4. Übungsblatt

Erwartungswert, Transformationsformel für den Erwartungswert, Varianz/Standardabweichung

1. Zwei Würfel werden geworfen.Was ist der Erwartungswert des Maximums der Augenzahlen?

---

2. In einem Geschäft werden Glühbirnen verkauft. Wir wissen, dass 1% der Glühbirnen fehlerhaft ist. Wie viele fehlerhafte Glühbirnen erwarten wir beim Kauf von 100 Glühbirnen? Was ist die Standardabweichung der Anzahl der gekauften fehlenhaften Birnen?

3. Eine Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal zwei nacheinanderfolgende Würfe die gleiche Ergebnisse geben. Was ist der Erwartungswert und die Standardabweichung der Anzahl der Würfe?

4. Auf dem Quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ wählen wir nacheinander (unabhängig voneinander und uniform) zufällige Punkte aus. Wir stoppen, nachdem wir den ersten Punkt bekommen, der innerhalb des Einheitskreises liegt, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist. Was ist die Verteilung der Anzahl der Punkte? Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Punkte? Angenommen, dass die ersten 100 Punkte nicht innerhalb dieses Einheitskreises liegen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auch der 101. Punkt nicht innerhalb des Kreises liegt?

5. In der Universität gibt es viele Telefonapparate, die unabhängig voneinander und mit gleichen und kleinen Wahrscheinlichkeiten kaputtgehen. Es gibt 12 Tage von den 360 Tagen des Jahres, wenn keine Apparat kaputtgeht. Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Apparate, die an einem Tag kaputtgehen? Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Tage, wenn 2 oder mehr Apparate kaputtgehen?

6. Die Ingenieure einer Glühbirnenfabrik haben beobachtet: Je mehr Birnen pro Tag produziert werden, desto weniger wahrscheinlich ist es, dass eine einzelne Birne fehlerhaft wird. Falls an einem Tag $n \geq 1$ Glühbirnen produziert werden, so wird jede Birne unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2n}$ fehlerhaft.

   (a) Falls an einem Tag $n = 10$ Glühbirnen produziert werden, wie groß sind der Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der an jenem Tag produzierten Glühbirnen (und warum)?

   (b) Im Fall $n = 10$, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 4, aber weniger als 8 Glühbirnen fehlerhaft werden unter den 10 Birnen? (Geben wir den genauen Wert der Wahrscheinlichkeit an.)

   (c) Nehmen wir an, dass an einem Tag n Glühbirnen produziert werden, wobei n sehr groß ist. Nähern wir mittels geeigneter Approximation die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass am gegebenen Tag genau 3 Birnen fehlerhaft werden. (Hier muss der genaue Wert der Wahrscheinlichkeit nicht bestimmt werden.)

   (*Prüfung, Aufgabe 3, 23.01.2025*)

---

7. Ein Würfel wird geworfen, sei X die Augenzahl. Berechenen wir den Erwartungswert $\mathbb{E}\left((X-3)^2\right)$.

8. Sei X die Zahl eines zufällig gewählten Monats von April bis Dezember. Nehmen wir an, dass wir den i-ten Monat mit Wahrscheinlichkeit $\frac{i}{72}$ wählen ($\forall i = 4, \ldots, 12$). Sei noch $Y = (-1)^X$.

   a) Bestimmen wir die Verteilung von Y.

   b) Berechenen wir den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$ aufgrund der Verteilung von Y, d.h.: benutzen wir die Definition des Erwartungswertes. Bestimmen wir $\mathbb{E}(Y)$ auch anhand der Verteilung von X, also mit der Transformationformel für den Erwartungswert.

9. Auf die Seiten eines Tetraeders haben wir die ersten vier positive Primzahlen aufgeschrieben. Wir werfen diesen Tetraeder dreimal. Bezeichne X die Anzahl der 7-er Würfe und seien $Y = X^2, Z = X^2 + X + 1$. Bestimmen wir den Erwartungswert von Y und Z sowie die Standardabweichung von X.

10. Wir führen unabhängige Experimente durch, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit p erfolgreich sind. Wir wiederholen das Experiment, bis 3 Versuche erfolgreich werden. Bezeichne X die Anzahl der dafür notwendigen erfolglose Experimente. Bestimmen wir den Wert von $\mathbb{E}(\frac{1}{(X+2)(X+1)}$ (als Funktion von p).

---

11. Auf einer Weide grasen drei Hirsche ahnungslos. (*Egy réten három szarvas legelészik gyanútlanul.*) Drei Jäger, die nicht voneinander wissen, rennen zur Weide und feuern gleichzeitig auf die wilde Tiere. Jeder Schuss trifft erfolgreich und tödlich. Wie groß sind der Erwartungswert und die Standardabweichung der Anzahl der überlebenden Hirsche. (Es können theoretisch mehrere Jäger in denselben Hirsch schießen, und jeder Schuss trifft jeden Hirsch mit gleicher Wahrscheinlichkeit.)
12. Sei $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$, und $Y = 2X + 1$. Geben wir die Varianz von Y an.
13. Sei X eine Zufallsvariable, für die $\mathbb{E}(X) = 1$ und $\mathbb{D}^2(X) = 5$ gelten. Bestimmen wir $\mathbb{E}((2 + X)^2)$ und $\mathbb{D}^2(4 + 3X)$.
14. Sei $X \sim \text{Geo}(\frac{1}{3})$. Bestimmen wir die Werte $\mathbb{E}\left((3 - X)^2\right)$ und $\mathbb{D}(5 - 2X)$.

In der Vorlesung:

15. Nehmen wir an, dass die Gewinne beim Lotto fix sind: 1 Milliarde (Forints) bei 5 richitgen Zahlen, 6 Millionen bei 4 richtigen Zahlen, 35 Tausend bei 3 richtigen Zahlen, und 2 Tausend bei 2 richtigen Zahlen. Was ist der Erwartungswert des Gewinns (mit einem Lottoschein)?
16. Wir fügen in ein anfangs leeres Array, das von 1 bis $2n$ indiziert ist (wobei $n \geq 1$), $2n$ Elemente ein, so dass alle zwei Elemente unterschiedliche Plätze bekommen (vgl. Blatt 1, Aufgabe 14). Nehmen wir jetzt an, dass die Hälfte der Elemente gerade Zahlen sind, der Rest ungerade Zahlen. Unter den $2n-1$ Paaren von benachbarten Elementen, wie viele werden im Erwartungswert
    (a) aus zwei geraden Zahlen bestehen?
    (b) aus einer geraden und einer ungeraden Zahl bestehen (in beliebiger Reihenfolge)?
17. Seien $X \sim \text{Pois}(3)$ und $Z = X^2 - X$. Bestimmen wir
    (a) den Erwartungswert von Z,
    (b) anhand der Lösung von (a) und der bekannten vormel für $\mathbb{E}(X)$ die Varianz von X.

Verteilung	Notation	ran$X$	$f_X(k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0,1\}$	$1-p,\, p$	p	$p(1-p)$
Binomialverteilung	$\text{Bin}(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson-Verteilung	$\text{Poi}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
geometrische Verteilung	$\text{Geo}(p)$	$\mathbb{N}^+$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$