

5. Gyakorlat

Diszkrét együttes eloszlás, függetlenség, bevezetés a folytonos eloszlásokhoz

Végeredmények és megoldások

1. a) Nem függetlenek. Ennek a megsejtéséhez vezető helyes intuíció például az, hogy ha hatost dobunk, akkor egyben párosat is dobunk, tehát ha ismerjük a hatos dobások számát, akkor annak ismeretében a páros dobások száma máshogy viselkedik, mint ezen ismeret hiányában és viszont. Például mindig legalább annyi páros dobás van, mint hatos.

Annak a precíz bizonyításához, hogy nem függetlenek, elég egy olyan $k \in \text{Ran}(X)$ és $l \in \text{Ran}(Y)$ értékekből álló párt találnunk, amelyekre $\mathbb{P}(X = k, Y = l) \neq \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = l)$. $\text{Ran}(X) = \text{Ran}(Y) = \{0, 1, 2\}$, mivel a két dobásból 0, 1 vagy 2 lehet hatos/páros. Legyen például $k = 2$ és $l = 1$. Ekkor $\mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = \mathbb{P}(2 \text{ dobásból } 2 \text{ hatos, } 1 \text{ páros}) = 0$, míg $\mathbb{P}(X = 2) \mathbb{P}(Y = 1) \neq 0$, mert $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{36}$ és $\mathbb{P}(Y = 1) = 2 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6}$ (mert Y értéke pontosan akkor 1, ha az első dobás páros és a második páratlan, vagy viszont).

b) A teljes együttes eloszlás táblázat hasonlóan adódik. $\{X = 1, Y = 0\}$ és $\{X = 2, Y = 0\}$ is lehetetlen események. $\mathbb{P}(X = Y = 0) = \mathbb{P}(\text{két páratlant dobunk}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(1 \text{ dobás páratlan, a másik } 2\text{-es v. } 4\text{-es}) = 2 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{12}{36}$, $\mathbb{P}(X = Y = 1) = \mathbb{P}(1 \text{ dobás páratlan, a másik } 6\text{-os}) = 2 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = \mathbb{P}(\text{mindkét dobás } 2\text{-es vagy } 4\text{-es}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$, $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(1 \text{ dobás páratlan, a másik } 6\text{-os}) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{36}$, $\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \mathbb{P}(1 \text{ dobás } 6\text{-os, a másik } 2\text{-es vagy } 4\text{-es}) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$, $\mathbb{P}(X = Y = 2) = \mathbb{P}(\text{mindkét dobás } 6\text{-os}) = \frac{1}{36}$.

Táblázatos alakban, ahol a szokásos módon X peremeloszlását a megfelelő oszlopok, Y -ét pedig a megfelelő sorok összegzésével kapjuk:

$Y \backslash X$	0	1	2	p_Y
0	$\frac{9}{36}$	0	0	$\frac{9}{36}$
1	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	0	$\frac{18}{36}$
2	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{9}{36}$
p_X	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	(1)

Megjegyzés: Figyeljük meg, hogy X peremeloszlása binomiális $n = 2$ és $p = 1/6$ paraméterekkel, és Y -é is $n = 2$ és $p = 1/2$ paraméterekkel.

2. a) $\frac{1}{60}$, mert az együttes eloszlás táblázatában lévő valószínűségek összegének 1-et kell adnia, ez az összeg pedig $60p$.

b) $\mathbb{P}(X \leq 0, Y = 1) = \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 5p + 15p = \frac{1}{3}$.

c) Igen. Ehhez meghatározzuk a peremeloszlásokat. Y peremeloszlásának értékeit a táblázat sorösszegei adják: $\mathbb{P}(Y = -1) = p + 3p + 6p = \frac{1}{6}$, így $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{5}{6}$. X peremeloszlásainak értékeit pedig

a táblázat oszlopösszegei adják: $\mathbb{P}(X = -1) = p + 5p = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}(X = 0) = 3p + 15p = \frac{3}{10}$, így

$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{6}{10}$. Innen könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = l)$ minden $k \in \text{Ran}(X) = \{-1, 0, 1\}$ és $l \in \text{Ran}(Y) = \{-1, 1\}$ esetén teljesül.

