

6. Gyakorlat

Exponenciális és egyenletes eloszlás. Eloszlástranszformációk és várható érték folytonos esetben
Végeredmények és megoldások

1. Jelölje X az első hullócsillag észleléséig eltelt időt órában mérve. A feladat szövege szerint ez folytonos és örökifjú eloszlású, ezért exponenciális eloszlású, mert az az egyetlen örökifjú eloszlás a folytonos eloszlások közül. Jelölje λ az eloszlás paraméterét, azaz $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Az, hogy az első 20 percben látunk hullócsillagot, pont azt jelenti, hogy az első hullócsillag észleléséig eltelt idő kevesebb, mint 20 perc, azaz $X < \frac{1}{3}$, hiszen az időt órában mérjük. Ez pedig definíció szerint X eloszlásfüggvényének értéke az $\frac{1}{3}$ helyen. Mivel a λ paraméterű exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye $x > 0$ esetén $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ezért tehát a feladat szövegéből $1 - e^{-\frac{2}{3}} = F_X\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - e^{-\lambda \cdot \frac{1}{3}}$, amiből azonnal látjuk, hogy $\lambda = 2$.

A feladat első kérdése a $\mathbb{P}(X < 1)$, azaz az eloszlásfüggvény értéke az 1 helyen. $\mathbb{P}(X < 1) = F_X(1) = 1 - e^{-\lambda \cdot 1} = 1 - e^{-2 \cdot 1} = 1 - e^{-2} \approx 0,8647$.

Mivel a hullócsillag észleléséig eltelt idő örökifjú eloszlású, ezért a hátralévő idő eloszlása, és így a szórásnégyzete is megegyezik az első hullócsillag észleléséig eltelt idő eloszlásával, illetve szórásnégyzetével. A második kérdésben tehát X szórásnégyzetét kell megadnunk. Mivel a λ paraméterű exponenciális eloszlás szórásnégyzete $\frac{1}{\lambda^2}$, ezért $\mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

2. Tekintsünk egy adott típusú mosógépet, és jelölje X a mosógép első meghibásodásáig eltelt időt. A feladat szövege szerint X folytonos és örökifjú eloszlású, azaz exponenciális, mert ez az egyetlen örökifjú eloszlás a folytonos eloszlások közül. Jelölje λ az eloszlás paraméterét, azaz $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Az is kiderül a szövegből, hogy $\mathbb{E}(X) = 2$, amiből $\lambda = \frac{1}{2}$ következik, hiszen a λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke $\frac{1}{\lambda}$.

A kért valószínűség a $\mathbb{P}(X > 3 | X > 2)$, ami az örökifjú tulajdonság miatt egyenlő a $\mathbb{P}(X > 1)$ valószínűséggel. Ez viszont a folytonosság miatt megegyezik a $\mathbb{P}(X \geq 1)$ valószínűséggel. Tehát

$$\mathbb{P}(X > 3 | X > 2) = \mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - F_X(1) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 1}) = e^{-\lambda \cdot 1} = e^{-\lambda} = e^{-1/2} \approx 0,6065$$

3. Tekintsük a délután 4 órát (amikor Dominik elindítja a szoftvert) a $t = 0$ időpontnak és jelöljük X -szel az ettől az időponttól elkezdve az ezt követő első leállás idejéig eltelt időt, ekkor a feladat szerint X exponenciális eloszlású $\lambda = 1/10$ paraméterrel. Délután 4-től másnap reggel 8-ig 16, onnantól pedig délig újabb 4 óra telik el, vagyis délután 4-től másnap délig összesen 20 óra, tehát a keresett valószínűség $\mathbb{P}(12\text{-ig egyszer sem áll le} | 8\text{-ig egyszer sem áll le}) = \mathbb{P}(X > 20 | X > 16)$. Az exponenciális eloszlás örökifjúsága miatt ez $\mathbb{P}(X > 20 - 16) = \mathbb{P}(X > 4)$ -gyel egyenlő, ami a valószínűségi változó folytonosságának köszönhetően

$$\mathbb{P}(X > 4) = \mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(X < 4) = 1 - F_X(4) = 1 - (1 - e^{-4\lambda}) = e^{-0,4} \approx 0,6703.$$

Megjegyzés: Az nem egészen egyértelmű a feladat szövegéből, hogy $\mathbb{P}(X > 20 | X > 16)$ -t keressük és nem ugyanazt $\geq$ -kkel, de utóbbi esetben sem változna a végeredmény.

