

Ismétlő feladatok

Zárthelyi dolgozatra készüléshez

- Legyenek az A és B független események, C pedig mindkettőjüket kizáró esemény. Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$. $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cup C) = ?$
- Egy tesztelés alatt lévő gyártóeszközzel kiderül, hogy a vizsgált gyártmány 0,15 valószínűséggel anyaghibás, 0,3 valószínűséggel mérethibás, és 0,2 valószínűséggel felületi hibás. A hibák páronként függetlenek, de együttesen nem: 0,02 valószínűséggel egyszerre következik be mindhárom hibatípus. Mennyi a valószínűsége, hogy egy termék hibátlan?
- Két urna közül az egyikben 5 zöld és 7 kék, a másikban 3 zöld és 8 kék golyó van. Az elsőből találmra átrakunk kettőt a másodikba, majd onnan áttesszünk egyet az elsőbe. Mi az esélyünk kék golyó húzására, ha a) az első b) a második urnából húzunk?
- A vizsgázók 75%-a A szakos, 15%-a B szakos, és 10%-a C szakos. Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy egy hallgató ötöst kap, az A szakosok esetében 0,4, a B szakosoknál 0,7, és a C szakosoknál 0,6. Ha egy személyről tudjuk, hogy ötösre vizsgázott, akkor milyen valószínűséggel lehet a) A , b) B , c) C szakos?
- Tegyük fel, hogy valamely programnyelven (pl. Python) az $\text{Indicator}(p)$ függvény az 1 értéket p és a 0 értéket $1 - p$ valószínűséggel adja vissza. Milyen eloszlású az alábbi függvényhívás által definiált valószínűségi változó?

```
def RandomExperiments():
    k = 1
    while Indicator(0.5) == 0:
        k += 1
    return k
```
- Aladár és Béla a következő játékot játsszák: mindketten dobnak egy-egy dobókockával, és ha egyikőjük legalább kétszer akkora dob, mint a másik, akkor a vesztes kifizeti a dobott számok összegének háromszorosát a nyertesnek (egyébként döntetlen). Mennyi Aladár nyereményének várható értéke?
- Válasszunk ki egy pontot véletlenszerűen az egységnyi négyzetben. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a pont közelebb van a négyzet egy oldalához, mint egy átlójához?
- Tekintsük azt az f valószínűségi függvényt, amire $f(x) = \alpha \cdot x^4$, ha $x \in (2, 3)$, és 0 egyébként. Milyen α paraméterérték mellett lesz ez sűrűségfüggvény? Adjuk meg ebben az esetben a megfelelő eloszlásfüggvényt. Jelölje X a sűrűségfüggvényhez tartozó valószínűségi változót. Mennyi $\mathbb{P}(X > 12)$ illetve $\mathbb{E}(X)$?
- Legyen Y olyan valószínűségi változó, aminek sűrűségfüggvénye valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \frac{\alpha}{(1+x)^2} & \text{ha } -5 < x < -2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a $\mathbb{P}(-4 < Y < -3)$ valószínűséget. (2019, pótZH)

- Egy kosárba próbálunk bedobni egy papírgalacsint. A találat valószínűsége minden próbálkozásnál 0,2 (a többi próbálkozástól függetlenül). Mennyi a szükséges próbálkozások átlagos száma? Ha az első találat után tovább próbálkozunk, várhatóan hányadik dobásra találunk be másodszor?
- A márkaszervizbe a tulajdonosok időnként betelefonálnak a kérdéseikkel (egymástól függetlenül, egyforma, kicsi valószínűséggel). Annak a valószínűsége, hogy egy óra alatt nem történik hívás, 25%.
a) Várhatóan hány hívás érkezik 3 óra alatt?
b) Mi annak a valószínűsége, hogy 8 órából legalább 2-ben legfeljebb 1 hívás érkezik be?
- Egy városban az utakon 25% az olyan napok aránya, amikor egyetlen baleset sem történik. Rendszeresen autót közlekedik, nagyságrendileg minden nap ugyanannyi, és minden autó egymástól független, egyforma valószínűséggel okoz balesetet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a jövő héten pontosan 2 napon lesz 1-nél több baleset?

13. Egy rét környékén nagyon sok 10 dekagrammos egér él, ezek mindegyike egymástól függetlenül, nagyon kicsi valószínűséggel tartózkodik éppen a réten: annak a valószínűsége, hogy pontosan egy egér van ott, $2e^{-2}$. Egy macska kimegy egerészni a rétre és az ott lévő összes egeret megfogja. Hány dekagramm az általa fogott egerek összsúlyának szórása?
14. Egy mezőn előforduló, véletlenszerűen választott nyúl kilogrammban mért X testtömegének eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 2, \\ \frac{(x-2)^2}{64}, & \text{ha } 2 \leq x \leq 10, \\ 1, & \text{ha } x > 10. \end{cases}$$

Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.

15. Egy okostelefonon 2 játékkalkalmazás és 3 közösségi média alkalmazás van. A telefon operációs rendszere először véletlenszerűen kiválaszt az öt alkalmazásból egyet, amit frissít, majd ha ez egy közösségi média alkalmazás volt, akkor a maradék négyből kiválaszt még egyet véletlenszerűen, amit frissít, ha pedig játékkalkalmazás volt, akkor a három közösségi média alkalmazás közül választ ki egyet, amit szintén frissít. Jelölje X a frissített játékkalkalmazások és Y a frissített közösségi média alkalmazások számát. Határozzuk meg X és Y együttes eloszlását és peremeloszlásait, továbbá $\mathbb{D}^2(Y)$ -t és $\mathbb{E}(XY)$ -t. Független-e X és Y ?
16. Lajoska nagyon szereti a villamosokat, ezért a nyári szünet egy szép napján kimegy a Határ útra és megfigyel 3 db egymás után közlekedő 3-as villamost. Tegyük fel, hogy a villamosok egymástól függetlenül 70% valószínűséggel CAF és 30% valószínűséggel hannoveri típusúak. Jelölje X a Lajoska által megfigyelt CAF és Y az általa megfigyelt hannoveri villamosok számát.
- (a) Milyen eloszlású Y és milyen paraméterekkel?
 - (b) Határozzuk meg $\mathbb{D}^2(X)$ -et és $\mathbb{D}^2(Y)$ -t.
 - (c) Adjuk meg X és Y együttes eloszlását.
Megjegyzés: Ha úgy könnyebb, (a)-t és (b)-t (c) után is megoldhatjuk.
 - (d) Határozzuk meg $\mathbb{E}(XY)$ -t.
 - (e) Független-e X és Y ?

