

Ismétlő feladatok

Zárthelyi dolgozatra készüléshoz

Végeredmények és megoldások

1. (Itt csak rövid szöveges megoldást adunk, de a feladat megoldásához érdemes Venn-diagramot rajzolni.)
 $\overline{A \cap B} = B \setminus A$, így $\overline{A \cap B} = \overline{B \setminus A}$. Ez a halmaz C -ből pontosan azokat a kimeneteleket tartalmazza, amelyek nincsenek $(B \setminus A) \cap C$ -ben. Viszont mivel C kizáró B -től, $(B \setminus A) \cap C$ üres halmaz, ezért $C \subseteq \overline{A \cap B}$. Tehát $\overline{A \cap B} \cup C = \overline{A \cap B}$, vagyis a keresett valószínűség $\mathbb{P}(\overline{A \cap B}) = 1 - \mathbb{P}(B \setminus A)$.
Mivel A és B függetlenek, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, tehát a keresett valószínűség $\frac{7}{9}$.

2. Jelölje A, F, M rendre azt az eseményt, hogy anyag-, felületi, illetve mérrethibás a gyártóeszköz. Ekkor a Poincaré-formula szerint

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{hibátlan}) &= 1 - \mathbb{P}(A \cup F \cup M) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(A \cap F) + \mathbb{P}(A \cap M) + \mathbb{P}(F \cap M) - \mathbb{P}(A \cap F \cap M) \\ &= 1 - 0,15 - 0,2 - 0,3 + 0,15 \cdot 0,2 + 0,15 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,3 - 0,02 = 0,465, \end{aligned}$$

ahol a kettes metszetek valószínűsége a páronkénti függetlenség miatt a valószínűségek szorzata (pl. $\mathbb{P}(A \cap F) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(F)$).

3. a) 0,5944 (lásd 2. feladatsor, 12. feladat)

b) 1. *megoldás.* A b) megoldása az a)-éhoz hasonlóan adódik. Ha az első húzásban az első urnából két zöld golyót húztunk, majd a másodikban a második urnából egy zöldet húztunk, akkor a 2. urnában ezután 4 zöld és 8 kék lesz, innen tehát $\frac{8}{12}$ (feltételes) valószínűséggel húzunk kéket. A szorzási szabály és az a) rész megoldásában szereplő számítások alapján ennek az eseménynek $\frac{5}{33} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12}$ a valószínűsége. Ha pedig az első húzásban az első urnából két zöldet, majd a másodikból egy kéket húztunk, akkor a 2. urnában ezután 5 zöld és 7 kék lesz, vagyis innen $\frac{7}{12}$ valószínűséggel húzunk kéket. Ennek az eseménynek a valószínűsége az a) rész megoldása alapján $\frac{5}{33} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12}$.
Ha az első húzásban egy zöldet és egy kéket húztunk az első urnából, majd a második húzásban egy zöldet a második urnából, akkor a 2. urnában 3 zöld és 9 kék golyó lesz, így innen $\frac{9}{12}$ valószínűséggel húzunk kéket. Az a) rész megoldása szerint ennek a valószínűsége $\frac{35}{66} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{9}{12}$. Hasonlóan ha az első húzásban egy zöldet és egy kéket húzunk az első urnából, majd a másodikból egy kéket, akkor a 2. urnában 4 zöld és 8 kék lesz, vagyis innen ezután $\frac{8}{12}$ valószínűséggel húzunk kéket. A megfelelő esemény valószínűsége így $\frac{35}{66} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{8}{12}$.