4. Jelölje λ_x és λ_y a két exponenciális eloszlás paraméterét. Egy λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke $\frac{1}{\lambda}$, így a feladat szövege szerint $\frac{1}{\lambda_x} = \mathbb{E}(X) = 2 \mathbb{E}(Y) = \frac{2}{\lambda_y}$, amiből a paraméterekre $\lambda_y = 2 \cdot \lambda_x$ adódik.

A másik feltételben szereplő két valószínűséget fejezzük ki az eloszlásfüggvény segítségével. $\mathbb{P}(Y < 1) = F_Y(1) = (1 - e^{-\lambda_y \cdot 1}) = 1 - e^{-\lambda_y}$, míg a folytonosság miatt $\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X \geq 1)$, így $\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - F_X(1) = 1 - (1 - e^{-\lambda_x \cdot 1}) = e^{-\lambda_x}$.

A feladat szövege szerint tehát $3 \cdot e^{-\lambda_x} = 3 \mathbb{P}(X > 1) = 2 \mathbb{P}(Y < 1) = 2 \cdot (1 - e^{-\lambda_y \cdot 1})$

Az elején kapott $\lambda_y = 2 \cdot \lambda_x$ -et behelyettesítve, $3 \cdot e^{-\lambda_x} = 2 \cdot (1 - e^{-2 \cdot \lambda_x})$

Ha $e^{-\lambda_x}$ helyébe a -t helyettesítünk, akkor $e^{-2 \cdot \lambda_x} = a^2$, és azonnal látjuk, hogy egy másodfokú egyenletünk van a -ra: $3a = 2(1 - a^2)$, azaz átrendezve $2a^2 + 3a - 2 = 0$. Megoldva $a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$. Az $a_2 = -2$ nem megoldás, hiszen $a = e^{-\lambda_x}$, ami mindig pozitív. Ezért az $a_1 = \frac{1}{2}$, az egyetlen megoldás, azaz $e^{-\lambda_x} = \frac{1}{2}$, amiből $\lambda_x = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$.

Így tehát $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda_x} = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,4427$

5. Megoldás.

(1 pont) A várakozási idő, amit X -szel fogunk jelölni, exponenciális eloszlású,

(1 pont) mert folytonos és örökifjú eloszlás csak exponenciális lehet.

(1 pont) A megadottak szerint $e^{-2} = \mathbb{P}(X \geq 1)$

(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X < 1)$.

(1 pont) Tehát $F_X(1) = \mathbb{P}(X < 1) = 1 - e^{-2 \cdot 1}$ (nem baj, ha nem szerepel az F_X jelölés és az 1-gyel való szorzás, ha utána jó következtetés jön)

(1 pont) és így az eloszlás paramétere $\lambda = 2$ (pl. a nevezetes eloszlás táblázat alapján, nem kell indokolni).

1. megoldás.

(1 pont) Jelölje Y a három barát közül azoknak a számát, akiknek legalább fél órát kell várniuk.

(1+1+1 pont) Ekkor Y binomiális eloszlású $n = 3$ és $p = \mathbb{P}(X \geq 1/2)$ paraméterrel,

(2 pont) ahol $\mathbb{P}(X \geq 1/2) = 1 - \mathbb{P}(X < 1/2) = 1 - (1 - e^{-2 \cdot 1/2}) = e^{-1}$ (a 2. és a 3. lépés közül **az egyik** elhagyható, ha a másik helyesen szerepel).

(2 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(Y \geq 2)$

(1 pont) $= \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(Y = 3)$

(1+1 pont) $= \binom{3}{2} \cdot (e^{-1})^2(1 - e^{-1}) + \binom{3}{3} \cdot (e^{-1})^3$ (a $\binom{3}{3}$ elhagyható és a $\binom{3}{2}$ helyett szabad 3-at írni)

(1+1 pont) $= 0,2566 + 0,0498$ (nem kell jobban részletezni, mert be lehet írni a számológépbe)

(1 pont) $= 0,3064$ (az előzővel összevonható, ha rekonstruálható, hogy mit írt a számológépbe).

2. megoldás.

(0 pont) Jelölje rendre A, B és C azt az eseményt, hogy Ádámának, Bettinek, illetve Cilinek legalább fél órát kell várnia.

(1+1 pont) Ekkor annak az eseménynek a valószínűségét kell meghatározni, hogy A, B és C közül legalább kettő bekövetkezik, vagyis $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ -ét. (Nem kell ennyire formálisan, ha valahogy pl. Venn-diagrammal előremutató módon kifejezi, az is jó.)