(Itt nem részletezzük a számolásokat, de a függetlenség igazolásához ezt MINDEN ilyen (k, l) párra ellenőrizni kell, nem elég egyre ellenőrizni!)

d) $\mathbb{E}(XY)$ -t kétféleképpen számolhatjuk ki (ami lényegében ugyanaz).

1. mo.: meghatározzuk XY súlyfüggvényét/eloszlását és a várható érték szokásos definíciója szerint számolunk.

$$\text{Ran}(XY) = \{-1, 0, 1\}. \quad \mathbb{P}(XY = 0) = \mathbb{P}(X = 0 \text{ vagy } Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{3}{10}, \quad \mathbb{P}(XY = -1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = -1) + \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) = \frac{11}{60},$$

$$\text{így } \mathbb{P}(XY = 1) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{11}{60} = \frac{31}{60}. \quad \text{Így tehát } \mathbb{E}(XY) = (-1) \cdot \mathbb{P}(X = -1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) = \frac{31-11}{60} = \frac{1}{3}.$$

2. mo.: A kétdimenziós transzformált várható értékére vonatkozó képlettel ($XY = g(X, Y)$), ahol $g(x, y) = xy$, lásd előadás – $\mathbb{E}(XY)$ -on kívül más transzformált várható értékét nem számoltuk ki még

így):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{k \in \text{Ran}(X)} \sum_{l \in \text{Ran}(Y)} kl \mathbb{P}(X = k, Y = l) = (-1) \cdot (-1) \cdot \mathbb{P}(X = Y = -1) + \dots + 1 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(X = Y = 1) \\ &= p - 5p - 6p + 30p = 20p = 20p = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

3. Az együttes eloszlást az alábbi táblázat tartalmazza.

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5
0	1/3	2/15	1/30	0	0
1	0	2/15	2/15	1/15	0
2	0	0	1/30	1/15	1/15

Indoklás: A kihúzott golyók száma azt is mutatja, hogy hányadikra húztunk pirosat, hiszen piros húzásakor leállunk, abbahagyjuk a golyók kihuzogatását.

Ha elsőre pirosat húzunk, akkor nyilván nem húzunk előtte fehéret, ezért $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 0$, hasonlóan nem húzhatunk két fehéret, ha már másodikra pirosat húzunk, ezért $\mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 0$. Ha pedig csak negyedekre húzunk pirosat, akkor kellett, hogy előtte legalább egy fehéret húzzunk, hiszen pirosan és fehéren kívül csak 2 zöld van, ezért $\mathbb{P}(X = 4, Y = 0) = 0$. Ha pedig ötödikre, akkor mindkét fehéret ki kellett már húzzuk addigra, ezért $\mathbb{P}(X = 5, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 5, Y = 1) = 0$.

Annak a valószínűsége, hogy elsőre pirosat húzunk, $1/3$, hiszen a golyók harmada piros.

Az $\{X = 2, Y = 0\}$ esemény azt jelenti, hogy másodikra húztunk pirosat és előtte nem fehéret, tehát zöldet húztunk. Ennek valószínűsége $1/3 \cdot 2/5 = 2/15$, hiszen eleinte a golyók harmada zöld, egy zöld kihúzása után 5 golyó marad, amiből 2 piros, tehát a piros húzás valószínűsége $2/5$. Ugyanígy adódik az $\{X = 2, Y = 1\}$ esemény valószínűsége. Ekkor először fehéret, utána pirosat húzunk.

Az $\{X = 3, Y = 0\}$ esemény azt jelenti, hogy harmadikra húztunk pirosat és előtte nem húztunk fehéret, tehát két zöldet húztunk. Ennek valószínűsége $1/3 \cdot 1/5 \cdot 1/2 = 1/30$, hiszen eleinte a golyók harmada zöld, egy zöld kihúzása után 5 golyó marad, amiből 1 zöld, tehát a zöld húzás valószínűsége $1/5$, ezután 4 golyó marad, aminek a fele piros, tehát a piros húzásának valószínűsége $1/2$. Hasonlóan $\mathbb{P}(X = 3, Y = 2) = 1/3 \cdot 1/5 \cdot 1/2 = 1/30$, csak zöld helyett fehéret húzunk.

