

### 5. Gyakorlat

Diszkrét együttes eloszlás, valószínűségi változók függetlensége, bevezetés a folytonos eloszlásokhoz

- Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Jelölje  $X$  a hatosok,  $Y$  pedig a páros eredmények számát.  
(a) Független-e  $X$  és  $Y$ ? (b) Adjuk meg  $X$  és  $Y$  együttes eloszlásának és peremeloszlásainak táblázatát.
- Az  $X$  és  $Y$  valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

| $Y \backslash X$ | -1   | 0     | 1     |
|------------------|------|-------|-------|
| -1               | $p$  | $3p$  | $6p$  |
| 1                | $5p$ | $15p$ | $30p$ |

- a)  $p = ?$       b)  $\mathbb{P}(X \leq 0, Y = 1) = ?$       c) Független-e  $X$  és  $Y$ ?      d)  $\mathbb{E}(XY) = ?$
- Egy dobozban 6 golyó van, 2 fehér, 2 zöld és 2 piros. Egyesével addig húzunk visszatevés nélkül a dobozból, amíg piros golyót nem kapunk. Jelölje  $X$  a kihúzott golyók számát,  $Y$  pedig a kihúzott fehér színű golyók számát. Adjuk meg az együttes eloszlásuk táblázatát. Független-e  $X$  és  $Y$ ?
  - Legyenek  $X, Y \sim \text{Geo}(\frac{2}{3})$  függetlenek. Határozzuk meg az alábbi mennyiségeket:  
a)  $\mathbb{E}(XY)$       b)  $\mathbb{P}(X = 2 \mid Y = 5)$       c\*)  $\mathbb{P}(X = Y)$ .
  - Az  $X$  és  $Y$  együttes eloszlását az alábbi táblázat adja meg, de két érték hiányzik. Határozzuk meg ezeket az értékeket, ha tudjuk, hogy az  $\{X = 2\}$  és  $\{Y = 0\}$  események függetlenek. Független-e  $X$  és  $Y$  is? Számítsuk ki az  $\mathbb{P}(XY > 0 \mid X < 2)$  valószínűséget és az  $\mathbb{E}(4X + Y)$  és  $\mathbb{E}(XY)$  várható értékeket.

| $Y \backslash X$ | 0      | 1     | 2     |
|------------------|--------|-------|-------|
| 0                | $1/10$ | $1/5$ |       |
| 2                |        | $1/4$ | $1/5$ |

- Eloszlásfüggvények-e az alábbi hozzárendelési szabályú  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények?  
a)  $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$       b)  $F(x) = e^{-e^{-x}}$       c)  $F(x) = 1 - e^{-x^2}$       d)  $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctg(x) + \frac{1}{2}$
- Határozzuk meg az  $\alpha$  értékét, ha tudjuk, hogy  $f$  sűrűségfüggvény. Adjuk meg az eloszlásfüggvényt is.  
a)  $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha(2x - x^2) & \text{ha } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$       b)  $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha\sqrt{x-2} & \text{ha } 2 < x < 3, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$   
c)  $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha\sqrt{x-2} & \text{ha } 3 < x < 4, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$       d)  $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha \cos \frac{x}{2} & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$   
\*e) Az egyes részfeladatokban milyen  $x$  esetén lesz  $\mathbb{P}(X < x) = \frac{1}{2}$ , ahol  $X$  az a valószínűségi változó, aminek a sűrűségfüggvénye a fenti? (Ezt az  $x$ -et hívják az eloszlás mediánjának.)
- Legyen  $X \sim \text{Pois}(3)$  és  $Y = 3X - 1$ . Határozzuk meg  $Y$  eloszlásfüggvényének értékét a  $\pi$  helyen.
- Dobunk egy (szabályos, hatoldalú) dobókockával. Jelölje  $X$  a dobott számot és  $Y$  a dobott szám pozitív osztóinak számát. Ábrázoljuk  $X$  és  $Y$  eloszlásfüggvényét. Folytonosak-e ezek az eloszlásfüggvények?

- Előadáson:* A Plútó törpebolygón lévő kráterek átmérőinek (km-ben vett) eloszlását közelítőleg az alábbi sűrűségfüggvényű  $S$  valószínűségi változóval írhatjuk le:  $f_S : x \mapsto \begin{cases} cx^{-\frac{5}{2}} & \text{ha } x > d, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$   
Tegyük fel, hogy  $\mathbb{P}(S > 9) = 0,2689$ .      a) Határozzuk meg  $c$  értékét.      b) Határozzuk meg  $d$  értékét.