(2 pont) $\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - 2\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$,

(2 pont) mert... (ezt lehet a három halmazos Poincaré-formulával is indokolni $A \cap B$ -re, $A \cap C$ -re és $B \cap C$ -re felírva, bármely kettes metszet a hármas metszettel egyezik meg, ekkor 1 pont a Poincaré-formula említésére, 1 pont pedig az érdemi magyarázatul szolgáló képletre jár; vagy az is jó, ha szövegesen elmondja, hogy mit hányszor számoltunk, ekkor nem kell a Poincaré-formulára hivatkozni).

(2 pont) ami $3\mathbb{P}(A)^2 - \mathbb{P}(A)^3$ -el egyezik meg,

(1 pont) mert a három barát várakozási idői (együttesen) függetlenek (avagy: A, B, C (együttesen) függetlenek)

(1 pont) és azonos eloszlásúak (avagy: A, B, C azonos valószínűségűek).

(1 pont) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geq 1/2)$

(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X < 1/2)$

(1 pont) $= 1 - (1 - e^{-2 \cdot 1/2}) = e^{-1}$ (OK indoklás nélkül is),

(1 pont) vagyis a keresett valószínűség $3 \cdot (e^{-1})^2 - 2(e^{-1})^3 \approx 0,3064$.

6. Mivel Y nemnegatív valószínűségi változó, amelynek várható értéke véges (mert értékkészlete is véges), $\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty (1 - F_Y(y))$ az előadáson elhangzott (vagy esetleg csak a jövőben elhangzó) állítás alapján mindenképpen teljesül. De könnyen ki is számolhatjuk mindkettőt és meggyőződhetünk róla, hogy egyenlőek.

Ha $X = 1$ vagy $X = 5$, akkor $Y = 2$. Ha $X = 2$ vagy $X = 4$, akkor $Y = 1$. Ha $X = 3$, akkor $Y = 0$, és végül ha $X = 6$, akkor $Y = 3$. Így tehát (mivel X mind a hat értékét $1/6$ - $1/6$ valószínűséggel veszi fel) $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 3) = 1/6$ és $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 2) = 1/3$. Innen $\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot 1/3 + 2 \cdot 1/3 + 3 \cdot 1/6 = 1,5$. Továbbá az Y diszkrét val. változó eloszlásfüggvényét az $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \sum_{k \in \text{Ran}(Y): k < y} \mathbb{P}(Y = k)$ képlettel kapjuk:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{1}{6} & 0 < y \leq 1 \\ \frac{3}{6} & 1 < y \leq 2 \\ \frac{5}{6} & 2 < y \leq 3 \\ 1 & y > 3 \end{cases}$$

Így $\int_0^\infty (1 - F_Y(y)) dy = \int_0^1 (1 - \frac{1}{6}) dy + \int_1^2 (1 - \frac{3}{6}) dy + \int_2^3 (1 - \frac{5}{6}) dy = [5x/6]_0^1 + [3x/6]_1^2 + [x/6]_2^3 = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1,5$.

7. a -t úgy kell megválasztani, hogy f_X sűrűségfüggvény legyen, vagyis nemnegatív legyen (ez nem probléma, mert $2x > 0$, ha $x > 0$, és ha $x \leq 0$, akkor $f_X(x) = 0$) és az integrálja $-\infty$ -tól ∞ -ig 1 legyen. Mivel a sűrűségfüggvény a $(0, a)$ intervallumon kívül konstans, a -nak pozitívnak kell lennie és olyannak, hogy $\int_0^a 2x dx = 1$ teljesüljön, vagyis $1 = \int_0^a 2x dx = [x^2]_0^a = a^2 - 0 = a^2$, tehát $a = 1$.

X átlagos nagysága, vagyis várható értéke $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^\infty x f_X(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = [2x^3/3]_0^1 = \frac{2}{3}$.

8. Jelölje a tartály kapacitását K . Ezt kellene úgy megválasztani, hogy $\mathbb{P}(X > K) < 0,05$ teljesüljön. Mint minden intervallum valószínűségét, a $\mathbb{P}(X > K)$ valószínűséget is a sűrűségfüggvény intervallum határok közötti integrálásával kapjuk. Tekintve, hogy a sűrűségfüggvény csak 0 és 1 között nem nulla, az integrálás K -tól csak 1-ig történik és nem végtelenig.

$$\mathbb{P}(X > K) = \int_K^\infty f_X(x) dx = \int_K^1 5(1-x)^4 dx = \left[-(1-x)^5 \right]_K^1 = (1-K)^5$$

Tehát az kell, hogy $(1-K)^5 < 0,05$ legyen, amiből $K > 1 - \sqrt[5]{0,05} \approx 0,45072$.