Ha $X = 3$ és $Y = 1$, az azt jelenti, hogy vagy fehér-zöld-piros vagy zöld-fehér-piros sorrendben a három húzás. Mindkettőnek ugyanakkora a valószínűsége: $1/3 \cdot 2/5 \cdot 2/4 = 1/15$, tehát összesen $2/15$.

Ha $X = 4$ és $Y = 1$, az azt jelenti, hogy kihúztuk a két zöldet és egy fehéret valamilyen sorrendben, majd a pirosat. zfpz vagy zfpz vagy fzfp. Ennek valószínűsége $1/3 \cdot 1/5 \cdot 1/2 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 2/5 \cdot 1/4 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 2/5 \cdot 1/4 \cdot 2/3 = 1/15$. Ugyanígy ugyanennyi a $\mathbb{P}(X = 4, Y = 2)$ valószínűség, csak a fehérek és zöldek szerepet cserélnek. Végül $\mathbb{P}(X = 5, Y = 2) = 1 - a \text{ többi valószínűség}$, de a fentiekhez hasonlóan közvetlenül is kiszámolható.

A függetlenséghez az kell, hogy az együttes eloszlás minden tagja a peremeloszlások megfelelő értékeinek szorzataként álljon elő. Ebben az esetben ez nyilvánvalóan nem teljesül az együttes eloszlás 0 értékű tagjaira. Nézzük például a $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$ valószínűséget, ami 0. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(X = 1)$ és a $\mathbb{P}(Y = 1)$ valószínűségeket. A peremeloszlást az együttes eloszlás megfelelő tagjainak összegzésével kaphatjuk meg. Ebben a példában X peremeloszlását az oszlopok, míg Y peremeloszlását a sorok összegzésével számolhatjuk.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 1/3 + 0 + 0 = 1/3 \text{ és} \\ \mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 1) = \\ &= 0 + 2/15 + 2/15 + 1/15 + 0 = 5/15 = 1/3\end{aligned}$$

Amiből látszik, hogy X és Y nem függetlenek, hiszen

$$0 = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) \neq \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 1) = 1/3 \cdot 1/3 = 1/9$$

4. a) Mivel függetlenek és mindkettőnek a várható értéke $1/p = 3/2$, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2,25$.

b) $\mathbb{P}(X = 2|Y = 5) = \mathbb{P}(X = 2) = (2/3) \cdot (1/3) = \frac{2}{9}$, mert a függetlenség diszkrét val. változókra

vonatkozó ekvivalens definíciója szerint $\{\mathbb{P}(X = k)\}$ és $\{\mathbb{P}(Y = l)\}$ minden $k \in \text{Ran}(X)$ -re és $l \in \text{Ran}(Y)$ -ra igaz, így $k = 2$ -re és $l = 5$ -re is, és mivel $\mathbb{P}(Y = 5) > 0$, ezért ebből $\mathbb{P}(X = 2|Y = 5) = \mathbb{P}(X = 2)$ is következik.

c*) $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\exists k \in \{1, 2, \dots\}: X = Y = k) = \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{X = Y = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = Y = k)$, mert az $\{X = Y = k\}$ események páronként kizáróak. Továbbá X és Y függetlensége miatt $\mathbb{P}(X = Y = k) = \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k)$ minden k -ra, és így a keresett valószínűség a végtelen mértani sor összegképletével meghatározható:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p^2 (1-p)^{2k-2} = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k-2} = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)^2)^{k-1} \\ &\stackrel{l:=k-1}{=} p^2 \sum_{l=0}^{\infty} ((1-p)^2)^l = p^2 \frac{1}{1 - (1-p)^2} \stackrel{p=2/3}{=} 4/9 \cdot \frac{1}{1 - 1/9} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. Ahhoz, hogy az $\{X = 2\}$ és az $\{Y = 0\}$ események függetlenek legyenek, az kell, hogy $\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 2) \mathbb{P}(Y = 0)$ teljesüljön. Jelöljük a táblázatból hiányzó jobb felső elemet x -szel, a bal alsót y -nal. Ekkor $\mathbb{P}(X = 2) = x + \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + x = \frac{3}{10} + x$ és $\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = x$. Innen $(x + \frac{1}{5})(x + \frac{3}{10}) = x$, azaz $x^2 - 0,5x + 0,06 = 0$. A másodfokú egyenletet megoldva $x_{1,2} = \frac{0,5 \pm \sqrt{0,5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,06}}{2} = \frac{0,5 \pm 0,1}{2}$. Az $x_1 = 0,3$ azonban nem jó megoldás, mert $x = 0,3$ esetén a táblázatban szereplő számok összege nagyobb lesz, mint 1 (y értékét még nem tudjuk, de nemnegatív kell, hogy legyen, és a többi szám összege már 1,05). Így $x = x_2 = 0,2 = 1/5$ az egyetlen jó megoldás, és annak érdekében, hogy a táblázatban szereplő számok összege 1 legyen, $y = 1/20$. Tehát a kiegészített táblázat:

