig im Intervall $(0, 1)$ ausgewählt. Sei Y der Wert der mittleren Zahl. Was ist der Erwartungswert von X ?
18. Sei $x \mapsto F_X(x)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X . Drucken wir die Verteilungsfunktionen der folgenden Zufallsvariablen mit Hilfe von F_X aus:
- $Y = \max\{0; X\}$
 - $Z = -X$
 - $V = |X|$
 - $W = \min\{0; -X\}$.

Name der Verteilung	Notation	$\text{Ran}(X)$	$F_X(t)$	$p_X(k), f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikatorvariable Bernoulli-Verteilung	$\mathbb{1}_A$ $B(p)$	$\{0, 1\}$		$p_X(0)=1-p, p_X(1)=p$ $(p = \mathbb{P}(A))$	p	$p(1-p)$
Binomialverteilung	$\text{Bin}(n; p)$	$\{0, 1, \dots, n\}$		$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson-Verteilung	$\text{Pois}(\lambda)$	$\{0, 1, 2, \dots\}$		$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
geometrische Verteilung	$\text{Geo}(p)$	$\{1, 2, \dots\}$		$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
uniforme Verteilung	$U(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (falls $t \in (a; b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (falls $t \in (a; b)$)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentialverteilung	$\text{Exp}(\lambda)$	$[0; \infty)$	$1 - e^{-\lambda t}$ (falls $t \in (0; \infty)$)	$\lambda e^{-\lambda t}$ (falls $t \in (0; \infty)$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$