Azaz a tartály kapacitása legalább $45'072 \ell$ kell, hogy legyen.

Az átlagos heti fogyasztás X várható értéke, amit definíció szerint számolhatunk

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^\infty x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 5(1-x)^4 dx =$$

Helyettesítsünk $(1-x)$ helyébe y -t, ekkor $dx = -dy$, de ez a negatív előjel az integrálási határok $1 - 0$ -ról való $0 - 1$ -re visszafordításával eltűnik, így tehát a fenti várható érték tovább

$$= \int_0^1 (1-y) \cdot 5(y)^4 dy = \int_0^1 5(y^4 - y^5) dy = \left[y^5 - \frac{5y^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \approx 0,16667$$

Tehát az átlagos heti fogyasztás $16'667 \ell$.

Megjegyzés: Helyettesítéses integrálás nélkül is kiszámíthatjuk a várható értéket, ha $(1-x)^4$ -et a binomiális tétel segítségével tagokra bontjuk: $(1-x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$. Ez azonban több számolással jár, mint a fenti megoldás.

9. a) $x \in \mathbb{R}$ esetén az eloszlásfüggvény $F_X(x)$ értékét az $f_X(t)$ sűrűségfüggvény $t = -\infty$ -tól $t = x$ -ig való integrálásával kapjuk meg. Ha $x \leq 0$, akkor a konstans 0 függvényt integráljuk, ezért $F_X(x) = 0$. Ha $x > 1$, akkor hasonlóan $\int_x^\infty f_X(t) dt = 0$, és mivel $\int_{-\infty}^\infty f_X(t) dt = 1$ a sűrűségfüggvény karakterizációja alapján, ezért $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = 1$.

Ha $0 < x \leq 1$, akkor elég $-\infty$ helyett 0-tól x -ig integrálni a sűrűségfüggvényt (mert ezalatt konstans 0):

$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = [\sqrt{t}]_0^x = \sqrt{x}$. Összefoglalva tehát:

$$\begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

- b) Először is határozzuk meg Y értékészletét: mivel $X \in (0, 1)$, ezért $Y = X\sqrt{X} = X^{3/2} \in (0, 1)$,

tehát $\text{Ran}(Y) = (0, 1)$. Tehát ha $y \leq 0$, akkor $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = 0$, és ha $y > 1$, akkor $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = 1$. Ha pedig $0 < y \leq 1$, akkor

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(X^{3/2} < y) \stackrel{*}{=} \mathbb{P}(X < y^{2/3}) = F_X(y^{2/3}) = \sqrt{y^{2/3}} = y^{1/3} = \sqrt[3]{y}.$$

A *-gal jelölt lépésnél azt használtuk, hogy az $x^{3/2} \mapsto x$, vagyis más szavakkal $x \mapsto x^{2/3}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű és szigorúan monoton növekvő a $(0, 1]$ intervallumon. Összefoglalva

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \sqrt[3]{y} & 0 < y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

c) Y sűrűségfüggvényét F_Y deriválásával kapjuk (a szakaszhatárokon pedig konvenció szerint 0 az értéke):

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ F'_Y(y) = \frac{1}{3y^{2/3}} & 0 < y < 1 \\ 0 & y \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y \frac{1}{3y^{2/3}} dy = \int_0^1 \frac{y^{1/3}}{3} dy = \left[\frac{3}{4} \frac{y^{4/3}}{3} \right]_{y=0}^1 = \frac{1}{4}.$$

e) A folytonos val. változó transzformáltjára vonatkozó képletet használjuk: $Y = g(X)$, ahol $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x\sqrt{x}$, így

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = \int_0^1 x\sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \int_0^1 x/2 dx = [x^2/4]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Megjegyzés: Az eredmény persze ugyanaz, mint a d)-nél, és látjuk azt is, hogy $\mathbb{E}(Y)$ meghatározásához nincs szükségünk Y eloszlás- és sűrűségfüggvényére, sőt az adott esetben X eloszlásából kiindulva még könnyebb is a számolás, mint Y eloszlásából kiindulva.