$\begin{array}{c c} & X \\ \hline Y & \end{array}$	0	1	2
0	1/10	1/5	1/5
2	1/20	1/4	1/5

A feltételes valószínűség definíciója szerint és mivel $\mathbb{P}(X = k)$ -t minden k -ra a táblázat k -nak megfelelő oszlopa összegzésével kapjuk, $\mathbb{P}(XY > 0|X < 2) = \mathbb{P}(X \neq 0 \text{ és } Y \neq 0|X < 2) = \mathbb{P}((X = 1 \text{ és } Y = 2) \text{ vagy } X = Y = 2|X < 2) = \frac{\mathbb{P}(\{(X=1,Y=2) \cup \{X=Y=2\}\} \cap X < 2)}{\mathbb{P}(X < 2)} = \frac{\mathbb{P}(X=1,Y=2)}{\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=0)} = \frac{1/4}{1/10 + 1/20 + 1/5 + 1/4} = \frac{5/20}{12/20} = \frac{5}{12}$.

A várható érték linearitása miatt (a 0 értékeket elhagyjuk, mivel 0-val vannak megszorozva a várható érték képletében) és azt használva, hogy $\mathbb{P}(Y = l)$ -t minden l -re a táblázat l -nek megfelelő sora összegzésével kapjuk, $\mathbb{E}(4X + Y) = 4\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 4(\mathbb{P}(X = 1) + 2\mathbb{P}(X = 2)) + 2\mathbb{P}(Y = 2) = 4(1/5 + 1/4) + 8(1/5 + 1/5) + 2(1/20 + 1/4 + 1/5) = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} + 1 = 6$.

A fentiek szerint XY pontosan akkor nem 0, ha $X = 1$ és $Y = 2$, ekkor $XY = 2$, vagy ha $X = Y = 2$, ekkor $XY = 4$. Így $\mathbb{E}(XY) = 2\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + 4\mathbb{P}(X = Y = 2) = 2 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/5 = \frac{13}{10}$.

X és Y nem függetlenek, ami például az eddig kiszámoltakból onnan látható, hogy $\mathbb{E}(X) = 5/4$ és $\mathbb{E}(Y) = 1$, viszont $13/10 = \mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 5/4$, ezért függetlenek sem lehetnek. De persze lehet olyan k -t és l -t találni, amire $\mathbb{P}(X = k, Y = l) \neq \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = l)$, például $k = l = 0$ esetén $1/10 \neq (1/2) \cdot (3/10)$.

6. a) Igen. Az nyilvánvaló, hogy (nem szigorúan, de) monoton növekvő és a határértéke $x \rightarrow -\infty$ esetén 0, $x \rightarrow +\infty$ esetén 1. A balról való folytonosságot elég az $x = 0$ pontban ellenőrizni, hiszen a konstans függvény minden pontban folytonos. Mivel $\lim_{x \uparrow 0} F(x) = \lim_{x \uparrow 0} 0 = 0 = F(0)$, a balról való folytonosság teljesül a 0-ban is (bár itt F nem folytonos). Így F teljesíti azokat a feltételeket, amelyek alapján eloszlásfüggvény.

