

4. Gyakorlat

Várható érték, diszkrét valószínűségi változó transzformáltja, transzformált várható értéke, szórás
Végeredmények és megoldások

1. Legyen X : a dobott számok maximuma (val. változó). A várható értékét X -nek a következő módon számíthatjuk ki:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^6 k \cdot \mathbb{P}(X = k).$$

A maximum $X = 1$ lesz, ha mindkettő kockán 1-est dobunk - ez egyetlen lehetőség, tehát $\mathbb{P}(X = 1) = 1/36$ (az összes lehetőség 36). $\mathbb{P}(X = 2) = 3/36$, a kedvező esetek száma 3, mivel az egyik kocka 1-est, másik 2-est mutat (vagy fordítva) vagy mindektől kocka 2-est mutat. Ezt minden k -ra ($k \in \{1, 2, \dots, 6\}$) végiggonolva a várható érték a következőnek adódik:

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^6 i(2i-1) = 4.4722.$$

2. Az előző feladatsoron (a 11. feladatban) már láttuk, hogy az izzók számának eloszlása binomiális $n = 100$ és $p = 0,01$ paraméterekkel. Ezért az első kérdésre a válasz $\mathbb{E}(X) = np = 100 \cdot 0,01 = 1$. A szórásnégyzet pedig $\mathbb{D}^2(X) = np(1-p) = 100 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 0,99$, tehát a szórás $\mathbb{D}(X) = \sqrt{0,99} \approx 0,9950$.
3. Jelölje X a szükséges dobások számát. Vegyük észre, hogy $\text{Ran}(X) = \{2, 3, 4, \dots\}$ (hiszen ahhoz, hogy egymás után két egyformát dobjunk, legalább 2 dobás kell, de ennyi elég is és bármilyen ennél nagyobb egész számú dobás is lehetséges). Továbbá $Y := X - 1$ geometriai eloszlású $1/2$ paraméterrel. Ugyanis ha $k \geq 1$, akkor feltéve, hogy a k -adik dobás után még nincs vége a kísérletnek, pontosan akkor ér véget a kísérlet a $k + 1$ -edik dobással, ha a $k + 1$ -edik dobás ugyanolyan lesz, mint a k -adik, aminek a valószínűsége $1/2$, függetlenül attól, hogy a k -adik dobás (és a korábbi $k - 1$ dobás) eredménye mi volt. Ez tehát azt jelenti, hogy minden $k \geq 1$ egész számra

$$\mathbb{P}(Y > k + 1 | Y > k) = 1/2,$$

és mivel $\mathbb{P}(Y > 0) = 1$, ebből a szorzási szabály szerint

$$\mathbb{P}(Y > k + 1) = \mathbb{P}(Y > 0) \mathbb{P}(Y > 1 | Y > 0) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(Y > k + 1 | Y > k) = (1/2)^{k+1},$$

vagyis

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y > k - 1) - \mathbb{P}(Y > k) = (1/2)^{k-1} - (1/2)^k = (1/2)^k = (1/2)^{k-1} \cdot (1 - 1/2),$$

azaz Y valóban geometriai eloszlású $p = 1 - p = 1/2$ paraméterrel. Ezért a várható érték linearitása alapján $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y + 1) = \mathbb{E}(Y) + 1 = 2 + 1 = 3$ és $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(Y + 1) = \mathbb{D}^2(Y) = \frac{1-p}{p^2} = 2$, így $\mathbb{D}(X) = \sqrt{2}$.

Gyakorlaton legalább egy hallgatótól felmerült a következő megoldás ötlete is, ezért röviden ezt is ismer-tetjük. Eseménytérnek választhatjuk azon véges F -I-sorozatok halmazát, amelyek két egyforma dobás-ra végződnek, de előtte nincs bennük két egymás utáni egyforma dobás, pl. $FF, II, FII, IFF, FIFF, IFII, \dots$. Ha $k = 2, 3, 4, \dots$, akkor k hosszú ilyen sorozatból mindig 2 db van. X értéke pontosan azt adja meg, hogy hány dobásból álló kimenetelen vagyunk. Egy k hosszú kimenetel valószínűsége $(1/2)^k$ (ez szorzási szabállyal könnyen ellenőrizhető), ezért $\mathbb{P}(X = k) = 2(1/2)^k = (1/2)^{k-1}$, ha $k = 2, 3, 4, \dots$. Ebből $\mathbb{E}(X)$ akár a geometriai eloszlás várható értékének kiszámításához hasonlóan közvetlenül is meghatározható, akár úgy, hogy $\mathbb{P}(X = k)$ képlete alapján a másik megoldáshoz hasonlóan észrevesszük, hogy $X - 1 \sim \text{Geo}(1/2)$. $\mathbb{D}(X)$ értéke hasonlóan adódik.