10. A sűrűségfüggvény megadásához, határozzuk meg először az eloszlásfüggvényt, amiből a sűrűségfüggvény deriválással már adódik. (*Megjegyzés:* Mindig célszerű így elindulni, hiszen az eloszlásfüggvény egy valószínűség, és a transzformált valószínűségi változóra vonatkozó esemény valószínűségét könnyebben tudjuk hozzákötni az eredeti valószínűségi változóval kapcsolatos valamely eseményhez.) Nyilván Y egy nemnegatív értékű valószínűségi változó, eloszlásfüggvénye tehát a 0-nál kisebb értékű helyeken 0. Legyen $y > 0$, ekkor

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(X^2 < y) = \mathbb{P}(X < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{y}}$$

ahol a középső egyenlőség abból fakad, hogy X nemnegatív értékű, hiszen exponenciális eloszlású, ezért a $\{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\}$ esemény megegyezik az $\{X < \sqrt{y}\}$ eseménnyel. Az eloszlásfüggvényt deriválva az összetett függvényekre vonatkozó deriválási szabály szerint

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = -e^{-\lambda\sqrt{y}} \cdot (-\lambda) \cdot \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\lambda\sqrt{y}}$$

$$\text{Összefoglalva: } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} e^{-\lambda\sqrt{y}} & 0 < y \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A várható értéket megkaphatjuk az $\mathbb{E}Y = \int y f_Y(y) dy$ definíció alapján, de lényegesen kevesebb számolást igényel, ha észrevesszük, hogy Y várható értéke nem más, mint X második momentuma, arról pedig a szórásnégyzetnél tanultak szerint tudjuk, hogy $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, azaz $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + (\mathbb{E}(X))^2$. Mivel a λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke $\frac{1}{\lambda}$, szórásnégyzete pedig $\frac{1}{\lambda^2}$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2}$$

11. Az előző feladatok megoldásához hasonlóan először a transzformált eloszlásfüggvényét határozzuk meg, majd abból deriválással a sűrűségfüggvényét. X eloszlásfüggvénye pedig a következő: $F_X(x) = x$, ha $0 < x < 1$ (lásd nevezetes eloszlás táblázat, $b = 1, a = 0$ választással), $F_X(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F_X(x) = 1$, ha $x \geq 1$.
 $\text{Ran}(Y) = (0, \sqrt{2})$ (mivel ha $X \in (0, 1)$ akkor $\sqrt{2}X \in (0, \sqrt{2})$). Így ha $x \leq 0$, akkor $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x) = 0$, és ha $x > 1$, akkor $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x) = 1$. Ha pedig $0 < x \leq \sqrt{2}$, akkor

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x) = \mathbb{P}(\sqrt{2}X < x) = \mathbb{P}(2X < x^2) = \mathbb{P}(X < x^2/2) = F_X(x^2/2) = x^2/2.$$

Ebből deriválással adódik a sűrűségfüggvény (az $x = 0$ és $x = \sqrt{2}$ szakaszhatárokon pedig, ahol az eloszlásfüggvény nem deriválható, a sűrűségfüggvényt 0-ként definiáljuk, de ebben a 2 pontban helyette bármilyen más nemnegatív számként is definiálhatnánk):

$$f_Y(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$\text{Ran}(V) = (0, \infty)$, mert X értéke tetszőleges $(0, 1)$ -beli szám lehet, így $1/X$ -é tetszőleges $(1, \infty)$ -beli szám, $V = \ln(1/X)$ -é pedig így tetszőleges $(0, \infty)$ -beli szám. Ebből $F_V(x) = \mathbb{P}(V < x) = 0$, ha $x \leq 0$. Ha pedig $x > 0$, akkor

$$F_V(x) = \mathbb{P}(V < x) = \mathbb{P}(\ln \frac{1}{X} < x) = \mathbb{P}(\frac{1}{X} < e^x) = \mathbb{P}(X > e^{-x}) = 1 - \mathbb{P}(X \leq e^{-x}) = 1 - e^{-x},$$

ahol a 3. egyenlőség azért igaz, mert az exponenciális függvény szigorúan monoton nő, a 4. egyenlőség azért, mert $1/X$ és e^x is pozitív és az $x \mapsto 1/x$ függvény a $(0, \infty)$ -n szigorúan monoton nő, a 6. egyenlőség pedig azért, mert X folytonos val. változó (így az eloszlásfüggvénye is folytonos, vagyis $\mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ minden $t \in \mathbb{R}$ -re).

