

5. Übungsblatt

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen, diskrete gemeinsame Verteilungen, Verteilungs- und Dichtefunktion

- Ein regelmäßiger Würfel wird zweimal geworfen. Sei X die Anzahl der Augenzahlen 6, und sei Y der Anzahl der geraden Ergebnisse.
 - Sind X und Y unabhängig?
 - Geben wir die gemeinsame Verteilung und die Randverteilungen von X und Y an.
- Die folgende Tabelle enthält die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y .

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

- $p = ?$
 - $\mathbb{P}(X \leq 0, Y = 1) = ?$
 - Sind X und Y unabhängig?
 - $\mathbb{E}(XY) = ?$
- In einer Urne gibt es 2 weiße, 2 grüne und 2 rote Bälle. Wir ziehen ein paar Bälle nacheinander (ohne Zurücklegen) aus der Urne bis zum ersten roten Ball. Sei X die Anzahl der gezogenen Bälle, und sei Y die Anzahl der gezogenen weißen Bälle. Geben wir die gemeinsame Verteilung von X und Y an. Sind X und Y unabhängig?
 - Seien $X, Y \sim \text{Geo}(\frac{2}{3})$ unabhängige Zufallsvariablen. Bestimmen wir die folgenden Werte:
 - $\mathbb{E}(XY)$
 - $\mathbb{D}(X + Y)$
 - $\mathbb{P}(X = 2 \mid Y = 5)$
 - $\mathbb{P}(X = Y)$.
 - Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y ist in der folgenden Tabelle angegeben, aber zwei Werte fehlen. Bestimmen wir diese Werte, wenn wir wissen, dass die Ereignisse $\{X = 2\}$ und $\{Y = 0\}$ unabhängig sind. Sind auch die Variablen X und Y unabhängig? Berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(XY > 0 \mid X < 2)$ und die Erwartungswerte $\mathbb{E}(4X + Y)$ und $\mathbb{E}(XY)$.

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$1/10$	$1/5$	
2		$1/4$	$1/5$

- Entscheiden wir, ob die durch die unten angegebenen Zuordnungen definierten Funktionen auch Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen sind.

- $F(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0 \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $F(t) = e^{-e^{-t}}$
- $F(t) = 1 - e^{-t^2}$
- $F(t) = \frac{1}{\pi} \arctan(t) + \frac{1}{2}$

- Bestimmen wir den Wert von α im unten angegebenen Beispielen, falls f eine Dichtefunktion einer Zufallsvariable ist. Geben wir auch die zugehörige Verteilungsfunktion an.

- $f : t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t - t^2) & \text{falls } 0 < t < 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $f : t \mapsto \begin{cases} \alpha\sqrt{t-2} & \text{falls } 2 < t < 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $f : t \mapsto \begin{cases} \alpha\sqrt{t-2} & \text{falls } 3 < t < 4, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $f : t \mapsto \begin{cases} \alpha \cos \frac{t}{2} & \text{falls } 0 < t < \pi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

*e) Betrachten wir für jede obige Funktion f eine solche Zufallsvariable X , deren Dichtefunktion die Funktion f ist. Bestimmen wir den Wert t , für den $\mathbb{P}(X < t) = 1/2$ gilt (dieser Wert ist der Median der Verteilung).

8. Sei $X \sim \text{Pois}(3)$ und sei $Y = 3X - 1$. Bestimmen wir den Wert der Verteilungsfunktion von Y an der Stelle π .
9. Wir werfen einen regulären Würfel (mit 6 Seiten). Bezeichne X die Augenzahl und Y die Anzahl der positiven Teiler der Zahl. Skizzieren wir die Verteilungsfunktion von X und Y . Sind diese Verteilungsfunktionen stetig?
-
10. *In der Vorlesung:* Die Verteilung der Durchmesser eines Kraters auf dem Zwergplaneten Pluto kann mit einer Zufallsvariablen S beschrieben werden, die die folgende Dichtefunktion hat:

$$f_S : t \mapsto \begin{cases} ct^{-\frac{5}{2}} & \text{falls } t > d, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier sind c und d reelle Konstanten. Nehmen wir an, dass $\mathbb{P}(S > 9) = 0,2689$ gilt. Bestimmen wir die Werte von c und d .

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in der Vorlesung besprochen (einige Aufgaben können eventuell auch in der Übung gelöst werden). Mit der Ausnahme der Aufgaben 11. (a), 12. (a) sowie 14. (a) können ähnliche Aufgaben in der Klausur/Prüfung nur in der 6. Aufgabe auftauchen.

11. Wir wählen einen zufälligen Punkt P im Intervall $[0, 1]$. Bezeichne X den Abstand zwischen P und dem Punkt 0,3.
- (a) Sei Ω unser Ergebnisraum. Beschreiben wir X als eine Funktion $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (b) Bestimmen wir die Verteilungsfunktion von X .
 - (c) Bestimmen wir die Dichte(funktion) von X .
12. Im Intervall $[0, 1]$ wählen wir zufällig einen Punkt P . Bezeichne X das Quadrat (also die zweite Potenz) des Abstands zwischen P und dem näherem Endpunkt des Intervalls zu P .
- (a) Sei $\Omega = [0, 1]$ unser Ergebnisraum. Beschreiben wir X als Funktion $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (b) Bestimmen wir die Verteilungs- und Dichtefunktion von X .
13. Wir wählen einen zufälligen Punkt (X, Y) im gleichschenkligen Dreieck mit Ecken $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$ zufällig aus.
- a) Bestimmen wir die Verteilungs- und Dichtefunktion von X .
 - b) Bestimmen wir die Verteilungs- und Dichtefunktion von Y .
14. Auf der Ebene, im rechteckigen, gleichschenkligen Dreieck mit Ecken $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1/2, 1/2)$ wählen wir einen zufälligen Punkt P aus. Bezeichne X den Abstand zwischen dem Punkt P und der x -Achse.
- (a) Sei das Dreieck (als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$) unser Ergebnisraum, bezeichnen wir es mit Ω . Beschreiben wir X als Funktion $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (b) Was ist die Verteilungs- und Dichtefunktion von X ?
15. Zwei Punkte werden zufällig auf zwei gegenüberliegenden Seiten des Einheitsquadrats ausgewählt, sei X das Quadrat des Abstands der Punkte. Bestimmen wir die Verteilungs- und Dichtefunktion von X .
- a) Bestimmen wir die Verteilungsfunktion von X .
 - b) Bestimmen wir die Dichte(funktion) von X .
 - c) An welchen Stellen nimmt die Dichtefunktion von X den größten Wert an?
16. Drei Zahlen werden zufällig im Intervall $(0, 1)$ ausgewählt. Sei Y der Wert der mittleren Zahl. Bestimmen wir die Verteilungs- und Dichtefunktion von Y .