Megjegyzés: könnyen látható, hogy F az 1 valószínűséggel konstans 0 val. változó eloszlásfüggvénye. F -et Heaviside-függvénynek (illetve a Heaviside-függvény balról folytonos változatának) nevezzük.

b) Igen. A függvény nemcsak balról folytonos, de folytonos is, mert folytonos függvények kompozíciója. Határértéke a $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\underbrace{e^{-x}}_{\rightarrow \infty}} = 0.$$

Határértéke a $+\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\underbrace{-e^{-x}}_{\rightarrow 0}} = 1.$$

Végül a függvény (szigorúan) monoton nő, mert a deriváltja minden pontban pozitív: láncszabállyal

$$F'(x) = -e^{-e^{-x}} \cdot (-e^{-x}) = e^{-e^{-x}} \cdot e^{-x}$$

(ugyanis $F(x) = (f(g(x)))$, ahol $f(x) = g(x) = e^{-x}$, tehát $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$), ami pozitív, mert e -t bármilyen valós hatványra emelve pozitív számot kapunk.

Megjegyzés: ez egy nevezetes folytonos eloszlás, az ún. Gumbel-eloszlás eloszlásfüggvénye. Lásd 2023-as zh, 6. feladat.*

c) Nem eloszlásfüggvény, mert a határértéke $-\infty$ -ben és ∞ -ben ugyanaz (mégpedig 1).

d) Igen. Ugyanis $F'(x) = \frac{1}{1+t^2} > 0$, tehát a függvény (szigorúan) monoton nő, ezenkívül mivel minden pontban differenciálható, ezért minden pontban folytonos is, tehát $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényként folytonos, amiből az is következik, hogy balról folytonos. A határértékei is megfelelnek az eloszlásfüggvény karakterizációjának: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-\pi}{2} + \frac{1}{2} = 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

7. Az $(*e)$ -hez csak végeredmények.

Ahhhhoz, hogy f sűrűségfüggvény legyen, az kell, hogy f nemnegatív legyen (ez az adott példákban mindig teljesül) és az integrálja $-\infty$ -tól ∞ -ig 1 legyen. Azokat a szakaszokat, ahol a függvény konstans 0, nem kell az integrálásnál figyelembe venni.

Az F eloszlásfüggvényt az $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ képlettel kapjuk, és $-\infty$ helyett itt is elég az integrálást attól a legkisebb értéktől kezdeni, ahol f már nem konstans 0, ez alatt $F(x) = 0$. A legkisebb olyan értéktől kezdve pedig, ahonnan f már mindig konstans 0, 1 lesz az eloszlásfüggvény értéke, ha f valóban sűrűségfüggvény. A primitív függvények meghatározását az eloszlásfüggvényeknél már nem részletezzük, mert ezek ugyanazok a primitív függvények, mint α értékének meghatározásánál (α helyes értékét behelyettesítve). Mivel a szakaszhatárokon F folytonos, ezeket a pontokat bármelyik szakaszba besorolhatjuk.

(a)

$$1 \stackrel{!}{=} \int_0^2 \alpha(2x - x^2)dx = \alpha \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \alpha(4 - 8/3) = \frac{4}{3}\alpha,$$

vagyis $\alpha = \frac{3}{4}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{3}{4}(2t - t^2)dt = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 & 0 < x \leq 2 \\ 1 & 2 < x. \end{cases}$$

(b)

$$1 \stackrel{!}{=} \int_2^3 \alpha \sqrt{x-2} dx = \alpha \left[\frac{2}{3}(x-2)^{3/2} \right]_{x=2}^3 = \frac{2}{3}\alpha((3-2)^{3/2} - (2-2)^{3/2}) = \frac{2}{3}\alpha(1-0),$$

tehát $\alpha = \frac{3}{2}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \int_2^x \frac{3}{2} \sqrt{t-2} dt = \sqrt{(x-2)^3} & 2 < x \leq 3 \\ 1 & 3 < x. \end{cases}$$

(c) Nagyon hasonló, mint a (b), csak az integrálási határok mások:

$$1 \stackrel{!}{=} \int_3^4 \alpha \sqrt{x-2} dx = \alpha \left[\frac{2}{3}(x-2)^{3/2} \right]_{x=3}^4 = \frac{2}{3}\alpha((4-2)^{3/2} - (3-2)^{3/2}) = \frac{2}{3}\alpha(2\sqrt{2}-1),$$