Deriválással azt kapjuk, hogy $f_V(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 < x \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

Megjegyzés: A kapott képletekből jól látható, hogy V exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel. Az ilyesmit érdemes megfigyelni, mert ha ezt észrevesszük és egy következő feladat például V várható értékét vagy szórását kérdezi, akkor segít a nevezetes eloszlás táblázat. Lásd 16.(b) feladat.

$\text{Ran}(Z) = (0, \pi/4)$, mert az arctg függvény a $(0, 1)$ intervallumot (azaz X értékkészletét) a $(0, \pi/4)$ intervallumra képezi le kölcsönösen egyértelműen. Így $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z < x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z < x) = 1$, ha $x \geq \pi/4$. Ha pedig $0 < x < \pi/4$, akkor

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z < x) = \mathbb{P}(\arctg(X) < x) = \mathbb{P}(X < \tan(x)) = \tan(x),$$

ahol az utolsó előtti egyenlőség az árkusztangensfüggvény szigorú monoton növekedése miatt igaz. Ebből deriválással kapjuk Z sűrűségfüggvényét:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(x)} & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

12. Mivel

$$X \frac{\text{mérföld}}{\text{gallon}} = aX \frac{\text{km}}{\text{gallon}} = \frac{aX}{b} \frac{\text{km}}{\text{liter}} = \frac{aX}{100b} \frac{100 \text{ km}}{\text{liter}},$$

ezért ha X fejezi ki a mérföld/gallonban mért fogyasztást, akkor a liter/(100 km)-ben mért fogyasztás mértéke $Y = \frac{100b}{aX}$ liter/(100 km).

Így ha $x > 0$, akkor Y eloszlásfüggvénye az x helyen

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x) = \mathbb{P}\left(\frac{100b}{aX} < x\right) = \mathbb{P}\left(X > \frac{100b}{ax}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq \frac{100b}{ax}\right) = 1 - F_X\left(\frac{100b}{ax}\right),$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy F_X -nek folytonos függvénynek kell lennie, mert a feladat szerint X -nek van sűrűségfüggvénye, így ő folytonos val. változó; ha pedig $x \leq 0$, akkor nyilván $F_Y(x) = 0$, mert a fogyasztás nem lehet negatív (legalábbis hagyományos benzines/dízeles autónál ezt feltehetjük).

Az előbbi számolás alapján a közvetett függvény deriválására vonatkozó képlettel (azaz láncszabállyal) azt kapjuk, hogy

$$f_Y(x) (= F_Y'(x)) = \frac{100b}{ax^2} f_X\left(\frac{100b}{ax}\right),$$

ha $x > 0$ és $f_Y(x) = 0$ különben.

Megjegyzés: A közbülső lépést zárójelbe tettük, mert a feladat nem mondta ki, hogy F_X minden pontban differenciálható, és ez nem is feltétlenül következik abból, hogy X folytonos val. változó (így F_Y sem feltétlenül minden pontban differenciálható). A következő megjegyzést csak a vájtfülleknek szánjuk, akik emiatt esetleg aggódnak; zh-n, vizsgán elég a fentihez hasonló megoldást leírni.

Aggódalomra azért nincs ok, mert a kapott jobb oldali képlet $f_Y(x)$ -re akkor is Y sűrűségfüggvényét adja, ha ez a differenciálhatóság nem minden pontban igaz. Azt ugyanis tudjuk, hogy tetszőleges folytonos X val. változó esetén f_X -et $-\infty$ -tól egy tetszőleges x -ig integrálva $F_X(x)$ -et kapjuk. Helyettesítéssel integrálással ellenőrizhető, hogy ha a $t \mapsto \frac{100b}{at^2} f_X\left(\frac{100b}{at}\right)$ függvényt $-\infty$ -tól x -ig integráljuk, akkor tényleg $F_Y(x)$ -et kapjuk, mert $u = \frac{100b}{at}$, tehát $du = -\frac{100b}{at^2} dt$ helyettesítéssel, ahol ha t értéke $-\infty$ -tól x -ig mehet, akkor u értéke $\frac{100b}{ax}$ -tól ∞ -ig mehet:

$$\int_{-\infty}^x \frac{100b}{at^2} f_X\left(\frac{100b}{at}\right) dt = \int_{100b/(ax)}^{\infty} f_X(u) du = 1 - F_X(100b/(ax)) = F_Y(x),$$

vagyis $t \mapsto f_Y(x) = \frac{100b}{at^2} f_X\left(\frac{100b}{at}\right)$ tényleg sűrűségfüggvénye Y -nak.