Végül ha az első húzásban két kéket húztunk az első urnából, majd a második húzásban egy zöldet a másodikból, akkor ezután a második urnában 2 zöld és 10 kék golyó lesz, így innen $\frac{10}{12}$ valószínűséggel húzunk kéket, az ehhez tartozó valószínűség $\frac{21}{66} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{10}{12}$. Ha pedig az első húzásban két kéket húztunk az első urnából, majd a másodikból egy kéket, akkor a 2. urnában 3 zöld és 9 kék golyó lesz, azaz innen $\frac{9}{12}$ valószínűséggel húzunk kéket, az ehhez tartozó valószínűség $\frac{21}{66} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12}$.
A teljes valószínűség tétele szerint a hat kapott valószínűséget összeadva adódik a kék golyó húzásának valószínűsége, ami $\frac{605}{858}$, kerekítve 0,7051.

2. *(egyszerűbb, de több ötletet igénylő és kevésbé formális) megoldás.* Összesen 8 zöld és 15 kék golyónk van, tehát ha az összes golyó közül húznánk egyet, akkor a kék golyó húzásának valószínűsége $\frac{15}{23}$ lenne. Mivel az összes lehetséges kísérletben azonos valószínűséggel húzunk az összes érintett golyó közül (a valószínűségek tehát az elemszámokkal arányosak, klasszikusak a valószínűségi mezők) és a két átpakolás után 11 golyó van az első és 12 a második urnában, ha a két urnában lévő golyó arányával súlyozzuk az egyes urnákból való kék golyó-húzási valószínűségeket, akkor ezt a $\frac{15}{23}$ -ot kell kapnunk eredményül:

$$\mathbb{P}(\text{összes golyóból kék}) = \frac{11}{23} \mathbb{P}(\text{elsőből kék}) + \frac{12}{23} \mathbb{P}(\text{másodikból kék}),$$

azaz az a) feladat megoldása alapján

$$\frac{15}{23} = \frac{11}{23} \cdot \frac{85}{143} + \frac{12}{23} \cdot \mathbb{P}(\text{másodikból kék}).$$

Átrendezés után kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\text{másodikból kék}) = \frac{15}{12} - \frac{11}{12} \cdot \frac{85}{143} = \frac{1210}{1716} = \frac{605}{858} \approx 0,7051$.

4. A Bayes-tételt alkalmazzuk háromszor (illetve elég kétszer, mert a három feladatban kapott végeredmény összegének 1-nek kell lennie, mivel az $\{A \text{ szakos}\}$, $\{B \text{ szakos}\}$ és $\{C \text{ szakos}\}$ események teljes eseményrendszert alkotnak).

$$a) \mathbb{P}(A \text{ szakos} | \text{ötös}) = \frac{\mathbb{P}(\text{ötös} | A \text{ szakos}) \mathbb{P}(A \text{ szakos})}{\sum_{k \in \{A, B, C\}} \mathbb{P}(\text{ötös} | k \text{ szakos}) \mathbb{P}(k \text{ szakos})} = \frac{0.4 \cdot 0.75}{0.4 \cdot 0.75 + 0.7 \cdot 0.15 + 0.6 \cdot 0.1} = 0.6452.$$

b), c): Ugyanez, csak a számlálóban A helyett B -vel, illetve C -vel. Végeredmények: b) 0,2258 c) 0,1290

5. $\text{Geo}(1/2)$, mert azt a $p = 1/2$ valószínűséggel sikeres kísérletet ismételtük független próbálkozásokkal az első sikerig, hogy az $\text{Indicator}(0.5)$ értéke 1 lesz-e.

6. 0. Végig lehet számolni definíció szerint, hogy a várható érték valóban 0 (ezt itt nem részletezzük), azonban ez abból is következik, hogy a játék teljesen szimmetrikus, egy-egy lehetséges nyereményösszegre Aladárnak pontosan akkora esélye van, mint Bélának, és aki veszít, az annyit veszít, amennyit a másik nyer.

(Megjegyzés: a várható érték valóban létezik, mert a val. változó korlátos értékkeszletű, csak -36 és 36 közötti értékeket vehet fel.)