*Az alábbi feladatok részben előadáson fognak szerepelni, előre bejelentett időpontban. A feladatok közül esetleg egy-kettő gyakorlaton is előfordulhat. A 11. (a), 12. (a) és 14. (a) feladatok kivételével ilyen típusú példák a zh-ban és a vizsgán csak a 6-os feladatban fordulhatnak elő.*

11. A  $[0, 1]$  intervallumon taláломra kiválasztunk egy  $P$  pontot. Jelölje  $X$  a  $P$  és a  $0,3$  pont közötti távolságot.
  - (a) Legyen  $\Omega = [0, 1]$  az eseményterünk. Írjuk fel  $X$ -et, mint  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt.
  - (b) Határozzuk meg  $X$  eloszlásfüggvényét.
  - (c) Határozzuk meg  $X$  sűrűségfüggvényét.
12. A  $[0, 1]$  intervallumon taláломra kiválasztunk egy  $P$  pontot. Jelölje  $X$  a  $P$  pont és az intervallum  $P$ -hez közelebbi végpontja távolságának négyzetét.
  - (a) Legyen  $\Omega = [0, 1]$  az eseményterünk. Írjuk fel  $X$ -et, mint  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt.
  - (b) Határozzuk meg  $X$  eloszlás- és sűrűségfüggvényét.
13. A síkon a  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  és  $(1, 1)$  csúcspontokkal rendelkező derékszögű, egyenlőszárú háromszög belsejében taláломra kiválasztunk egy  $(X, Y)$  pontot.
  - (a) Határozzuk meg  $X$  eloszlás- és sűrűségfüggvényét.
  - (b) Határozzuk meg  $Y$  eloszlás- és sűrűségfüggvényét.
14. Az  $\mathbb{R}^2$  síkon a  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  és  $(1/2, 1/2)$  csúcspontokkal rendelkező háromszög belsejében taláломra kiválasztunk egy  $P$  pontot. Jelölje  $X$  a  $P$  pont és az  $x$  tengely távolságát.
  - a) Legyen a háromszög (mint  $\mathbb{R}^2$  részhalmaza) az eseményterünk, jelöljük  $\Omega$ -val. Írjuk fel  $X$ -et, mint  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt.
  - b) Mi  $X$  eloszlás- és sűrűségfüggvénye?
15. Az egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán taláломra választunk egy  $a$  és egy  $b$  pontot. Jelöljük  $X$ -szel a két pont távolságának négyzetét.
  - a) Határozzuk meg  $X$  eloszlásfüggvényét.
  - b) Határozzuk meg  $X$  sűrűségfüggvényét.
  - c) Hol a legnagyobb  $X$  sűrűségfüggvényének értéke?
16. A  $(0, 1)$  intervallumban kijelölünk három pontot véletlenszerűen. Jelölje  $Y$  a középső pontot. Határozzuk meg  $Y$  eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét.

- 
- IMSc 5. (a) Adjunk példát olyan valószínűségi változóra, amelynek az eloszlásfüggvénye nem folytonos és az sem teljesül rá, hogy véges sok pont kivételével differenciálható. (Ilyen változónak sűrűségfüggvénye nyilván nem létezik.)
- (b) Tekintsük az alábbi, szakaszonként definiált  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1, \\ \frac{1}{x^k}, & \text{ha } k \geq 1 \text{ és } k < x \leq k+1. \end{cases}$$

- i. Mutassuk meg, hogy a  $Z := \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$  improprius Riemann-integrál véges. (Segítség: majoráns kritérium.)
- ii. Legyen  $f(x) = \frac{1}{Z} g(x)$ , ha  $x \in \mathbb{R}$ . Mutassuk meg, hogy  $f$  egy sűrűségfüggvény, de az  $x \mapsto F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  eloszlásfüggvény csak megszámlálhatóan végtelen sok pont kivételével differenciálható. (Megjegyzés: Ez a példa mutatja, hogy a 4.2.2. Állítás feltétele csak elégséges, de nem szükséges a sűrűségfüggvény létezésére.)