

## 6. Gyakorlat

Exponenciális és egyenletes eloszlás. Eloszlástranzformációk és várható érték folytonos esetben

1. Hullócsillagra várva kémleljük az eget egy kora augusztusi éjszaka. Tudjuk, hogy annak az esélye, hogy az első 20 percben látunk hullócsillagot  $1 - e^{-\frac{2}{3}}$ . Feltehetjük, hogy egy hullócsillag észleléséig hátralévő idő nem függ az eddig eltelt idő hosszától (azaz az eloszlás folytonos, örökifjú). Mekkora eséllyel látunk hullócsillagot az első órában? Mekkora az első hullócsillag észleléséig hátralévő idő szórásnégyzete?
2. Tegyük fel, hogy egy adott mosógéptípus átlagosan 2 évig bírja az első meghibásodásig, és az első meghibásodás időpontja folytonos, örökifjú eloszlást követ. Mi a valószínűsége, hogy az első 3 év során nem hibásodik meg, ha tudjuk, hogy az első 2 évben hibátlanul működött?
3. Egy hibásan megírt szoftverben memóriaszivárgás van, ami miatt időnként leáll a program és újra kell indítani. A futásidő két leállás között órában mérve exponenciális eloszlású  $1/10$  paraméterrel. Dominik délután 4-kor, a munkahelyéről való távozás előtt elindítja a szoftvert. Feltéve, hogy másnap reggel 8-kor, amikor visszatér a munkahelyére, azt tapasztalja, hogy még egyszer sem állt le a szoftver, mi a valószínűsége, hogy a délből kezdődő ebédszünetig sem fog leállni?
4. Legyenek  $X$  és  $Y$  exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Tudjuk, hogy  $X$  várható értéke kétszerese  $Y$  várható értékének, továbbá, hogy  $3\mathbb{P}(X > 1) = 2\mathbb{P}(Y < 1)$ . Mennyi  $X$  várható értéke?
5. (*Vizsgakurzus vizsgálja, 2025.06.26., 5. feladat*) Egy bizonyos bankfiókban a várakozási idő folytonos, örökifjú eloszlást követ. Azt is tudjuk, hogy  $e^{-2}$  annak a valószínűsége, hogy egy ügyfélnek legalább egy órát kell várnia. Három barát, Ádám, Betti és Cili meglátogatják ezt a bankfiókot különböző időpontokban. Tegyük fel, hogy a várakozásaik időtartamai (együttesen) függetlenek. Mi a valószínűsége, hogy hármuk közül legalább kettőnek kell legalább fél órát várnia?

- 
6. Dobjunk egy szabályos dobókockával, jelölje az eredményt  $X$ . Adjuk meg  $Y = |X - 3|$  eloszlásfüggvényét. Határozzuk meg az  $\int_0^\infty (1 - F_Y(y))dy$  és az  $\mathbb{E}(Y)$  mennyiségeket.
  7. Egy  $X$  folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X: x \mapsto \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 < x < a, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol  $a > 0$  egy alkalmasan választott konstans. Határozzuk meg  $a$  értékét. Átlagosan mekkora  $X$ ?

8. Egy benzinkút üzemanyagtartályát hetente teletöltik. Jelölje  $X$  a heti fogyasztást (százezer literekben), melynek sűrűségfüggvénye:

$$f_X: x \mapsto \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mekkora legyen a tartály kapacitása, hogy annak a valószínűsége, hogy a héten kifogy az üzemanyag, kisebb legyen 0,05-nél? Mekkora az átlagos heti fogyasztás?

- 
9. Legyen  $X$  sűrűségfüggvénye  $f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  ha  $0 < x < 1$  és 0 egyébként. Legyen  $Y = X\sqrt{X}$ .
    - a) Határozzuk meg  $X$  eloszlásfüggvényét.
    - b) Határozzuk meg  $Y$  eloszlásfüggvényét.
    - c) Határozzuk meg  $Y$  sűrűségfüggvényét.
    - d) Határozzuk meg  $\mathbb{E}(Y)$ -et az  $Y$  sűrűségfüggvényével számolva.
    - e) Vezessük le  $\mathbb{E}(X\sqrt{X})$ -et az  $X$  sűrűségfüggvényével számolva is.
  10. Legyen  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  és  $Y = X^2$ . Adjuk meg  $Y$  sűrűségfüggvényét és várható értékét.
  11. Legyen  $X \sim U(0;1)$ , illetve  $Y = \sqrt{2X}$ ,  $V = \ln \frac{1}{X}$  és  $Z = \arctg(X)$ . Adjuk meg  $Y$ ,  $V$  és  $Z$  sűrűségfüggvényét.