Formálisabban: Aladár akkor nyer, ha ő 6-ost dob, míg Béla 3-ast, 2-est vagy 1-est, vagy 5-öst, míg Béla 2-est vagy 1-est, vagy 4-est, míg Béla 2-est vagy 1-est, vagy 3-ast, míg Béla 1-est, vagy 2-est, míg Béla 1-est, és az ezzel szimmetrikus esetekben Béla nyer, a többi esetben pedig döntetlen az eredmény. Ebből adódik, hogy X lehetséges értékei: a nyertes esetekben a dobások lehetséges összegei, vesztes esetekben ezek -1 -szeresei, döntetlen esetén csak a 0. Így $\text{Ran}(X) = \{-27, -24, -21, -18, -15, -12, -9, 0, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$. Itt $\mathbb{P}(X = 27) = \mathbb{P}(\{(6, 3)\}) = \frac{1}{36}$, $\mathbb{P}(X = 24) = \mathbb{P}(\{(6, 2)\}) = \frac{1}{36}$, $\mathbb{P}(X = 21) = \mathbb{P}(\{(6, 1), (5, 2)\}) = \frac{2}{36}$, $\mathbb{P}(X = 18) = \mathbb{P}(\{(5, 1), (4, 2)\}) = \frac{2}{36}$, $\mathbb{P}(X = 15) = \mathbb{P}(\{(4, 1)\}) = \frac{1}{36}$, $\mathbb{P}(X = 12) = \mathbb{P}(\{(3, 1)\}) = \frac{1}{36}$, $\mathbb{P}(X = 9) = \mathbb{P}(\{(2, 1)\}) = \frac{1}{36}$, $\mathbb{P}(X = -k) = \mathbb{P}(X = k)$, ha $k > 0$, és így $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Tehát

$$\mathbb{E}(X) = -27\mathbb{P}(X = -27) - 24\mathbb{P}(X = -24) + \dots + 27\mathbb{P}(X = 27) = 0.$$

7. A négyzetet az oldalfelező merőlegesei és az átlói 8 egybevágó derékszögű, egyenlőszárú háromszögre osztják. Egy-egy ilyen háromszögön belül egyértelmű, hogy melyik a legközelebbi oldal és a legközelebbi átló. A véletlenszerűen választott pont egyenlő valószínűséggel esik mind a 8 háromszögbe (a geometriai valószínűségi mező képlete szerint), és feltéve, hogy egy adott háromszögbe esik, ugyanolyan valószínűséggel esik közelebb az adott oldalhoz, mint az adott átlóhoz, akármelyik háromszöget is nézzük. Ezekből következik, hogy elég azt a kérdést megválaszolni, hogy mi a valószínűsége, hogy a pont közelebb van a négyzet egy oldalához, mint egy átlójához, *feltéve, hogy egy rögzített háromszögbe esik*, mert ez megegyezik a keresett valószínűséggel.

Egy ilyen háromszög területe a négyzet területének egynolcada, vagyis $\frac{1}{8}$. Azon pontok halmaza a háromszögön belül, amelyek közelebb esnek az oldalhoz, mint az átlóhoz, éppen a négyzet oldala és az átló közötti szögfelező és az oldal közötti (nyílt) derékszögű háromszög, amelynek harmadik oldala az oldalfelező merőleges egy szakasza. (Ez az állítás elvileg ismert középiskolából, de ha nem, koordinátageometriai módszerekkel is belátható.) Az utóbbi szakasz hossza $\frac{1}{2} \cdot \tan(22,5^\circ)$. Így a kedvező terület ezen háromszög területe, $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan(22,5^\circ))$. A geometriai valószínűségi mező képlete szerint tehát a keresett valószínűség $T_{\text{kedvező}}/T_{\text{összes}} = \tan(22,5^\circ) \approx 0,4142$.