4. Legyen X : a pontok száma. X geometriai eloszlású lesz, mert addig ismételjük a pontok kiválasztását, amíg az első sikeres esemény (egy pont beleesése az egységkörbe) meg nem történik. Így $X \sim \text{Geo}(p)$. Itt p annak a valószínűsége, hogy a pont az egységkörbe esik, amit a területek arányából kiszámíthatunk.

$$p = \frac{T_{\text{kedv}}}{T_{\text{össz}}} = \frac{T_{\text{kör}}}{T_{\text{négysz}} = \frac{1^2 \cdot \pi}{2 \cdot 2} = \frac{\pi}{4} = 0.7854$$

Ismert, hogy a geometriai eloszlás várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = \frac{4}{\pi} = 1.2732.$$

Végül az utolsó kérdésnél a keresett feltételes valószínűség

$$\mathbb{P}(X > 101 | X > 100) = \mathbb{P}(X > 101 - 100) = \mathbb{P}(X > 1) = 1 - p = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.2146,$$

ahol az első lépés a geometriai eloszlás örökifjúsága miatt igaz.

5. Legyen az X valószínűségi változó az elromlott telefonkészülékek száma egy adott napon. Mivel a telefonkészülékek száma felülről nem korlátos és egymástól függetlenül romlanak el, így X Poisson-eloszlású, vagyis $X \sim \text{Poi}(\lambda)$. A feladat szövegéből tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{12}{360} = \frac{1}{30}.$$

A $\mathbb{P}(X = 0)$ valószínűséget felírhatjuk $e^{-\lambda}$ alakban is, mivel X Poisson-eloszlású. Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $\lambda = -\ln \frac{1}{30} = 3.401$. Ismert, hogy ha X Poisson, akkor $\mathbb{E}(X) = \lambda$, vagyis a várható érték 3.401. Legyen most Y azon napok száma a 360 napból, amikor legalább 2 készülék elromlik. Y várható értékének a kiszámolásához szükségünk van még a $\mathbb{P}(X \geq 2)$ valószínűségre.

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)) = 1 - (e^{-3.401} + 3.401e^{-3.401}) = 0.8533.$$

Mivel Y felülről korlátos 360 kísérlettel, így $Y \sim \text{Bin}(360; 0.8533)$. Ismert, hogy ha $Y \sim \text{Bin}(n, p)$, akkor $\mathbb{E}(Y) = np$, így a feladat megoldása $\mathbb{E}(Y) = 360 \cdot 0.8533 = 307.18$.

6. (a) (6 pont)

(0 pont) Jelöljük X -szel az adott napon gyártott hibás izzók számát.

(1 pont) Ekkor X binomiális eloszlású

(1 pont) $n = 10$ (arra önmagában nem jár pont, hogy $n = 10$, csak arra, ha kiderül, hogy a binomiális eloszlásban a kísérletek számának megfelelő paraméter értéke 10)

(1 pont) és $p = \frac{1}{2 \times 10} = \frac{1}{20}$ paraméterekkel (az n és p jelölések nem kötelezőek.),

(1 pont) ezért $\mathbb{E}(X) = np = \frac{1}{2}$ (Ha már n és p értéke is szerepelt, akkor itt elég a végeredmény)

(1 pont) és $\mathbb{D}^2(X) = np(1 - p)$

(1 pont) $= 10 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{40} = 0.475$ (elég csak közönséges tört vagy csak tizedestört alakban is. Ha a konkrét n -nel és p -vel van valami részletszámolás, akkor az előző pont is rendben van).