A mértékelméletből ismert, hogy bármely folytonos val. változó eloszlásfüggvénye „majdnem mindenütt” differenciálható. Itt az elsőre kicsit pongyolának hangzó „majdnem mindenütt igaz” valójában egy pontos matematikai kifejezés, ami azt jelenti, hogy azon $\mathbb{R}$ -beli pontok halmaza, ahol nem igaz az állítás, lefedhető tetszőlegesen kicsi összhosszúságú intervallumok uniójával (ehhez esetleg megszámlálhatóan végtelen sok intervallum kell). Így az $f_Y(x) = F_Y'(x)$ egyenlőség is „majdnem mindenütt” teljesül, ha nem is minden egyes pontban, tehát lényegében nem hibás használni.

13. (a) (5 pont)

(2 pont) arra, hogy az $(1, 2)$ intervallumon kívül 0 a sűrűségfüggvény értéke. Ebből 1 pont adható az $x \leq 1$ esetre és 1 pont az $x \geq 2$ esetre, ha a másik nincs meg.

(1 pont) arra, hogy az $(1, 2)$ intervallumon az eloszlásfüggvény deriváltja a sűrűségfüggvény (még ha nem is sikerül jól deriválni. Természetesen a $(-\infty, 1)$ és a $(2, \infty)$ intervallumon is az eloszlásfüggvény deriváltja a sűrűségfüggvény, erre is lehet a korábbi pontokért hivatkozni.)

(2 pont) Ha $x \in (1, 2)$, akkor $f_X(x) (= F_X'(x)) = \frac{2}{3}x$. (Részpontszám itt nem jár.)

(b) (5 pont)

(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$

(1 pont) $= \int_1^2 x \cdot \frac{2}{3}x dx$ (ha a közbülső lépést kihagyja, az nem baj, de hibás behelyettesítés esetén részpontszám nem jár)

(3 pont) $(= \int_1^2 \frac{2}{3}x^2 dx) = \left[\frac{2}{9}x^3\right]_1^2 = \frac{16}{9} - \frac{2}{9} = \frac{14}{9}$. (1 pont a jó primitív függvényre, 1 a primitív függvénybe való jó helyettesítésre, 1 a végeredményre.)

(c) (10 pont)

(2 pont) arra az ötletre, hogy a folytonos esetben a transzformált várható értékére vonatkozó képletet kéne használni. Ehhez nem kell, hogy a konkrét számítások jók legyenek, de az igen, hogy legalább az általános képletet helyesen ismeri. Ha kiderül, hogy azt akarja használni, de nem sikerül jól alkalmazni sem X -re, sem Y -ra, akkor max. 1 pont.

Legyen $k \geq 1$ tetszőleges. Ekkor

(1 pont) $\frac{3}{2} \mathbb{E}(X^k) = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx$

(1 pont) $= \int_1^2 x^{k+1} dx$.

(1 pont) (A nevezetes eloszlás táblázat szerint, tehát nem kell indokolni) $f_Y(x) = 1$, ha $1 < x < 2$

(1 pont) és $f_Y(x) = 0$ különben (ha ezt kifejejté, de később csak az $(1, 2)$ intervallumon integrál, akkor ne vonjuk le ezt a pontot. Különben vonjuk le),

(2 pont) így $\mathbb{E}(Y^{k+1}) = \int_1^2 x^{k+1} dx$ (Ha ez jó, akkor az előbbi általános képletre is jár a pont.)

(2 pont) arra a konklúzióra, hogy látjuk, hogy $\mathbb{E}(Y^{k+1})$ és $\frac{3}{2} \mathbb{E}(X^k)$ értékét ugyanaz az integrál adja meg, tehát az egyenlőség teljesül.

14. a) Egyrészt tudjuk, hogy folytonos esetben a $\mathbb{P}(X > 3)$ valószínűség megegyezik a $\mathbb{P}(X \geq 3)$ valószínűséggel, másrészt $\mathbb{P}(X \geq 3)$ felírható az eloszlásfüggvény segítségével: $\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) =$

$1 - F_X(3)$. A λ paraméterű exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye $x > 0$ esetén $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Így tehát

$$e^{-6} = \mathbb{P}(X > 3) = \mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - F_X(3) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 3}) = e^{-\lambda \cdot 3}$$

Amiből $\lambda = 2$ következik.

b) Definíció szerint $\mathbb{P}(X < 2) = F_X(2) = 1 - e^{-\lambda \cdot 2} = 1 - e^{-2 \cdot 2} = 1 - e^{-4} = 0,9817$

c) A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke $\frac{1}{\lambda}$, így $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$