8. Ahhoz, hogy f sűrűségfüggvény legyen, az kell, hogy f nemnegatív legyen (vagyis α -nak pozitívnak kell lennie) és teljesüljön, hogy

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_2^3 \alpha x^4 dx = \alpha \left[\frac{x^5}{5} \right]_{x=2}^3 = \alpha \left(\frac{243}{5} - \frac{32}{5} \right) = \frac{211}{5} \alpha,$$

amiből $\alpha = \frac{5}{211}$ adódik.

Az eloszlásfüggvény $F_X(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) értékét a sűrűségfüggvény $-\infty$ -tól x -ig való integrálásával kapjuk: ha $x \in (2, 3)$, akkor

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_2^x \frac{5}{211} t^4 dt = \left[\frac{1}{211} t^5 \right]_{t=2}^x = \frac{1}{211} (x^5 - 32),$$

valamint ha $x \leq 2$, akkor $F_X(x) = 0$ és ha $x \geq 3$, akkor $F_X(x) = 1$.

Innen is látszik, hogy $\mathbb{P}(X > 12) = 0$ (meg onnan is, hogy az f_X sűrűségfüggvény konstans 0 a $(12, \infty)$ intervallumon).

A várható érték a szokásos képlettel adódik:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_2^3 \frac{5}{211}x^5dx = \left[\frac{5x^6}{1266}\right]_{x=2}^3 = \frac{3645}{1266} - \frac{320}{1266} = \frac{3325}{1266} \approx 2,626.$$

9. α -t úgy kell megválasztanunk, hogy f_Y nemnegatív legyen (tehát $\alpha > 0$ szükséges) és teljesüljön, hogy

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x)dx = \int_{-5}^{-2} \frac{\alpha}{(1+x)^2}dx = \alpha \left[-\frac{1}{1+x} \right]_{-5}^{-2} = \alpha \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}\alpha,$$

amiből $\alpha = \frac{4}{3}$ adódik. Innen

$$\mathbb{P}(-4 < Y < -3) = \int_{-4}^{-3} f_Y(x)dx = \int_{-4}^{-3} \frac{4/3}{(1+x)^2}dx = \frac{4}{3} \left[-\frac{1}{1+x} \right]_{-4}^{-3} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{9}.$$

10. Az első találatig szükséges dobások száma geometriai eloszlású $p = 0,2$ paraméterrel, így ennek a várható értéke 5. Az első siker után a másodikig szükséges dobások száma megint csak geometriai eloszlású $p = 0,2$ paraméterrel és független az első sikerig szükséges dobások számától, így a várható érték linearitása miatt a második sikerig szükséges dobások száma $2 \cdot 5 = 10$.

(A függetlenség valójában nem kell a megoldáshoz, hiszen két azonos eloszlású valószínűségi változó összegének a várható értéke mindig megegyezik a két várható érték összegével a várható érték linearitása miatt, ha ezek a várható értékek léteznek.)

11. A feladat kitűzése alapján (sokan, egymástól függetlenül, mind kicsi és egyforma valószínűséggel telefonálnak be) az 1 óra alatt beérkező hívások száma, amit X -szel fogunk jelölni, Poisson-eloszlású. A feladat szerint $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda} = 0,25 = \frac{1}{4}$, amiből $\lambda = \ln 4$ adódik.
- a) Legyen X_1 az első órában, X_2 a másodikban és X_3 a harmadikban beérkező hívások száma. Ezek a feladat szerint független $\text{Pois}(\ln 4)$ eloszlású valószínűségi változók. Ezért a keresett várható érték $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 3\lambda = 3 \ln 4 \approx 4,159$ hívás érkezik be.
- b) Minden egyes órában $p := \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} \approx 0,5966$ valószínűséggel érkezik be legfeljebb egy hívás, a többi órától függetlenül. Ezért 8 órából az ilyen tulajdonságú órák száma binomiális eloszlású $n = 8$ és p paraméterekkel. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(Y \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - (1-p)^8 - 8p(1-p)^7 \approx 0,9910.$$

12. Jelölje X a balesetek számát egy napon. A feladat kitűzése alapján (nagyjából mindennap ugyanannyi autó közlekedik, ezek egymástól függetlenül, azonos [feltehetően kicsi] valószínűséggel okoznak balesetet) $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, ahol az előző feladathoz hasonlóan $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda} = 0,25 = \frac{1}{4}$ miatt $\lambda = \ln 4$.