(b) (6 pont)

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(4 < X < 8)$

(1 pont) $= \mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 7)$ (ha ez megvan, akkor jár az előző pont is)

(3 pont) $= \binom{10}{5} \left(\frac{1}{20}\right)^5 \left(\frac{19}{20}\right)^5 + \binom{10}{6} \left(\frac{1}{20}\right)^6 \left(\frac{19}{20}\right)^4 + \binom{10}{7} \left(\frac{1}{20}\right)^7 \left(\frac{19}{20}\right)^3$ (az is elég, ha ez n -nel és p -vel kifejezve van meg és már elmondta, mi n és p értéke; az egyes helyes tagokért jár részpont)

(1 pont) $\approx 6,369 \cdot 10^{-5} = 0,00006369$. (Elég a végeredmény, mivel a számológép tud binomiális együtthatókkal számolni, de egyébként $\mathbb{P}(X = 5) = 6,0935 \cdot 10^{-5}$, $\mathbb{P}(X = 6) = 2,6726 \cdot 10^{-6}$, $\mathbb{P}(X = 7) = 8,0379 \cdot 10^{-8}$, utóbbi a négy értékes jegyre való kerekítésnél el is hagyható. Ha ezek a numerikus értékek megvannak, de az előző részben nincsenek meg a súlyfüggvény értékei, akkor abból a 3 pontból meg lehet adni utólag max. 2-t.)

(c) (8 pont)

(1 pont) arra, hogy Poisson-approximációt kell használni (még ha esetleg nem is sikerül, pl. nem tudja, hogy melyik változót közelítse Poissonnal vagy milyen paraméterű Poissonnal közelítse). Nem baj, ha ezt nem írja oda, feltéve, hogy jól alkalmazza a Poisson-approximációt (ide értve azt is, hogy λ -t elvileg helyesen határozza meg), de ha nem jól csinálja, akkor ez az 1 pont sem jár.

(1 pont) arra, hogy miért azt kell használni: elég valami olyasmi, hogy n nagyon nagy $p (= p_n)$ pedig

nagyon kicsi (és a kettő szorzata egy pozitív számhoz tart és egy ilyen paraméterekkel rendelkező binomiális eloszlású val. változót közelítünk, de ezeket nem kötelező odaírni).

(1 pont) A hibás izzók száma egy Y Poisson-eloszlású valószínűségi változóval közelíthető,

(2 pont) amelynek paramétere $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \frac{1}{2}$. (A p_n jelölés nem kötelező, sőt ha azt írja, hogy np mindig $1/2$, akkor a határértéket sem kötelező odaírni.)

(1 pont) Így tehát a keresett (közelítő) valószínűség $\mathbb{P}(Y = 3)$

(1 pont) $= \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = \frac{(1/2)^3}{3!} e^{-1/2}$ (elég a két alak közül az egyik. Az $(1/2)^3$ helyett szabad $1/8$ -ot, a $3!$ helyett 6 -ot írni, de nem elég a pusztán végeredmény, ha csak az van, akkor -1 pont)

(1 pont) $\approx 0,0126$.

7. $\mathbb{E}((X - 3)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 6X + 9) = \mathbb{E}(X^2) - 6\mathbb{E}(X) + 9$, ahol az utolsó lépésben használtuk a várható érték linearitását. Előadáson láttuk, hogy $\mathbb{E}(X) = 3,5 = \frac{21}{6}$ és $\mathbb{E}(X^2) = \frac{91}{6}$ (lásd a 3.2.2. Példát Mészáros Szabolcs jegyzetében: https://cs.bme.hu/~marti/valszam2021/VIK_Valszam_2021_Eloadas.pdf), ezért $\mathbb{E}((X - 3)^2) = \frac{91}{6} - \frac{126}{6} + \frac{54}{6} = \frac{19}{6} = 3 \frac{1}{6}$.

8. a) $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{5}{9}$, $\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{9}$

a) Y értéke pontosan akkor 1 , ha X páros, különben pedig -1 az értéke. Így $\text{Ran}(Y) = \{-1, 1\}$ és

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X \in \{4, 6, 8, 10, 12\}) = \frac{4 + 6 + 8 + 10 + 12}{72} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$$

és

$$\mathbb{P}(Y = -1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{4}{9}$$

(de persze $\mathbb{P}(Y = -1)$ is kiszámítható $\mathbb{P}(Y = 1)$ -hez hasonlóan).

b) Y eloszlásával számolva, a várható érték definíciója szerint $\mathbb{E}(Y) = (-1) \cdot \mathbb{P}(Y = -1) + 1 \cdot \mathbb{P}(Y = 1) = -\frac{4}{9} + \frac{5}{9} = \frac{1}{9}$.