így $\alpha = \frac{3}{2(2\sqrt{2}-1)}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 3 \\ \int_3^x \frac{3}{2(2\sqrt{2}-1)} \sqrt{t-2} dt = \frac{\sqrt{(x-2)^3}-1}{2\sqrt{2}-1} & 3 < x \leq 4 \\ 1 & 4 < x. \end{cases}$$

(d)

$$1 \stackrel{!}{=} \int_0^\pi \alpha \cos(x/2) dx = [2\alpha \sin(x/2)]_0^\pi = 2\alpha(\sin(\pi/2) - \sin(0)) = 2\alpha(1 - 0),$$

tehát $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{1}{2} \cos(t/2) dt = \sin\left(\frac{x}{2}\right) & 0 < x \leq \pi \\ 1 & \pi < x. \end{cases}$$

(*e) a) 1 b) 2,63 c) 3,54 – ezek pl. numerikus egyenletmegoldással kaphatóak meg, illetve az (a) esetében az eredmény a harmadfokú egyenlet szimbolikusan is megoldható, esetleg ránézésre is rá lehet jönni, hogy $x = 1$ jó megoldás és más jó megoldás nincs.

d) $\frac{\pi}{3}$ – ez könnyen adódik: az a 0 és π közötti (radiánban mért) szög, amelynek a felének a szinusza $1/2$, $2\pi/6$ -tal, vagyis $\pi/3$ -mal egyenlő, más megoldás nincs.

8. Y eloszlásfüggvénye:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(3X - 1 < y) = \mathbb{P}\left(X < \frac{y+1}{3}\right)$$

Mivel X csak egész értékeket vehet fel, $\frac{y+1}{3}$ -t kell egész értékre kerekítenünk. $y = \pi$ -t nézve:

$$F_Y(y = \pi) = \mathbb{P}\left(X \leq \left\lfloor \frac{\pi+1}{3} \right\rfloor\right) = \mathbb{P}(X \leq \lfloor 1.38 \rfloor) = \mathbb{P}(X \leq 1)$$

Tehát $F_Y(\pi) = \mathbb{P}(X \leq 1)$, és mivel X Poisson-eloszlású:

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = e^{-3} + 3e^{-3} = 4e^{-3}$$

Így tehát $F_Y(\pi) = 4e^{-3} \approx 0.1991$

9. X és Y eloszlásfüggvénye is lépcsős függvény. F_X ugrásai X lehetséges értékeiben vannak, minden ugrás nagysága $1/6$. Egy-egy dobható értéken átlépve ennyivel nő meg annak a valószínűsége, hogy az adott x számnál kisebb értéket dobunk.

Y értékkészlete $\{1, 2, 3, 4\}$, a dobható számok osztóinak a számai, F_Y ugrásai ezeken a helyeken vannak.

Az osztók száma: $Y(1) = 1, Y(2) = Y(3) = Y(5) = 2, Y(4) = 3, Y(6) = 4$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 \\ 1/6, & \text{ha } 1 < x \leq 2 \\ 2/6 = 1/3, & \text{ha } 2 < x \leq 3, \\ 3/6 = 1/2, & \text{ha } 3 < x \leq 4 \\ 4/6 = 2/3, & \text{ha } 4 < x \leq 5 \\ 5/6, & \text{ha } 5 < x \leq 6 \\ 1, & \text{ha } 6 < x \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \leq 1 \\ 1/6, & \text{ha } 1 < y \leq 2 \\ 4/6 = 2/3, & \text{ha } 2 < y \leq 3, \\ 5/6, & \text{ha } 3 < y \leq 4 \\ 1, & \text{ha } 4 < y \end{cases}$$

Nem folytonosak.

