Wiederholungsaufgaben (Übungsblatt 6b)
Zur Vorbereitung für die Klausur

1. Seien A und B unabhängige Ereignisse, und sei C ein sowohl von A als auch von B disjunkte Ereignis. Nehmen wir an, dass $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$ gilt. Bestimmen wir die Wharscheinlichkeit $\mathbb{P}\left(\overline{\overline{A} \cap B} \cup C\right)$.

2. Ein Produkt hat Materialfehler mit Wahrscheinlichkeit 0,15, Formfehler mit Wahrscheinlichkeit 0,3, und Konstruktionsfehler mit Wahrscheinlichkeit 0,2. Diese Fehler sind paarweise unabhängig, aber nicht gemeinsam unabhängig: die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Produkt alle Typen der Fehler hat, ist 0,02. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Produkt fehlerfrei ist?

3. In einer Urne gibt es 5 grüne und 7 blaue, in einer anderen Urne 3 grüne und 8 blaue Bälle. Von der ersten Urne übertragen wir zwei Bälle in die zweite Urne, und danach übertragen wir einen Ball von der zweiten Urne in die erste. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir einen blauen Ball ziehen, falls wir von der (a) ersten (b) zweiten Urne ziehen?

4. 75% der Teilnehmer einer Prüfung studieren das Fach "A", 15% studieren das Fach "B", und 10% studieren das Fach "C". Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilnehmer eine Note 5 erhält, ist bei den Studierenden mit Fach "A" 0,4, beim Fach "B" 0,7, und beim Fach "C" 0,6. Angenommen, dass eine Person die Note 5 erhalten hat, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person das Fach a) "A", b) "B", c) "C" studiert?

5. Nehmen wir an, dass die Funktion `Indicator(p)` den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit p und den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ zurückgibt. Geben wir die Verteilung des Rückgabewertes der folgenden Funktion an.

```
def RandomExperiments():
    k = 1
    while Indicator(0.5) == 0:
        k += 1
    return k
```

6. Adalbert und Brünhild spielen das folgende Spiel: beide werfen einen Würfel, und wenn das Ergebnis eines Wurfes mindestenst zweimal die andere Augenzahl ist, dann bezählt der Verlierer (die Person mit dem kleineren Wurf) dem Gewinner dreimal die Summe der geworfenen Zahlen. Ansonsten ist das Spiel Unentschieden. Was ist der Erwartungswert des Gewinns von Adalbert?

7. Ein Punkt wird im Einheitsquadrat zufällig ausgewählt. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Abstand zwischen dem Punkt und der näheren Diagonale des Quadrats größer ist, als der Abstand zwischen dem Punkt und der nächstliegenden Seite des Quadrats.

8. Betrachten wir die Funktion f, die bei der Formel

$$f(t) = \begin{cases} \alpha \cdot t^4, & \text{falls } t \in (2,3), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist, wo $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl ist. Wie muss man den Parameter α wählen, um eine Dichtefunktion einer Zufallsvariablen zu erhalten? In diesem Fall, bestimmen wir die Verteilungsfunktion einer zugehörige Zufallsvariablen X. Was ist der Wert von $\mathbb{P}(X > 12)$ und $\mathbb{E}(X)$?

9. Sei Y eine Zufallsvariable, deren Dichtefunktion folgenderweise gegben ist:

$$f_Y : t \mapsto \begin{cases} \frac{\alpha}{(1+t)^2} & \text{falls } -5 < t < -2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für eine $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(-4 < Y < -3)$. (2019, Wiederholung der Klausur)

10. Wir versuchen, einen Papierball in einen Papierkorb einzuwerfen. Die Wahrscheinlichkeit des Erfolgs ist bei jedem Versuch 0,2 (unabhängig von den anderen Versuchen). Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Versuche bis zum (a) ersten (b) zweiten Erfolg?

11. Ein Markenservice bedient viele Eigentümer(innen), die ihn manchmal mit ihren Fragen anrufen (unabhängig voneinander, mit gleicher, kleiner Wahrscheinlichkeit). Die Wahrscheinlichkeit, dass es während einer Stunde keinen Anruf gibt, ist gleich 25%.
a) Wie groß ist die erwartete Anzahl der Anrufe innerhalb von 3 Stunden?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in mindestens 2 aus 8 Stunden jeweils höchstens ein Anruf ankommt?

12. In einer Stadt ist das Verhältnis der Tage ohne Unfälle 25%. Der Verkehr ist sehr groß, die Größenordnung der Anzahl der Autos ist an jedem Tag gleich. Die Autos verursachen Unfälle unabhängig voneinander mit kleiner Wahrscheinlichkeit. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es nächste Woche gerade 2 Tage mit mehr als 1 Unfälle gibt.

13. In der Nähe einer Wiese leben sehr viele Mäuse mit Gewicht 10 dkg pro Maus. Diese befinden sich momentan unabhängig voneinander, mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit auf der Wiese: Die Wahrscheinlichkeit, dass es genau eine Maus auf der Wiese gibt, ist gleich $2e^{-2}$. Eine Katze geht auf die Wiese und fängt alle Mäuse, die sich dort befinden. Wie viele Dekagramm ist die Standardabweichung des totalen Gewichts der von ihr gefangenen Mäuse?

14. Die Verteilungsfunktion des Gewichts eines Hasen (den wir auf einem Feld zufällig auswählen) ist wie folgt gegeben:
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 2, \\ \dfrac{(x-2)^2}{64}, & \text{falls } 2 \le x \le 10, \\ 1, & \text{ha } x > 10. \end{cases}$$
Bestimmen wir die Dichte, den Erwartungswert und die Varianz von X.

15. Auf einem Smartphone gibt es 2 Spielanwendungen und 3 Social-Media-Anwendungen. Das Betriebssystem wählt zunächst eine der fünf Anwendungen, die er aktualisiert, und danach, falls diese eine Social-Media-Anwendung war, aktualisiert es noch eine Anwendung unter den vier noch nicht aktualisierten Anwendungen, wobei falls es sie eine Spielanwendung war, aktualisiert es zusätzlich noch eine zufällig ausgewählte Social-Media-Anwendung. Bezeichne X die Anzahl der aktualisierten Spielanwendungen und Y die Anzahl der aktualisierten Social-Media-Anwendungen. Bestimmen wir die gemeinsame Verteilung und die Randverteilungen von X und Y, sowie die Varianz von Y und den Erwartungswert von XY. Sind X und Y unabhängig?

16. Der kleine Louis ist ein großer Fan von Berliner S-Bahnen. An einem schönen Tag der Sommerferien geht er zum S-Bahnhof Karlshorst, um drei Züge der S-Bahn-Linie S3 zu beobachten. Nehmen wir an, dass jeder S-Bahn-Zug unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit 70% aus der Baureihe 481/482 und mit Wahrscheinlichkeit 30% aus der (älteren) Baureihe 480 (siehe Abbildung) stammt. Bezeichne X die Anzahl der von Louis beobachteten S-Bahnen aus der Baureihe 481/482 und Y die Anzahl der von ihm beobachteten S-Bahnen aus der Baureihe 480.

(a) Wie ist Y verteilt und mit welchen Parametern?
(b) Bestimmen wir $\mathbb{D}^2(X)$ und $\mathbb{D}^2(Y)$.
(c) Geben wir die gemeinsame Verteilung von X und Y an.
Bemerkung: Es ist in Ordnung, (a) nach (b) und (c) zu lösen, falls es leichter ist.
(d) Bestimmen wir $\mathbb{E}(XY)$.
(e) Sind X und Y unabhängig?