c) $Y = g(X)$, ahol $g(x) = (-1)^x$, $x \in \text{Ran}(X) = \{4, 5, 6, \dots, 12\}$. Így X eloszlásával számolva a transzformált várható értékére vonatkozó képletet használhatjuk (és a végeredmény persze ugyanaz lesz, mint a b) feladatban):

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in \text{Ran}(X)} g(k) \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k \in \text{Ran}(X)} (-1)^k \mathbb{P}(X = k) = \frac{4}{72} - \frac{5}{72} + \dots + \frac{12}{72} = \frac{1}{9}.$$

9. X binomiális eloszlású $n = 3$ és $p = 1/4$ paraméterekkel, hiszen mind a 3 dobás értéke egymástól függetlenül $1/4$ valószínűséggel 7 . Tehát $\mathbb{P}(X = k) = \binom{3}{k} (1/4)^k (3/4)^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, 3$ -ra. Így a transzformált várható értékére vonatkozó képlet szerint

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^3 k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^3 k^2 \mathbb{P}(X = k) \\ &= 1^2 \cdot 3 \cdot (1/4) \cdot (3/4)^2 + 2^2 \cdot 3 \cdot (3/4) \cdot (1/4)^2 + 3^2 \cdot (1/4)^3 = 9/8. \end{aligned}$$

Ezért $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X^2 + X + 1) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X) + 1$ a várható érték linearitása miatt. $\mathbb{E}(X) = np = \frac{3}{4}$, tehát $\mathbb{E}(Z) = \frac{9}{8} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{23}{8}$.

Végül a binomiális eloszlás szórásának képlete alapján $\mathbb{D}^2(X) = np(1-p) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ és így $\mathbb{D}(X) = \frac{3}{4}$. Persze X szórásnégyzetét az előbbi részfeladatok alapján is kiszámolhatjuk: $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{9}{8} - \frac{9}{16} = \frac{9}{16}$.

Megjegyzés: A szórásnégyzet értékét a binomiális eloszlás szórásnégyzetének képletével egyből megkaphatjuk: $\mathbb{D}^2(X) = np(1-p) = \frac{9}{16}$. Ebből $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{D}^2(X)$, majd a várható érték linearitása

segítségével $\mathbb{E}(X^2 + X + 1)$ is könnyen megkapható, a transzformált várható értékére vonatkozó képlet alkalmazása nélkül. Azonban ez a megoldásváltozat csak nevezetes (ismert várható értékű és szórásnégyzetű) eloszlások esetén alkalmazható.

10. Először meg kell határozunk X értékészletét és eloszlását/súlyfüggvényét. (Itt fontos, hogy bár X eloszlása hasonlít a geometriai eloszláshoz, mégsem geometriai eloszlás, egyrészt azért, mert nem egy, hanem három sikerig végezzük a kísérleteket, másrészt pedig azért, mert csak a kudarcokat számoljuk.) $\text{Ran}(X) = \{0, 1, 2\}$, hiszen a 3. siker előtti kudarcok száma tetszőleges nemnegatív egész szám lehet. Továbbá $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(k \text{ kudarc a 3. siker előtt}) \\ &= \mathbb{P}(\text{az első } k + 2 \text{ kísérletből } k \text{ kudarc és 2 siker, } k + 3\text{-adik kísérlet sikeres}) \\ &= \binom{k+2}{2} p^3 (1-p)^k,\end{aligned}$$

hiszen $\binom{k+2}{2}$ -féleképpen választhatunk ki $k + 2$ kísérletből 2 sikereset, és ezeket bárhogy is választjuk ki, a függetlenség miatt annak a valószínűsége, hogy ez a kettő és a $k + 3$ -adik sikeres, az első $k + 2$ közül a többi k pedig sikertelen, $p^3(1-p)^k$ -val egyenlő.