10. A feltételből következik, hogy $9 > d$, hiszen minden d -nél kisebb a számra $\mathbb{P}(S > a) = 1$.

a) Mivel egy intervallum valószínűsége a sűrűségfüggvény integrálja az adott intervallumon, ezért $\mathbb{P}(S > 9) = \int_9^\infty f_S(x) dx$, és a fentiek miatt ezen az egész félegyenesen $f_S(x) = cx^{-\frac{5}{2}}$. Tehát a következő egyenletet kapjuk c -re:

$$0,2689 = \mathbb{P}(S > 9) = \int_9^\infty f_S(x) dx = \int_9^\infty cx^{-\frac{5}{2}} = c \left[-\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} \right]_9^\infty = c \frac{2}{3} 9^{-\frac{3}{2}} = c \frac{2}{3} \frac{1}{(\sqrt{9})^3} = c \frac{2}{3} \frac{1}{27}$$

Innen $c = 10,89$

b) Tudjuk, hogy minden sűrűségfüggvénynek az integrálja a teljes számegyenesen 1. Ezért, felhasználva, hogy d -nél kisebb számokra a sűrűségfüggvény értéke 0

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) dx = \int_d^{\infty} cx^{-\frac{5}{2}} = c \left[-\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} \right]_d^{\infty} = c \frac{2}{3} d^{-\frac{3}{2}}$$

Innen

$$d^{\frac{3}{2}} = c \frac{2}{3} \quad \implies \quad d = \left(c \frac{2}{3} \right)^{\frac{2}{3}} = 3,749$$

11. (a) Egy $\omega \in \Omega = [0, 1]$ szám 0,3-tól vett távolsága $|\omega - 0,3|$, így $X(\omega) = |\omega - 0,3| = \begin{cases} 0,3 - \omega, & \text{ha } 0 \leq \omega \leq 0,3, \\ \omega - 0,3, & \text{ha } 0,3 \leq \omega \leq 1. \end{cases}$

(b) Mivel egy $[0, 1]$ -beli szám legfeljebb 0,7 távolságra lehet a 0,3 ponttól, $\text{Ran}(X) = [0, 0,7]$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = 0$, ha $x < 0$ és $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = 1$, ha $x > 0,7$.

Vegyük észre, hogy 0,3-nál kisebb távolságra az $\Omega = [0, 1]$ intervallumban a 0,3-tól balra és jobbra is vannak pontok, viszont 0,3-nál nagyobb távolságra csak a 0,3-tól jobbra. Így ha $0 < x < 0,3$, akkor

$$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}) = \mathbb{P}([0, 0,3 - x, 0,3]) + \mathbb{P}([0,3, 0,3 + x]) = x + x = 2x,$$

ahol az utolsó lépésben az egydimenziós geometriai valószínűségi mező képletét használtuk (a valószínűség az intervallumhosszal arányos, Ω hossza 1). Hasonlóan ha $0,3 \leq x \leq 0,7$, akkor

$$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}) = \mathbb{P}([0, 0,3]) + \mathbb{P}([0,3, 0,3 + x]) = 0,3 + x.$$

$$\text{Összefoglalva tehát } F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 2x, & \text{ha } 0 < x \leq 0,3 \\ 0,3 + x, & \text{ha } 0,3 < x \leq 0,7, \\ 1, & \text{ha } 0,7 < x \end{cases}.$$

(A szakaszhatárokat tetszőlegesen besorolhatjuk a határoló szakaszokhoz, mivel az eloszlásfüggvény folytonos. Úgy is jó a képlet, ha minden szakaszhatárhoz $\leq$ -t írunk, csak az a fontos, hogy minden határpontot besoroljuk legalább egy szakaszba.)

(c) Innen a sűrűségfüggvény deriválással adódik, ahol pedig nem differenciálható a sűrűségfüggvény, ott választhatjuk 0-nak (mivel az eloszlásfüggvény folytonos és véges sok pont: 0, 0,3, 0,7 kivételével differenciálható, lásd 4.2.2. Állítás):

$$f_X(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0 < x < 0,3, \\ 1, & \text{ha } 0,3 < x < 0,7, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megjegyzés: Az előbbi képlettel kapott függvény a 4.2.2. Állítás szerint sűrűségfüggvénye X -nek, de az $x = 0,3$ pontban nem teljesíti a sűrűségfüggvény szemléletes definícióját, ugyanis

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{F_X(0,3 + \Delta x) - F_X(0,3 - \Delta x)}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{0,3 + 0,3 + \Delta x - 2(0,3 - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{3}{2} \neq f_X(x).$$