Így 7 napból (egy hétből) az olyan napok száma, amelyeken egynél több (azaz legalább 2) baleset lesz, binomiális eloszlású $n = 7$ és $p = \mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} \approx 0,4034$ paraméterekkel.

Így a kért valószínűség $\mathbb{P}(Y = 2) = \binom{7}{2} \cdot (0,4034)^2 \cdot (1 - 0,4034)^{7-2} \approx 0,2583$.

13. A feladat alapján (sok egér van, ezek egymástól függetlenül és kicsi valószínűséggel vannak a réten) a réten lévő egerek száma Poisson-eloszlású, jelöljük ezt X -szel. Ekkor azt tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X = 1) = 2e^{-2} = \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}$, vagyis $\lambda = 2$.

A fogott egerek összömege (dekagrammban mérve) $10X$, ennek a szórását kell meghatározni. A szórás abszolút homogenitása miatt $\mathbb{D}(10X) = |10|\mathbb{D}(X) = |10|\sqrt{\mathbb{D}^2(X)} = |10|\sqrt{\lambda} = 10\sqrt{2} = 14,1421$.

Természetesen jó is, hogy nem a szórás, hanem a szórásnégyzet azonosságait használjuk: $\mathbb{D}^2(10X) = 10^2 \mathbb{D}^2(X) = 100\lambda = 200$, így $\mathbb{D}(10X) = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

14. A sűrűségfüggvény képlete az eloszlásfüggvény deriválásával adódik (illetve az $x = 2$ és $x = 10$ pontokban, ahol az eloszlásfüggvény nem differenciálható, ott választható 0-nak):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{32} - \frac{1}{16}, & \text{ha } 2 < x < 10, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Innen a szokásos képletekkel

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_2^{10} \left(\frac{x^2}{32} - \frac{x}{16} \right) dx = \left[\frac{x^3}{96} - \frac{x^2}{32} \right]_2^{10} = \frac{1000 - 8}{96} - \frac{100 - 4}{32} = 10 \frac{1}{3} - 3 = \frac{22}{3} = 7,3$$

és

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_2^{10} \left(\frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{16} \right) dx = \left[\frac{x^4}{128} - \frac{x^3}{48} \right]_2^{10} = \frac{10000 - 16}{128} - \frac{1000 - 8}{48} \\ &= \frac{30000 - 48 - 8000 + 64}{384} = \frac{22016}{384} = \frac{172}{3} \end{aligned}$$

$$\text{miatt } \mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{516}{9} - \frac{484}{9} = \frac{32}{9} = 3,5.$$

15.

$Y \backslash X$	0	1	p_Y
1	0	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{10}$
2	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
p_X	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

Magyarázat: mivel játékkalkuláció után csak közösségi média alkalmazást frissíthet,

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1 | \text{elsőre játék}) = 1.$$

Ugyanakkor közösségi média alkalmazás után a maradék 4, vagyis 2 játék- és két közösségi média alkalmazás közül választ egyet egyenletesen, tehát $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1 | \text{elsőre közösségi média}) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2 | \text{elsőre közösségi média}) = \frac{1}{2}$. Így a teljes valószínűség tétele szerint

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 1 | \text{elsőre játék}) \mathbb{P}(\text{elsőre játék}) \\ &+ \mathbb{P}(X = 1, Y = 1 | \text{elsőre közösségi média}) \mathbb{P}(\text{elsőre közösségi média}) = 1 \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

és a szorzási szabály szerint

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2 | \text{elsőre közösségi média}) \mathbb{P}(\text{elsőre közösségi média}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

(az utóbbi komplementer valószínűséggel is kiszámítható, ha amellet érvelünk, hogy $\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = 0$). A peremeloszlásokat szokás szerint a sorok/oszlopok összegzésével kapjuk a táblázat szerint.