Vegyük észre, hogy $\mathbb{E}\left(\frac{1}{(X+1)(X+2)}\right) = \mathbb{E}(g(X))$, ahol $g(k) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$, $k \geq 0$. Így a transzformált várható értékére vonatkozó képlet szerint

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{(X+1)(X+2)}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{k+2}{2} p^3 (1-p)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \frac{(k+2)(k+1)}{2} p^3 (1-p)^k = \frac{p^3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \\ &= \frac{p^3}{2(1-(1-p))} = \frac{p^2}{2}.\end{aligned}$$

11. Eseménytérnek pl. jó az $\Omega = [3]^3 = \{1, 2, 3\}^3$ Descartes-szorzat, ahol egy kimenetel azt adja meg, hogy melyik szarvasba hányadik vadász lő, pl. $(1, 2, 2)$: az 1. szarvasba az 1., a 2.-ba a 2. és a 3.-ba az 1. vadász lő. Ekkor $|\Omega| = 27$ és a valószínűségi mező klasszikus. Jelölje X a túlélő (elszaladó) szarvasok számát, ekkor $\text{Ran}(X) = \{0, 1, 2\}$ és

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\text{minden vadász másik szarvasba lő}) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3^3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9},$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\text{a 3 vadász összesen 2 szarvasba lő}) = \frac{\binom{3}{2} \cdot 2 \cdot 3}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

(mert $\binom{3}{2}$ -féleképpen választhatjuk ki, hogy melyik két szarvasba löjjenek, és ezek kiválasztása után 2 lehetőség van annak kiválasztására, hogy melyik szarvasba löjön 2 vadász és melyikbe egy, végül 3 lehetőség van annak a vadásznak a kiválasztására, aki egyedülként lő egy szarvasba) és így $\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{9}$ (de ez persze közvetlenül is könnyen kiszámítható:

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\text{minden vadász ugyanabba a szarvasba lő}) = 3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{9},$$

mert 3-féleképpen választhatjuk ki, hogy melyik szarvasba löjjenek a vadászok, és ezt megadva egyértelmű a kimenetel, ha az $\{X = 2\}$ esemény bekövetkezik). Ezért definíció szerint

$$\mathbb{E}(X) = \left(\frac{2}{9} \cdot 0\right) + \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9}$$

és így

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{9} \cdot 2^2 - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{64}{81} = \frac{26}{81},$$

tehát $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} = \sqrt{\frac{26}{81}} \approx 0,5666$.

12. A szórásnégyzet azonosságai miatt $(\mathbb{D}^2(aY + b) = a^2 \mathbb{D}^2(Y))$, ha $a, b \in \mathbb{R}$ és az Y valószínűségi változó szórásnégyzete létezik) $\mathbb{D}^2(2X + 1) = 2^2 \mathbb{D}^2(X) = 4\lambda$.
13. A várható érték linearitása és a $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ azonosság alapján a) $\mathbb{E}((2 + X)^2) = \mathbb{E}(4 + 4X + X^2) = 4 + 4\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X^2) = 4 + 4 \cdot 1 + \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 8 + 5 + 1 = 14$.
b) $(\mathbb{D}^2(aY + b) = a^2 \mathbb{D}^2(Y))$, ha $a, b \in \mathbb{R}$ és az Y valószínűségi változó szórásnégyzete létezik) $\mathbb{D}^2(4 + 3X) = 3^2 \mathbb{D}^2(X) = 45$.
14. Tudjuk, hogy $\mathbb{E}(X) = 1/p = 3$ és $\mathbb{D}^2(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{2/3}{1/9} = 6$, valamint $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. Ezért a várható érték linearitása miatt $\mathbb{E}((3 - X)^2) = \mathbb{E}(9 - 6X + X^2) = 9 - 6\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X^2) = 9 - 6 \cdot 3 + \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 9 - 18 + 6 + 9 = 6$.

Továbbá $\mathbb{D}(5 - 2X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(5 - 2X)} = \sqrt{\mathbb{D}^2(-2X)} = \sqrt{(-2)^2 \mathbb{D}^2(X)} = \sqrt{24} \approx 4,899$, lásd a szórásnégyzet azonosságait a 16. feladat megoldásánál.

(Másik lehetséges érvelés, ha nem a szórásnégyzet, hanem a szórás azonosságait akarjuk használni: $\mathbb{D}(5 - 2X) = \mathbb{D}(-2X)$ a szórás eltolás-invarianciája miatt és $\mathbb{D}(-2X) = |-2| \mathbb{D}(X) = 2\sqrt{6} = \sqrt{24}$ a szórás abszolút homogenitása miatt.)

15. Ezt a feladatot a transzformált várható értékére vonatkozó képlet segítségével elegánsabban meg lehetne oldani, de mivel ez előadáson/gyakorlaton a várható érték témájának elején szokott szerepelni, a várható érték definíciója szerint szoktuk elmondani.