Ez azonban nem baj, mert a szemléletes definíciónak pedig csak azokban a pontokban kell teljesülnie, ahol F_X differenciálható, és a 0,3 pontban nem az. Ha f_X értékét a 0,3 pontban $3/2$ -re változtatnánk, akkor teljesülne, és f_X még mindig sűrűségfüggvénye lenne X -nek (mivel az $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ egyenlőség semelyik x -re nem romlik el attól, hogy f_X -et egy pontban megváltoztatjuk). Ez a megváltoztatott sűrűségfüggvény azonban „szemléletesen helyesebb”, mint az eredeti, mert a 0,3 pontban is megadja, hogy „milyen sűrűséggel van a pont környékén a val. változó” (bal oldalon 2, jobb oldalon 1, tehát átlagosan $3/2$ sűrűséggel).

12. (a) Ha $P = \omega \in \Omega = [0, 1]$, akkor $X(\omega) = \min\{\omega^2, (1 - \omega)^2\} = \begin{cases} \omega^2, & \text{ha } 0 \leq \omega \leq \frac{1}{2}, \\ (1 - \omega)^2, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq \omega \leq 1. \end{cases}$

(b) X értékkészlete tehát $\text{Ran}(X) = [0, 1/4]$.

Ezért $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = 0$, ha $x \leq 0$ (F_X folytonossága miatt ez $x = 0$ -ban is igaz) és $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = 1/4$, ha $x \geq 1/4$ (hasonlóan $x = 1$ -ben is igaz).

Ha $0 < x < 1/4$, akkor az (a) feladat alapján

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(\{\omega \in [0, 1] : X(\omega) < x\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in [0, 1/2] : X(\omega) < x\}) + \mathbb{P}(\{\omega \in (1/2, 1] : X(\omega) < x\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in [0, 1/2] : \omega^2 < x\}) + \mathbb{P}(\{\omega \in (1/2, 1] : (1 - \omega)^2 < x\}) \\ &= \mathbb{P}([0, \sqrt{x})) + \mathbb{P}((1 - \sqrt{x}, 1]) = 2\sqrt{x}, \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben az egydimenziós geometriai valószínűségi mező képletét használtuk (Ω hossza 1, a valószínűség a hosszúsággal arányos). Összefoglalva tehát az eloszlásfüggvény:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 2\sqrt{x}, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{4}, \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{4} < x. \end{cases}$$

Ebből deriválással adódik a sűrűségfüggvény (konvenció szerint a határokon 0), vagyis

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

13. A 13. feladat megoldását a 10.16-i előadás után hirdetjük meg. Aki kíváncsi, oldja meg, a végeredményeket már láthatja. ;)

14. a) Az Ω eseményterünkbe eső $\omega = (x, y)$ pont x tengelytől vett távolságát éppen a pont második koordinátája adja, azaz $X(x, y) = y$

b) Az eloszlásfüggvény értéke t -ben annak a valószínűsége, hogy X kisebb értéket vesz fel, mint t , azaz a P pont t -nél közelebb van az x tengelyhez. Az eseménytérén belül minden pontra igaz, hogy az x tengelytől vett távolság 0 és $1/2$ közé esik. Legyen tehát $0 < t \leq \frac{1}{2}$. A kedvező terület a háromszög eseményterünkön belül egy trapéz, amelynek alapja az x tengelyen a $[0, 1]$ szakasz, szárjai a háromszög oldalai, másik alapja pedig az x tengellyel, attól t távolságban húzott párhuzamos szárak közé eső része. Ezen kedvező terület nagyságát úgy kaphatjuk meg, ha a teljes területből levonjuk a trapéz feletti, kieső, háromszög területét: $\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2$. Geometriai valószínűségi mező esetén ezt a kedvező területet osztjuk a teljes területtel, hogy megkapjuk a valószínűséget:

$$\mathbb{P}(X < t) = \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - t + t^2\right)}{\frac{1}{4}} = 4t - 4t^2$$

Az eloszlásfüggvény tehát

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 4t - 4t^2 & 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < t \end{cases}$$

A sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk, hiszen $f_X(t) = F'(t)$. $f_X(t) = \begin{cases} 4 - 8t & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

15. A 15. feladat megoldását is a 10.16-i előadás után hirdetjük meg.

16. A 16. feladatét is.