$\mathbb{E}(XY)$ kiszámítása értékészlet meghatározásával: $\text{Ran}(XY) = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(XY = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = \frac{3}{10}$, $\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = Y = 1) = \frac{7}{10}$, tehát $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k \in \text{Ran}(XY)} k \mathbb{P}(XY = k) = \frac{7}{10}$.
Avagy eloszlástranzformáció-szerű képlettel: $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k \in \text{Ran}(X), l \in \text{Ran}(Y)} kl \mathbb{P}(X = k, Y = l) = 1 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(X = Y = 1) = \frac{7}{10}$.

Mivel $\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{7}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{13}{10}$ és $\mathbb{E}(Y^2) = 1^2 \cdot \frac{7}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{19}{10}$, ezért $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{19}{10} - \frac{169}{100} = \frac{21}{100}$.

Nem függetlenek, ami pl. onnan látszik, hogy $\mathbb{P}(X = 0) \neq 0$, $\mathbb{P}(Y = 1) \neq 0$, de $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 0) \mathbb{P}(Y = 1)$.

16. (a) $\text{Bin}(3; 0,3)$, mert mindhárom villamos egymástól függetlenül 0,3 valószínűséggel „sikeres”, azaz hannoveri, és Y a sikerek száma.

- (b) A binomiális eloszlás szórásnégyzetének képlete alapján $\mathbb{D}^2(Y) = np(1-p) = 3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,63$. (Persze ki lehet számolni Y eloszlását kézzel is és az alapján a szórásnégyzetét.)
 X szórásnégyzetének kiszámolásához vegyük észre, hogy az (a)-hoz hasonló indoklással $X \sim \text{Bin}(3; 0,7)$. Így $\mathbb{D}^2(X)$ -re is 0,63 adódik (p és $1-p$ szerepe felcserélődik).
 Egy másik lehetséges indoklás az, hogy $Y = 3 - X$, mivel $X + Y$ értéke mindig 3. Így a szórásnégyzet azonosságai szerint $\mathbb{D}^2(3 - X) = \mathbb{D}^2(-X) = (-1)^2 \mathbb{D}^2(X) = 0,63$.
- (c) $\mathbb{P}(X = 0, Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 3) = (0,3)^3 = 0,027$, $\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \mathbb{P}(Y = 2) = \binom{3}{2} \cdot (0,3)^2 \cdot 0,7 = 0,189$, $\mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0,3 \cdot (0,7)^2 = 0,441$, $\mathbb{P}(X = 3, Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0,7^3 = 0,343$ (táblázatban is megadható, ekkor a többi elem 0). Indoklás: $Y \sim \text{Bin}(3; 0,3)$ és $X = 3 - Y$.
- (d) $\mathbb{E}(XY)$ kiszámítása értékészlet meghatározásával: $\text{Ran}(XY) = \{0, 2\}$, $\mathbb{P}(XY = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 0,63$ (és így $\mathbb{P}(XY = 0) = 1 - 0,63 = 0,37$), tehát $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k \in \text{Ran}(XY)} k \mathbb{P}(XY = k) = 2 \cdot 0,63 = 1,26$.
 Avagy eloszlástranzformáció-szerű képlettel: $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k \in \text{Ran}(X), l \in \text{Ran}(Y)} kl \mathbb{P}(X = k, Y = l) = 1 \cdot 2 \cdot \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + 2 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 2 \cdot 0,189 + 2 \cdot 0,441 = 1,26$.
- (e) Nem függetlenek, ami pl. onnan látszik, hogy $\mathbb{P}(X = 0) \neq 0$, $\mathbb{P}(Y = 0) \neq 0$, de $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 0) \mathbb{P}(Y = 0)$.