A lottóhúzást a szokásos $\binom{90}{5}$ elemű klasszikus valószínűségi mezővel modellezzük (lásd a 2.10. feladatot). Jelölje X a nyeremény értékét, ekkor $\text{Ran}(X) = \{0, 2\,000, 35\,000, 6\,000\,000, 1\,000\,000\,000\}$ és $\mathbb{E}(X)$ -et keressük.

$$\mathbb{P}(X = 1\,000\,000\,000) = \mathbb{P}(\text{öttalálatos}) = \frac{1}{\binom{90}{5}},$$

hiszen akármik is a helyes nyerőszámok, egy lehetőségünk van az összeset egyszerre eltalálni, továbbá

$$\mathbb{P}(X = 6\,000\,000) = \mathbb{P}(\text{négytalálatos}) = \frac{\binom{85}{1} \cdot \binom{5}{4}}{\binom{90}{5}},$$

hiszen tetszőleges helyes nyerőszámok esetén azok a négytalálatos szelvények, amelyeken az 5 nyerőszámból 4-et és a 85 nem nyerő számból 1-et választottunk. Hasonlóan adódik, hogy

$$\mathbb{P}(X = 35\,000) = \mathbb{P}(\text{háromtalálatos}) = \frac{\binom{85}{2} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}$$

és

$$\mathbb{P}(X = 2\,000) = \mathbb{P}(\text{kéttalálatos}) = \frac{\binom{85}{3} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{90}{5}}.$$

A nulla- és egytalálatos szelvény valószínűségét nem kell külön kiszámolni, hiszen ilyen szelvény esetén $X = 0$, és ezek a valószínűségek 0-s szorzóval jelennek meg a várható érték definíciójában. Tehát azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X) = (0 \cdot \mathbb{P}(X = 0)) + 2\,000 \cdot \mathbb{P}(X = 2\,000) + 35\,000 \mathbb{P}(X = 35\,000) + 6\,000\,000 \mathbb{P}(X = 6\,000\,000) + 1\,000\,000\,000 \mathbb{P}(X = 1\,000\,000\,000) \approx 154,1527 \text{ Ft.}$$

16. a) Legyen X az egymás mellé kerülő szomszédos elempárok száma, amelyek két páros számból állnak. Ekkor ha $x_1, \dots, x_n$ a páros elemek, akkor

$$X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \mathbb{1}_{\{x_i \text{ és } x_j \text{ egymás mellé kerül}\}},$$

mivel ezen indikátorok összege pontosan egyszer számol minden olyan (i, j) párt, amelyre x_i és x_j egymás mellé kerül.

Az 1.13. feladat szerint bármely két *rögzített* páros elem $1/n$ valószínűséggel kerül egymás melletti helyre. Így a várható érték linearitása alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \mathbb{1}_{\{x_i \text{ és } x_j \text{ egymás mellé kerül}\}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{x_i \text{ és } x_j \text{ egymás mellé kerül}\}}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \mathbb{P}\left(x_i \text{ és } x_j \text{ egymás mellé kerül}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{n} = ((n-1) + (n-2) + \dots + 1 + 0) \cdot \frac{1}{n} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n-1}{2}.\end{aligned}$$

b) Az a) feladathoz hasonlóan várhatóan $\frac{n-1}{2}$ olyan szomszédos elempár lesz a tömbben, amely két páratlan számból áll. Összesen pedig $2n-1$ szomszédos elempár van. A várható érték linearitása miatt így a két páros számból álló, a két páratlan számból álló és az egy páros plusz egy páratlan számból álló szomszédos elempárok száma várható értéke összegének $2n-1$ -nek kell lennie. Ezért az egy páros és egy páratlan számból álló szomszédos elempárok számának várható értéke $2n-1-2(n-1)/2 = n$.

17. a) A transzformált várható értékére vonatkozó képlet szerint

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2 - X) &= \mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^2 \lambda^{k-2}}{k(k-1)(k-2)!} e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 = 9.\end{aligned}$$

b) A várható érték linearitása és $\mathbb{E}(X) = \lambda$ miatt $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2 - X) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda = 3$.

Megjegyzés: A feladat kérdése csak a konkrét $\lambda = 3$ értékre vonatkozott, de a megoldásban az általános λ esete is látható (így bebizonyítottuk a $\mathbb{D}^2(X) = \lambda$ állítást is).