15. X egyenletes eloszlású a $(0, 16,4)$ intervallumon (tehát $a = 0, b = 16,4$), ezért $\mathbb{D}(X) = \sqrt{(b-a)^2/12} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{16,4}{2\sqrt{3}} \approx 4,7343$. Mivel X eloszlása csak a vonal hosszától (tehát a két végpont különbségétől) függ, ebből következik, hogy más, ugyanilyen hosszúságú metróvonal esetén sem változna az eredmény.
16. Az 5. feladatsor 15. feladatában meghatároztuk X sűrűségfüggvényét. Ezt felhasználva, a definíció alapján számolhatjuk X kért várható értékét. Az integrált nyilván csak azon határok között számoljuk, ahol a sűrűségfüggvény nem 0.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_1^2 x \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1 \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{\sqrt{x-1}} - x \right) dx = \\ &= \int_1^2 \left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} - x \right) dx = \int_1^2 \left(\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} - x \right) dx = \\ &= \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x-1} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{2}{3} + 2 - \frac{4}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

17. Az 5. feladatsor 16. feladatában meghatároztuk Y sűrűségfüggvényét. Ezt felhasználva, a definíció alapján számolhatjuk Y kért várható értékét. Az integrált nyilván csak azon határok között számoljuk, ahol a sűrűségfüggvény nem 0.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_Y(x) dx = \int_0^1 x (6x - 6x^2) dx = \int_0^1 (6x^2 - 6x^3) dx = \int_0^1 6(x^2 - x^3) dx = \\ &= 6 \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

18. a) Vegyük észre, hogy $Y = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $X \leq 0$, különben pedig $Y = X > 0$. Így ha $x \leq 0$, akkor $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x) = 0$. Ha $x > 0$, akkor

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x) = \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(0 < Y < x) = \mathbb{P}(X \leq 0) + \mathbb{P}(0 < X < x) = \mathbb{P}(X < x) = F_X(x).$$

$$\text{Összefoglalva: } F_Y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ F_X(x) & 0 < x \end{cases}$$

b) Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z < x) = \mathbb{P}(-X < x) = \mathbb{P}(X > -x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq -x).$$

Vegyük észre, hogy $\mathbb{P}(X \leq -x)$ éppen az F_X eloszlásfüggvény $-x$ pontbeli jobb oldali határértéke, azaz $F_X(-x + 0)$ (*), így $F_Z(x) = 1 - F_X(-x + 0)$.

(*) Ez azért igaz, mert tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ pontban $\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\forall y > t: X < y) = \mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N}: X < t + 1/n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X < t + 1/n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X < t + 1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(t + 1/n) = \lim_{y \downarrow t} F_X(y) = F_X(t + 0)$. Itt az utolsó lépés előtt kettővel a valószínűségi mértékek alulról való folytonosságát használtuk az $\{X < t + 1/n\}$ csökkenő eseményekre, ami szerint a csökkenő események metszetének valószínűsége a valószínűségi mértékek szorzata. Az y -os képletek és az $t + 1/n$ -esek közti áttérések az $y \mapsto \mathbb{P}(X < y)$ valószínűség monotonitása miatt lehet, míg a legutolsó lépésben csupán az F_X eloszlásfüggvény jobb oldali határértékének definícióját alkalmazzuk.

c) V nemnegatív valószínűségi változó, így ha $x \leq 0$, akkor $\mathbb{P}(V < x) = 0$. Továbbá ha $x > 0$, akkor

$\mathbb{P}(V < x) = \mathbb{P}(|X| < x) = \mathbb{P}(-x < X < x) = \mathbb{P}(X < x) - \mathbb{P}(X \leq -x) = F_X(x) - F_X(-x + 0)$
($\mathbb{P}(X \leq -x)$ az F_X -nek a $-x$ pontbeli jobb oldali határértéke, lásd az előző részfeladat megoldását).

Összefoglalva:

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ F_X(x) - F_X(-x + 0) & 0 < x \end{cases}$$

d) $W = \min\{-X, 0\} = -\max\{0, X\} = -Z$. Y eloszlásfüggvényét az a) részben már kiszámoltuk, és a b)-ből tudjuk, hogy egy val. változó eloszlásfüggvényéből hogyan kapjuk meg a val. változó (-1) -szeresének eloszlásfüggvényét. Ezeket alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$F_W(x) = 1 - F_Y(-x + 0) = \begin{cases} 1 - F_X(-x + 0) & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \end{cases}$$