12. Az autók fogyasztását Amerikában mérföld/gallon-ban (mpg) fejezik ki, azaz megadják, hogy hány mérföldet tesz meg a gépjármű egy gallon üzemanyaggal. Európában, mint ismeretes, a fogyasztást liter/(100 km) formában adják meg. Egy autóról tudjuk, hogy az  $X$  mpg fogyasztását az  $f_X$  sűrűségfüggvény jellemzi. Hogyan kell transzformálnunk  $f_X$ -et, ha áttérünk a liter/100km skálára? (1 mérföld =  $a$  km, 1 gallon =  $b$  liter, ahol  $a = 1,609$  és  $b = 3,785$ . Feltehetjük, hogy az  $F_X$  eloszlásfüggvény minden pontban differenciálható, ahol nem 0 az értéke.)
13. (PPZH 2023.12.11., 5. feladat) Egy  $X$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1, \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}, & \text{ha } 1 < x < 2, \\ 1, & \text{ha } x \geq 2. \end{cases}$$

- (a) Határozzuk meg  $X$  sűrűségfüggvényét. (b) Határozzuk meg  $X$  várható értékét.  
 (c) Legyen  $Y$  egyenletes eloszlású az  $(1, 2)$  intervallumon. Bizonyítsuk be, hogy bármely  $k \in \{1, 2, \dots\}$  esetén teljesül, hogy  $\frac{3}{2} \mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^{k+1})$ .

*Az alábbi feladatok közül előadáson fog néhány szerepelni:*

14. Legyen  $X$  exponenciális eloszlású valószínűségi változó, amiről tudjuk, hogy  $\mathbb{P}(X > 3) = e^{-6}$ .  
 a) Mi  $X$  eloszlásának paramétere ( $\lambda$ )? b)  $\mathbb{P}(X < 2) = ?$  c)  $\mathbb{E}(X) = ?$
15. Az M3-as metrón egy álmós utas elalszik, majd egy, a 16,4 km hosszúságú metróvonalon találmra választott pontban ébred fel. Jelölje  $X$  a felébredés helyének a vonal egyik végállomásától (legyen ez mondjuk esetünkben Kőbánya-Kispest) való távolságát,  $X$  tehát egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Hány kilométer  $X$  szórása? És mi lenne a válasz, ha az M3-as metró helyett egy másik, ugyanilyen hosszúságú metróvonalal kapcsolatban kérdeznénk ugyanezt?
16. Az egységnyi oldalú négyzet két átlellenes oldalán találmra választunk egy  $a$  és egy  $b$  pontot. Jelöljük  $X$ -szel a két pont távolságának négyzetét. Átlagosan mekkora  $X$ ?
17. A  $(0, 1)$  intervallumban kijelölünk három pontot véletlenszerűen. Jelölje  $Y$  a középső pontot. Mennyi  $Y$  várható értéke?
18. Legyen az  $X$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye  $x \mapsto F_X(x)$ . Fejezzük ki az alábbi valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit  $F_X$  segítségével:  
 a)  $Y = \max\{0; X\}$  b)  $Z = -X$  c)  $V = |X|$  d)  $W = \min\{0; -X\}$ .

IMSc 6. Szimuláljunk az előadáson tanult módszerrel (tetszőleges programnyelven vagy táblázatkezelőben) 100 db független valószínűségi változót, amelyek eloszlásfüggvénye a 13. feladatban szereplő  $F_X$ . Adjuk meg a szimuláció módszerét is (pontosan hogyan kell transzformálni az  $U(0; 1)$  eloszlású változókat, hogy  $F_X$  eloszlásfüggvényűeket kapjunk). Mekkora a különbség a  $\mathbb{P}(X < 1,2)$  valószínűség és a 100 kapott érték közül az 1,2-nél kisebb elemek aránya között? *Határidő: 9. héten a szokásos időpont.*

| Eloszlás neve          | Jelölés                | $\text{Ran}(X)$      | $F_X(t)$                                       | $p_X(k), f_X(t)$                                   | $\mathbb{E}(X)$     | $\mathbb{D}^2(X)$     |
|------------------------|------------------------|----------------------|------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------------------|-----------------------|
| indikátor<br>Bernoulli | $1_A$<br>$B(p)$        | $\{0, 1\}$           |                                                | $p_X(0)=1-p, p_X(1)=p$<br>( $p = \mathbb{P}(A)$ )  | $p$                 | $p(1-p)$              |
| binomiális             | $\text{Bin}(n; p)$     | $\{0, 1, \dots, n\}$ |                                                | $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$                     | $np$                | $np(1-p)$             |
| Poisson                | $\text{Pois}(\lambda)$ | $\{0, 1, 2, \dots\}$ |                                                | $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$                | $\lambda$           | $\lambda$             |
| geometriai             | $\text{Geo}(p)$        | $\{1, 2, \dots\}$    |                                                | $(1-p)^{k-1} p$                                    | $\frac{1}{p}$       | $\frac{1-p}{p^2}$     |
| egyenletes             | $U(a; b)$              | $(a; b)$             | $\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t \in (a; b)$ )         | $\frac{1}{b-a}$ (ha $t \in (a; b)$ )               | $\frac{a+b}{2}$     | $\frac{(b-a)^2}{12}$  |
| exponenciális          | $\text{Exp}(\lambda)$  | $[0; \infty)$        | $1 - e^{-\lambda t}$ (ha $t \in (0; \infty)$ ) | $\lambda e^{-\lambda t}$ (ha $t \in (0; \infty)$ ) | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |